ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 3.

УДК 511.6 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-282-297

Периодические непрерывные дроби и S-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях [1]

Федоров Глеб Владимирович — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательского института системных исследований РАН (ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН), г. Москва.
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Аннотация

К настоящему времени метод непрерывных дробей позволил глубоко изучить проблему существования и построения нетривиальных S-единиц в гиперэллиптических полях в случае, когда множество S состоит из двух линейных нормирований. Данная статья посвящена более общей проблеме, а именно проблеме существования и построения фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях для множеств S, содержащих нормирования второй степени. Ключевым является случай, когда множество $S = S_h$ состоит из двух сопряжённых нормирований, связанных с неприводимым многочленом h второй степени. Основные результаты получены с помощью теории обобщенных функциональных непрерывных дробей в совокупности с геометрическим подходом к проблеме кручения в якобиевых многообразиях гиперэллиптических кривых.

Нами разработана теория обобщенных функциональных непрерывных дробей и связанных с ними дивизоров гиперэллиптического поля, построенных с помощью нормирований второй степени. Эта теория позволила нам найти новые эффективные методы для поиска и построения фундаментальных S_h-единиц в гиперэллиптических полях.

В качетсве демонстрации полученных результатов, мы подробно разбираем алгоритм поиска фундаментальных S_h-единиц для гиперэллиптических полей рода 3 над полем рациональных чисел и приводим явные вычислительные примеры гиперэллиптических полей $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ для многочленов f степени 7, обладающих фундаментальными S_h-единицами больших степеней.

Ключевые слова: непрерывные дроби, фундаментальные единицы, S-единицы, кручение в якобианах, гиперэллиптические кривые, дивизоры, группа классов дивизоров.

Библиография: 16 – названий.

Для цитирования:
Г. В. Федоров. Периодические непрерывные дроби и S-единицы с нормированиями второй степени в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 282–297.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16–11–10111).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 3.

UDC 511.6 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-282-297

Periodic continued fractions and S-units with second degree valuations in hyperelliptic fields[2]

Fedorov Gleb Vladimirovich — Ph.D., Senior Research Fellow, Scientific Research Institute of System Analysis (SRISA/NIISI RAS), Moscow.
e-mail: fedorov@mech.math.msu.su

Abstract

Based on the method of continued fractions by now the problem of the existence and construction of nontrivial S-units is deeply studied in hyperelliptic fields in the case when the set S consists of two linear valuations. This article is devoted to a more general problem, namely the problem of the existence and construction of fundamental S-units in hyperelliptic fields for sets S containing valuations of the degree 2. The key case when the set $S = S_h$ consists two conjugate valuations, connected with an irreducible polynomial h of the degree 2. The main results were obtained using the theory of generalized functional continued fractions in conjunction with the geometric approach to the problem of torsion in Jacobian varieties of hyperelliptic curves.

We have developed a theory of generalized functional continued fractions and the divisors of the hyperelliptic field associated with them, constructed with the help of valuations of the degree 2. This theory allowed us to find new effective methods for searching and constructing fundamental S_h-units in hyperelliptic fields.

As a demonstration of the results, we consider in detail algorithm to search for fundamental S_h-units for hyperelliptic fields of genus 3 over the field of rational numbers and give explicit computational examples of hyperelliptic fields $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$ for polynomials f of degree 7, possessing fundamental S_h-units of large powers.

Keywords: continued fractions, fundamental units, S-units, torsion in the Jacobians, hyperelliptic curves, divisors, the group of divisor classes.

Bibliography: 16 – titles.

For citation:
G. V. Fedorov, 2018, "Periodic continued fractions and S-units with second degree valuations in hyperelliptic fields" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 282–297.

1. Введение

Одной из актуальных современных проблем алгебры и теории чисел является проблема существования и построения фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях. Эта проблема имеет большую историю, восходящую к Абелю [1] и Чебышеву [2]. Важность этой проблемы подчеркивается глубокой связью с проблемой кручения в якобиевых многообразиях гиперэллиптических кривых и свойствами функциональных непрерывных дробей, в которые могут разлагаться элементы гиперэллиптических полей. В статье [8] предложены два метода для поиска S-единиц в гиперэллиптических полях: метод матричной линеаризации и метод функциональных непрерывных дробей. Метод матричной линеаризации имеет общую природу

[2]The study was carried out at the expense of a grant from the Russian science Foundation (project 16–11–10111).

и применим к произвольному набору нормирований S. В [8] показано, что метод непрерывных дробей имеет более эффективное применение для множеств S, состоящих из бесконечного нормирования и нормирования степени один. Опираясь на метод непрерывных дробей в статьях [3]-[15] была глубоко изучена проблема существования и построения нетривиальных S-единиц в гиперэллиптических полях в случае, когда множество S состоит из двух линейных нормирований. Однако, в статье [8] для S, состоящего из бесконечного нормирования и нормирования степени два, был построен контрпример для которого метод непрерывных дробей в текущем виде теряет свою эффективность.

Данная статья посвящена проблеме существования и построения фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях для множеств S более общего вида. Отдельно мы выделяем важный случай, когда множество $S = S_h$ состоит из двух сопряжённых нормирований, связанных с неприводимым многочленом h второй степени. Нами впервые найдены методы поиска и построения фундаментальных S_h-единиц в гиперэллиптических полях сравнимые по эффективности с методами для двух линейных нормирований. Получить существенные продвижения удалось благодаря тому, что в проблеме существования и построения фундаментальных S-единиц впервые была применена теория обобщенных функциональных непрерывных дробей в совокупности с геометрическим подходом к проблеме кручения в якобиевых многообразиях гиперэллиптических кривых.

Для случая двух линейных нормирований в статьях [7] и [13] был представлен новый геометрический метод, основанный на последовательном построении специальных дивизоров для заданного элемента гиперэллиптического поля. Многочлены Мамфорда этой последовательности дивизоров оказываются тесно связанными с непрерывной дробью рассматриваемого элемента. Основные результаты данной статьи были получены путем обобщения методов статей [7] и [13] для дивизоров, обобщенных непрерывных дробей и S_h-единиц, связанных с нормированиями второй степени.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть K — поле характеристики отличной от 2, и $f \in K[x]$ — свободный от квадратов многочлен, $\deg f = 2g+1$, $g \geqslant 1$, $L = K(x)(\sqrt{f})$. Пусть $\mathcal{V}$ — множество нормирований поля L, определенных над полем K. Обозначим $\mathrm{Div}(L)$ — группу K-дивизоров поля L,

$$\mathrm{Div}(L) = \left\{ D = \sum_{v \in \mathcal{V}} n_v v,\ n_v \in \mathbb{Z} \right\},$$

где для каждого дивизора D в наборе чисел $\{n_v\}_{v \in \mathcal{V}}$ только конечное количество отлично от нуля. Там, где ясно, что суммирование берется по $v \in \mathcal{V}$, будем его опускать. Все дивизоры, о которых далее пойдет речь, лежат в $\mathrm{Div}(L)$.

Для дивизора $D \in \mathrm{Div}(L)$, $D = \sum n_v v$, определим степень дивизора

$$\deg D = \sum n_v \deg v.$$

Для фиксированного нормирования $v \in \mathcal{V}$ определим число $v(D) = n_v = n_v(D)$. Дивизор $D \in \mathrm{Div}(L)$ называется эффективным, если $v(D) \geqslant 0$ для всех $v \in \mathcal{V}$. Скажем, что для дивизоров $D, E \in \mathrm{Div}(L)$ выполнено сравнение $D \leqslant E$, если $E - D$ эффективный дивизор.

Для главного дивизора (α) функции $\alpha \in L$, $\alpha \neq 0$, обозначим $(\alpha)_z$ и $(\alpha)_p$ соответственно эффективный дивизор нулей и эффективный дивизор полюсов функции α так, что $(\alpha) = (\alpha)_z - (\alpha)_p$, причем $v\big((\alpha)_z\big) \cdot v\big((\alpha)_p\big) = 0$ для всех $v \in \mathcal{V}$.

Группу дивизоров степени ноль поля L обозначим $\mathrm{Div}^\circ(L)$, группу главных дивизоров поля L обозначим $\mathrm{Princ}(L)$, группу классов дивизоров степени ноль поля L обозначим

$\Delta^\circ(L) = \mathrm{Div}^\circ(L)/\,\mathrm{Princ}(L)$. Скажем, что дивизоры $D, E \in \mathrm{Div}^\circ(L)$ эквивалентны $D \sim E$, если они принадлежат одному классу в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$.

Инволюция ι поля L, действуйющая $\iota : \sqrt{f} \to -\sqrt{f}$, $\iota^2 = \mathrm{id}$, может быть естественным образом определена на группе дивизоров $\mathrm{Div}(L)$ поля L.

Обозначим множество целых неотрицательных чисел $\mathbb{N}_0$.

Пусть $h \in K[x]$ — неприводимый многочлен, $\deg h \geqslant 1$, $h \nmid f$. Рассмотрим обобщенную непрерывную дробь вида

$$a_0 + \cfrac{h}{a_1 + \cfrac{h}{a_2 + \cdots}}, \tag{1}$$

где элементы a_j для всех $j \in \mathbb{N}_0$ имеют вид $a_j = \tilde{a}_j \cdot h^{-s_j}$, $s_j \in \mathbb{N}_0$, $\tilde{a}_j \in K[x]$, $h \nmid \tilde{a}_j$, $\deg \tilde{a}_j < (s_j + 1) \deg h$, и $\tilde{a}_j \neq 0$ при $j \geqslant 1$. Мы далее будем рассматривать только такие обобщенные непрерывные дроби, поэтому будем называть выражение (1) непрерывной дробью и сохраним для нее традиционное обозначение $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Элементы $a_0, a_1, \ldots$ называются неполными частными непрерывной дроби (1). Для $n \in \mathbb{N}_0$ выражения $\alpha_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$ называются полными частными непрерывной дроби (1). Для $j \in \mathbb{N}_0$ справедливы равенства

$$\alpha_{j+1}(\alpha_j - a_j) = h. \tag{2}$$

Обозначим $\Sigma = \{b \in K[x],\ \deg b < \deg h\}$, и $\Sigma((h))$ — множество формальных степенных рядов вида

$$\sum_{j=s}^{\infty} b_j h^j, \tag{3}$$

где $s \in \mathbb{Z}$, и при $j \geqslant s$ имеем $b_j \in \Sigma$, $b_s \neq 0$. Для степенного ряда α вида (3) обозначим $v_h(\alpha) = s$. Множество формальных степенных рядов $\Sigma((h))$ является полем. Для непрерывной дроби (1) неполные частные α_n, $n \in \mathbb{N}_0$, принадлежат полю формальных степенных рядов $\Sigma((h))$. Если непрерывная дробь α_0 конечная, то $\alpha_0 \in K(x) \subset \Sigma((h))$.

Подходящей дробью к непрерывной дроби (1) называется

$$p_j/q_j = [a_0; a_1, \ldots, a_j] \in K(x),\ j \in \mathbb{N}_0.$$

Положим $p_{-1} = 1$, $p_0 = a_0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$. Тогда аналогично числовому случаю справедливы рекуррентные формулы для построения подходящих дробей

$$p_{j+1} = a_{j+1} p_j + h p_{j-1}, \quad q_{j+1} = a_{j+1} q_j + h q_{j-1}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Кроме того, аналогично числовому случаю при $j \in \mathbb{N}$ справедливы тождества

$$p_{j-1} q_j - p_j q_{j-1} = (-1)^j h^j, \tag{5}$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_{j+1} p_j + h p_{j-1}}{\alpha_{j+1} q_j + h q_{j-1}},$$

$$\alpha_0 - \frac{p_j}{q_j} = \frac{(-1)^j h^{j+1}}{q_j(\alpha_{j+1} q_j + h q_{j-1})}.$$

Если $a_0 \neq 0$ в непрерывной дроби (1), то из (5) имеем

$$v_h(p_{j+1}) = -s_{j+1} + v_h(p_j) = \sum_{k=0}^{j+1} s_k, \quad v_h(q_{j+1}) = -s_{j+1} + v_h(q_j) = \sum_{k=1}^{j+1} s_k.$$

Элемент $\alpha \in \Sigma((h))$, заданный рядом (3), можно представить в виде непрерывной дроби следующим образом. Определим $a_0 = \sum_{j=s}^{0} b_j h^j = [\alpha_0]_h$, если $s < 0$, а иначе $a_0 = 0$. Далее положим $\alpha_0 = \alpha$, и, если $\alpha_0 - a_0 \neq 0$, то определим $\alpha_1 = h/(\alpha_0 - a_0)$. Если же $\alpha_0 - a_0 = 0$, то непрерывная дробь α имеет вид $[a_0]$. Так как $v_h(\alpha_0 - a_0) > 0$, то $v_h(\alpha_1) \leqslant 0$. Аналогично, определим $a_1 = [\alpha_1]_h$, причем в силу $v_h(\alpha_1) \leqslant 0$ имеем $a_1 \neq 0$. В случае $\alpha_1 - a_1 \neq 0$ положим $\alpha_2 = h/(\alpha_1 - a_1)$. Продолжая так и далее, мы получим конечную или бесконечную непрерывнюю дробь типа (1) для элемента α. Далее мы будем рассматривать именно такие непрерывные дроби, то есть непрерывные дроби вида (2) и удовлетворяющие свойству $v_h(\alpha_n) \leqslant 0$ при $n \in \mathbb{N}$. С этим соглашением любой элемент поля $\Sigma((h))$ имеет единственное разложение в непрерывную дробь типа (1).

3. Основные результаты

Рассмотрим неприводимый многочлен $h \in K[x]$, $\deg h = 2$, и свободный от квадратов многочлен $f \in K[x]$, $\deg f = 2g+1$, $g \geqslant 2$, такой, что нормирование v_h поля $K(x)$ имеет два неэквивалентных продолжения v_h^- и v_h^+ на гиперэллиптическое поле $L = K(x)(\sqrt{f})$. Бесконечное нормирование v_∞ имеет единственное продолжение на поле L, эффективный дивизор, соответствующий бесконечному нормированию поля L, обозначим $\infty \in \mathrm{Div}(L)$. Обозначим $D_h \in \mathrm{Div}(L)$ — эффективный дивизор, соответствующий нормированию v_h^-. Тогда главный дивизор многочлена h можно записать в виде $(h) = D_h + \iota D_h - 4\infty$.

Пусть элемент $\alpha \in L$ имеет вид

$$\alpha = \frac{\sqrt{f} + V}{U}, \tag{6}$$

где

$$U, V \in K[x], \quad U \cdot h \mid f - V^2, \quad g - 1 \leqslant \deg U \leqslant g, \quad \deg V \leqslant \deg U + 1. \tag{7}$$

Определим

$$R = \frac{f - V^2}{U \cdot h}, \quad a = [\alpha]_h^-, \quad W = aU - V, \quad T = \frac{f - W^2}{U \cdot h}, \quad \beta = \frac{\sqrt{f} + W}{T}. \tag{8}$$

Предложение 1. *Справедливы следующие утверждения*

- $R, W, T \in K[x]$ *— многочлены, причем* $g - 1 \leqslant \deg R, \deg T \leqslant g$, $\deg W \leqslant \deg T + 1$;
- *существуют и однозначно определены эффективные дивизоры* D_R, D_U, $D_T \in \in \mathrm{Div}(L)$ *такие, что главные дивизоры многочленов* $R, U, T \in K[x]$ *и функций* $\sqrt{f} - V$, $\sqrt{f} - W \in L$ *имеют вид*

$$(R) = D_R + \iota D_R + r\big(D_h + \iota D_h\big) - \deg R \cdot 2\infty, \quad v_h(R) = r, \tag{9}$$

$$(U) = D_U + \iota D_U + s\big(D_h + \iota D_h\big) - \deg U \cdot 2\infty, \quad v_h(U) = s, \tag{10}$$

$$(T) = D_T + \iota D_T + t\big(D_h + \iota D_h\big) - \deg T \cdot 2\infty, \quad v_h(T) = t, \tag{11}$$

$$\left(\sqrt{f} - V\right) = D_R + (r + s + 1)D_h + \iota D_U - \max(2g+1, 2\deg V) \cdot \infty, \tag{12}$$

$$\left(\sqrt{f} - W\right) = D_U + (s + t + 1)D_h + \iota D_T - \max(2g+1, 2\deg W) \cdot \infty; \tag{13}$$

- *справедливо тождество* $\beta(\alpha - a) = h$.

Доказательство. По построению (6) имеем $U \cdot h \mid f - V^2$ и $2g+1 \leqslant \deg(f - V^2) \leqslant 2g+2$, следовательно, R — многочлен, $g - 1 \leqslant \deg R \leqslant g$. Так как элемент $a = [\alpha]_h^-$ имеет вид $a = \tilde{a} \cdot h^{-s}$, где $\tilde{a} \in K[x]$, $v_h(U) = s$, $\deg \tilde{a} \leqslant 2s + 1$, то W — многочлен степени не превосходящей $g + 1$. Положим $v_h(R) = r$. Определим в качетсве D_R и D_U такие максимальные эффективные дивизоры из $\mathrm{Div}(L)$, что $D_R \leqslant (R \cdot h^{-r})_z$, $D_R \leqslant \big(\sqrt{f} - V\big)_z$, и $D_U \leqslant (U \cdot h^{-s})_z$, $\iota D_U \leqslant \big(\sqrt{f} - V\big)_z$.

В силу того, что по построению (6) справедливо равенство $f - V^2 = R \cdot h \cdot U$, то выполнены соотношения (9), (10), (12).

Далее покажем, что $D_U + (s+1)D_h \leqslant \left(\sqrt{f} - W\right)_z$. Рассмотрим тождество

$$\frac{\sqrt{f} - W}{U} = \frac{\sqrt{f} + V}{U} - a. \tag{14}$$

Поскольку дивизор полюсов главного дивизора функции a имеет вид $s(D_h + \iota D_h)$ и

$D_U \leqslant \left(\sqrt{f} + V\right)_z$, то

$$\iota D_U \leqslant \left(\frac{\sqrt{f} + V}{U} - a\right)_p,$$

следовательно, $D_U \leqslant \left(\sqrt{f} - W\right)_z$. С другой стороны, по построению $v_h(a) = -s$ и

$$v_h^-\left(\frac{\sqrt{f} + V}{U} - a\right) = v_h^-(\alpha - a) > 0,$$

следовательно, $(s+1)D_h \leqslant \left(\sqrt{f} - W\right)_z$. Таким образом, $D_U + (s+1)D_h \leqslant \left(\sqrt{f} - W\right)_z$, следовательно, $U \cdot h \mid f - W^2$, откуда получаем, что T — многочлен, причем справедливы соотношения

$$\max(2g+1, 2\deg V) = \deg R + 2 + \deg U,$$
$$\max(2g+1, 2\deg W) = \deg U + 2 + \deg T.$$

Определим $t = v_h(T)$ и D_T — такой максимальный эффективный дивизор из $\mathrm{Div}(L)$, что $D_T \leqslant \left(T \cdot h^{-t}\right)_z$, $\iota D_T \leqslant \left(\sqrt{f} - W\right)_z$. Так как $f - W^2 = U \cdot h \cdot T$, то справедливы соотношения (11) и (13).

Единственность главных дивизоров $D_R, D_U, D_T \in \mathrm{Div}(L)$ следует из соотношений (8) и (9)-(13).

Соотношение $\beta(\alpha - a) = h$ следует из (14) и равенства $f - W^2 = U \cdot h \cdot T$. $\square$

Предложение 1 позволяет с помощью формул (8) для элемента α, определенного в (6), эффективно строить нерерывную дробь вида (2) и ее полные частные α_n.

Предложение 2. *Пусть дан элемент $\alpha_0 = \alpha \in L$ вида (6)-(7). Тогда для $j \in \mathbb{Z}$, $j \geqslant -1$, существуют и однозначно определены многочлены $U_j, V_j \in K[x]$, $g - 1 \leqslant \deg U_j \leqslant g$, $\deg V_j \leqslant g + 1$, $\max(2g+1, 2\deg V_j) = \deg U_j + 2 + \deg U_{j+1}$, и эффективные дивизоры $D_j \in \mathrm{Div}(L)$, для которых при $j \geqslant -1$ справедливы следующие формулы:*

$$\alpha_{j+1} = \frac{V_j + \sqrt{f}}{U_{j+1}}, \quad f - V_j^2 = U_j \cdot h \cdot U_{j+1}, \tag{15}$$

$$a_{j+1} = [\alpha_{j+1}]_h^-, \quad V_{j+1} = a_{j+1}U_{j+1} - V_j, \tag{16}$$

$$s_{j+1} = v_h(U_{j+1}) = -v_h(a_{j+1}) = -v_h^-(\alpha_{j+1}), \tag{17}$$

$$(U_j) = D_j + \iota D_j + s_j\bigl(D_h + \iota D_h\bigr) - 2\deg U_j \cdot \infty, \tag{18}$$

$$\left(V_j - \sqrt{f}\right) = D_j + (s_j + s_{j+1} + 1)D_h + \iota D_{j+1} - \max(2g+1, 2\deg V_j) \cdot \infty. \tag{19}$$

Доказательство. По элементу α с помощью формул (8) построим элемент β. По построению непрерывной дроби имеем $\alpha_1(\alpha_0 - a_0) = h$, а с другой стороны по предложению 1 имеем $\beta(\alpha - a) = h$. Из того, что $a = a_0$ следует, что $\alpha_1 = \beta$, то есть элементы α_0 и α_1 имеют одинаковый вид:

$$\alpha_j = \frac{\sqrt{f} + V_{j-1}}{U_j}, \; j = \overline{0,1}, \tag{20}$$

где

$$V_{-1} = V,\ U_{-1} = R,\ U_0 = U,\ V_0 = W,\ U_1 = T. \tag{21}$$

Положим

$$D_{-1} = D_R,\ D_0 = D_U,\ D_1 = D_T,\ s_{-1} = r,\ s_0 = s,\ s_1 = t. \tag{22}$$

Продолжая рассуждать аналогично и далее, с помощью предложения 1 получаем (15)-(19) для всех $j \geqslant -1$. □

Из предложения (2) следует, что данному элементу $\alpha \in L$ вида (6)-(7) соответствует корректно определенная последовательность эффективных дивизоров D_j, $j \in \mathbb{N}_0$. Следующее важное предложение играет кючевую роль в доказательстве теоремы 1.

Предложение 3. *Для $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения*

$$D_n + s_n \cdot \iota D_h - D_0 - s_0 \cdot \iota D_h + (\deg U_n - \deg U_0) \cdot \infty \sim \sum_{j=0}^{n-1} (2s_j + 1)\big(D_h - 2\infty\big). \tag{23}$$

Доказательство. Просуммируем (19) по $j = 0, \ldots, n-1$, получим

$$\sum_{j=0}^{n-1}(2s_j+1)D_h + \sum_{j=0}^{n-1}(D_j + \iota D_j) - \iota D_0 + \iota D_n + (s_n - s_0)\cdot D_h \sim \sum_{j=0}^{n-1} \max(2g+1, 2\deg V_j)\cdot\infty. \tag{24}$$

Так как справедливо соотношение (18), то из (24) следует (23). □

Теорема 1. *Пусть $s_0 = [g/2]$, $U = h^{s_0}$, $V = h^{s_0} \cdot \big[\sqrt{f} h^{-s_0}\big]_h^-$ и элемент $\alpha \in L$ имеет вид* (6). *Пусть справедливы построения* (8), (20)-(22) *и* (15)-(19) *для $j \in \mathbb{N}_0$. Тогда следующие условия эквивалентны*

1. *найдется минимальный номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $D_n = D_0$;*
2. *найдется минимальный номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $V_n = V_0$ и $U_n = cU_0$ для некоторой постоянной $c \in K^*$;*
3. *класс дивизора $\big(D_h - 2\infty\big)$ имеет конечный порядок m в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$;*
4. *класс дивизора $\big(D_h - \iota D_h\big)$ имеет конечный порядок m_h в группе классов дивизоров $\Delta^\circ(L)$;*
5. *непрерывная дробь элемента α типа* (1), *определенная соотношениями* (2), *периодическая с длиной периода n или $2n$.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1. и 2. следует из предложения 2.

Докажем, что из условия 3. следует условие 1.

Предположим, что дивизор $\big(D_h - 2\infty\big)$ имеет порядок $m \in \mathbb{N}$. Тогда найдется такой номер $n \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{j=0}^{n-2}(2s_j + 1) < m \leqslant \sum_{j=0}^{n-1}(2s_j+1).$$

Обозначим $\delta = \sum_{j=0}^{n-1}(2s_j+1) - m$, тогда $0 \leqslant \delta \leqslant 2s_{n-1}$. Из предложения 3 следует, что

$$D_n + s_n \cdot \iota D_h - D_0 - s_0 \cdot \iota D_h + (\deg U_n - \deg U_0)\cdot\infty \sim \delta\big(D_h - 2\infty\big). \tag{25}$$

Пусть $\delta = 2\delta_0 - \delta_1$, где $\delta_1 \in \{0,1\}$, $0 \leqslant \delta_0 \leqslant s_{n-1}$, $\delta_1 \leqslant \delta_0$. Так как

$$2\big(D_h - 2\infty\big) \sim \big(D_h - \iota D_h\big), \tag{26}$$

то из (25) получаем

$$D_n + s_n \cdot \iota D_h \sim D_0 + s_0 \cdot \iota D_h - \delta_0 \cdot \iota D_h + (\delta_0 - \delta_1) D_h + (\deg U_0 - \deg U_n + 2\delta_1) \cdot \infty. \qquad (27)$$

Так как по условию теоремы $s_{n-1} \leqslant s_0$, то в левой и правой частях (27) стоят эффективные дивизоры степени g. Обозначим

$$E = D_n + s_n \cdot \iota D_h - \Big(D_0 + s_0 \cdot \iota D_h - \delta_0 \cdot \iota D_h + (\delta_0 - \delta_1) D_h + (\deg U_0 - \deg U_n + 2\delta_1) \cdot \infty \Big). \quad (28)$$

Поскольку $E \sim 0$ и степень эффективного дивизора полюсов E не превосходит g, то E — главный дивизор некоторой рациональной функции $\beta \in K(x)$ (см. [16]). Для любого конечного нормирования $v \in \mathcal{V}$ такого, что $v \neq v_h^{\pm}$ и $v \neq \iota v$, имеем $v(E) \cdot \iota v(E) \leqslant 0$, а так, как E — главный дивизор рациональной функции, то получаем $v(E) = \iota v(E) = 0$. Для любого конечного нормирования $v \in \mathcal{V}$ такого, что $v = \iota v$, имеем $|v(E)| \leqslant 1$, а для главного дивизора рациональной функции E это возможно только, если $v(E) = 0$. Получается, что $\beta = bh^q$ для некоторых $q \in \mathbb{Z}$ и $b \in K^*$. Из (28) имеем $-1 \leqslant v_\infty^-(E) + v_\infty^+(E) \leqslant 3$, следовательно, $q = 0$. Так как по построению $v_h^+(D_n) = v_h^-(D_n) = 0$, то $\delta = 0$ и $D_n = 0$. Отсюда следует условие 1.

Докажем, что из условия 1. следует условие 3.

Предположим, что n — минимальное число такое, что $D_n = 0$, тогда по предложению 3 сразу следует, что класс дивизора $\big(D_h - 2\infty\big)$ имеет конечный порядок m в $\Delta^\circ(L)$.

В силу (26) из условия 3. следует конечность порядка класса дивизора $\big(D_h - \iota D_h\big)$ в $\Delta^\circ(L)$, то есть следует условие 4.

Если справедливо условие 4, то снова из (26) имеем условие 3.

Докажем, что условие 2. эквивалентно условию 5.

При заданном нормировании v_h^- второй степени непрерывная дробь полного частного $\alpha_j \in L$, построенная с помощью соотношений (2), зависит только от значения α_j, поэтому квазипериодичность α_0 эквивалентна условиям $V_n = V_0$ и $U_n = cU_0$ для некоторого минимального $n \in \mathbb{N}$, то есть квазипериодичность α_0 эквивалентна условию 2. Далее, в силу симметрии квазипериода непрерывной дроби (1) имеем $c = 1$, если n четно; для нечетного n длина периода совпадает с длиной квазипериода или в два раза больше длины квазипериода. $\square$

Теорема 1 позволяют для неприводимого многочлена h второй степени сформулировать эффективный алгоритм поиска S_h-единиц и классов дивизоров конечного порядка в $\Delta^\circ(L)$.

Алгоритм 1. *Пусть дан многочлен $f \in K[x]$, $\deg f = 2g+1$, $g \geqslant 2$. Положим $s_0 = [g/2]$.*

(i). Вычисляем

$$\xi = \sum_{j=0}^{s_0} f_j h^j \in K[x], \quad \text{где } \sqrt{f} = \sum_{j=0}^{\infty} f_j h^j \in \Sigma((h));$$

(ii). положим $U_0 = h^{s_0}$ и $V_0 = \xi$;

(iii). **цикл:** *для $j \in \mathbb{N}_0$ вычисляем*

- *(a) $U_{j+1} = \frac{f - V_j^2}{U_j \cdot h}$;*
- *(b) $a_{j+1} = \left[\frac{V_j + \xi}{U_{j+1}}\right]_h^-$;*
- *(c) $V_{j+1} = a_{j+1} \cdot U_{j+1} - V_j$;*
- *(d) проверяем, если $U_{j+1} = U_0$ и $V_{j+1} = V_0$, то успешно завершаем цикл.*

Если алгоритм 1 завершился успешно, то есть был найден номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $U_n = U_0$ и $V_n = V_0$, то в поле L существует фундаментальная S_h-единица.

Разберем, как вычислить $a = \left[\frac{T}{U \cdot h^s}\right]_h^-$ для заданных многочленов $T, U \in K[x]$, $v_h(T) = v_h(U) = 0$.

Нам необходимо найти многочлен $A \in K[x]$ такой, что

$$AU \equiv T \pmod{h^{s+1}}, \quad \deg A < \deg h^{s+1} = 2(s+1).$$

Пусть $h = h_2x^2 + h_1x + h_0$ и

$$U = (\tau_s x + \kappa_s)h^s + \ldots + (\tau_0 x + \kappa_0), \quad T = (\zeta_s x + \chi_s)h^s + \ldots + (\zeta_0 x + \chi_0).$$

Будем искать многочлен A в следующем виде

$$A = (\rho_s x + \sigma_s)h^s + \ldots + (\rho_0 x + \sigma_0).$$

Так как

$$(\rho_0 x + \sigma_0)(\tau_0 x + \kappa_0) \equiv (\zeta_0 x + \chi_0) \pmod{h},$$

то в случае $\kappa_0 \neq 0$ имеем

$$\rho_0 = \frac{h_2(\zeta_0\kappa_0 - \tau_0\chi_0)}{h_0\tau_0^2 - h_1\tau_0\kappa_0 + h^2\kappa_0^2}, \quad \sigma_0 = \frac{h_2\chi_0 + h_0\rho_0\tau_0}{h_2\kappa_0},$$

а в случае $\kappa_0 \neq 0$ имеем

$$\rho_0 = -\frac{h_2\chi_0}{h_0\tau_0}, \quad \sigma_0 = \frac{h_2\zeta_0 + h_1\rho_0\tau_0}{h_2\tau_0},$$

причем знаменатели не обращаются в ноль в силу неприводимости многочлена h. Рассматривая сравнение $AU \equiv T \pmod{h^2}$, находим ρ_1 и σ_1 из линейного соотношения

$$(\rho_1 x + \sigma_1)(\tau_0 x + \kappa_0) \equiv (\zeta_1 x + \chi_1) - (\rho_0 x + \sigma_0)(\tau_1 x + \kappa_1) - \frac{\rho_0\tau_0}{h_2} \pmod{h}.$$

Далее, шаг за шагом находим все коэффициенты многочлена A.

Далее подробно разберем работу алгоритма 1 для случая $g = 3$ и $K = \mathbb{Q}$.

Зададимся целью найти бирационально неэквивалентных гиперэллиптические кривые рода три над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, якобиан которых имеет нетривиальную подгруппу кручения. Для этого нам достаточно рассматривать пары многочленов f, h следующего вида:

$$f = c_7x^7 \ldots + c_0, \quad h = x^2 + h_0,$$

где $h_0, c_0, \ldots, c_7 \in \mathbb{Z}$, многочлен h неприводим, число h_0 свободно от квадратов, $c_7 > 0$ и $c_5 > 0$, либо $c_7 > 0$, $c_5 = 0$ и $c_3 > 0$, либо $c_7 > 0$, $c_5 = c_3 = 0$ и $c_1 \geqslant 0$. Также требуем, чтобы многочлен f был свободен от квадратов и $(f,\ h) \in \mathbb{Q}^*$.

Чтобы нормирование v_h автоматически имело два продолжения на поле

$$L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f}),$$

мы будем рассматривать многочлен f в следующем виде:

$$f = (f_{00} + f_{01}x)^2 + 2(f_{00} + f_{01}x)(f_{10} + f_{11}x)h + (f_{20} + f_{21}x)h^2 + (f_{30} + f_{31}x)h^3,$$

где $f_{00}, f_{01}, f_{10}, f_{11}, f_{20}, f_{21}, f_{30} \in \mathbb{Z}$, $f_{31} \in \mathbb{N}_0$, причем либо $f_{00} > 0$, либо $f_{00} = 0$ и $f_{01} > 0$, а также либо $f_{31} > 0$ и $f_{21} > 0$, либо $f_{31} > 0$, $f_{21} = 0$ и $f_{11} \geqslant 0$. Заметим, что при этих условиях

$$\left[\frac{\sqrt{f}}{h^2}\right]_h^- = (f_{00} + f_{01}x) + (f_{10} + f_{11}x)h,$$

и в силу (15) для всех $j = 0, 1\ldots$ справедливы соотношения

$$V_j^2 \equiv f \pmod h, \quad V_j \equiv f_{00} + f_{01}x \pmod h.$$

Положим

$$U_0 = h, \quad V_0 = (f_{00} + f_{01}x) + (f_{10} + f_{11}x)h.$$

Будем последовательно по $j = 1, 2\ldots$ искать многочлены $U_j, h \cdot a_j, V_j \in \mathbb{Q}[x]$ такие, что $\deg U_j \leqslant 3$, $\deg V_j \leqslant 4$, $\deg(h \cdot a_j) \leqslant 3$ в следующем виде

$$U_j = (u_{00}^{(j)} + u_{11}^{(j)}x) + \big(u_{10}^{(j)} + u_{11}^{(j)}x\big)h, \quad u_{00}^{(j)}, u_{11}^{(j)}, u_{10}^{(j)}, u_{11}^{(j)} \in \mathbb{Q},$$

$$a_j = (a_{00}^{(j)} + a_{01}^{(j)}x) + \frac{a_{10}^{(j)} + a_{11}^{(j)}x}{h}, \quad a_{00}^{(j)}, a_{01}^{(j)}, a_{10}^{(j)}, a_{11}^{(j)} \in \mathbb{Q},$$

$$V_j = (v_{00}^{(j)} + v_{11}^{(j)}x) + \big(v_{10}^{(j)} + v_{11}^{(j)}x\big)h + v_{20}^{(j)}h^2, \quad v_{00}^{(j)}, v_{11}^{(j)}, v_{10}^{(j)}, v_{11}^{(j)}, v_{20}^{(j)} \in \mathbb{Q},$$

до тех пор, пока не встретится номер j, для которого $u_{00}^{(j)} = u_{11}^{(j)} = u_{21}^{(j)} = 0$. Отметим, что $a_{10}^{(j)} + a_{11}^{(j)}x = 0$ до тех пор, пока $h \nmid U_j$.

Предположим, что мы уже знаем многочлены

$$U_{j-1} = u_{00}^{(j-1)} + u_{11}^{(j-1)}x + \big(u_{10}^{(j)} + u_{11}^{(j)}x\big)h = w_3^{(j-1)}x^3 + w_2^{(j-1)}x^2 + w_1^{(j-1)}x + w_0^{(j-1)},$$
$$V_{j-1} = f_{00} + f_{01}x + (v_{10}^{(j-1)} + v_{11}^{(j-1)}x)h + v_{20}^{(j-1)}h^2.$$

На шаге с номером j вычислим коэффициенты $b_0^{(j)}, \ldots, b_6^{(j)} \in \mathbb{Q}$ многочлена

$$\frac{f - V_{j-1}^2}{h} = b_6^{(j)}x^6 + \ldots + b_0^{(j)},$$

следующим образом:

$$\begin{gathered}
b_6^{(j)} = f_{40} - (v_4^{(j-1)})^2,\\
b_5^{(j)} = f_{31} - 2v_3^{(j-1)}v_4^{(j-1)},\\
b_4^{(j)} = f_{30} + 3f_{40}h_0 - 3h_0(v_4^{(j-1)})^2 - 2v_2^{(j-1)}v_4^{(j-1)} - (v_3^{(j-1)})^2,\\
b_3^{(j)} = -2f_{01}v_4^{(j-1)} + f_{21} + 2f_{31}h_0 - 4h_0v_3^{(j-1)}v_4^{(j-1)} - 2v_2^{(j-1)}v_3^{(j-1)},\\
b_2^{(j)} = -2f_{00}v_4^{(j-1)} + 2f_{01}f_{11} - 2f_{01}v_3^{(j-1)} + f_{20} + 2f_{30}h_0 + 3f_{40}h_0^2-\\
-3h_0^2(v_4^{(j-1)})^2 - 4h_0v_2^{(j-1)}v_4^{(j-1)} - h_0(v_3^{(j-1)})^2 - (v_2^{(j-1)})^2,\\
b_1^{(j)} = 2f_{00}f_{11} - 2f_{00}v_3^{(j-1)} + 2f_{01}f_{10} - 2f_{01}h_0v_4^{(j-1)} - 2f_{01}v_2^{(j-1)}+\\
+f_{21}h_0 + f_{31}h_0^2 - 2h_0^2v_3^{(j-1)}v_4^{(j-1)} - 2h_0v_2^{(j-1)}v_3^{(j-1)},\\
b_0^{(j)} = 2f_{00}f_{10} - 2f_{00}h_0v_4^{(j-1)} - 2f_{00}v_2^{(j-1)} + f_{20}h_0 + f_{30}h_0^2+\\
+f_{40}h_0^3 - h_0^3(v_4^{(j-1)})^2 - 2h_0^2v_2^{(j-1)}v_4^{(j-1)} - h_0(v_2^{(j-1)})^2.
\end{gathered}$$

Если $w_3^{(j-1)} \neq 0$, то вычислим

$$\begin{gathered}
w_3^{(j)} = b_6^{(j-1)}/w_3^{(j-1)},\\
w_2^{(j)} = \Big(b_5^{(j-1)}w_3^{(j-1)} - b_6^{(j-1)}w_2^{(j-1)}\Big)/(w_3^{(j-1)})^2,\\
w_1^{(j)} = \Big(b_4^{(j-1)}(w_3^{(j-1)})^2 - b_5^{(j-1)}w_2^{(j-1)}w_3^{(j-1)} - b_6^{(j-1)}w_1^{(j-1)}w_3^{(j-1)} + b_6^{(j-1)}(w_2^{(j-1)})^2\Big)/(w_3^{(j-1)})^3,\\
w_0^{(j)} = \Big(b_3^{(j-1)}(w_3^{(j-1)})^3 - b_4^{(j-1)}w_2^{(j-1)}(w_3^{(j-1)})^2 - b_5^{(j-1)}w_1^{(j-1)}(w_3^{(j-1)})^2 + b_5^{(j-1)}(w_2^{(j-1)})^2w_3^{(j-1)}-\\
-b_6^{(j-1)}w_0^{(j-1)}(w_3^{(j-1)})^2 + 2b_6^{(j-1)}w_1^{(j-1)}w_2^{(j-1)}w_3^{(j-1)} - b_6^{(j-1)}(w_2^{(j-1)})^3\Big)/(w_3^{(j-1)})^4.
\end{gathered}$$

Если $w_3^{(j-1)} = 0$, $w_2^{(j-1)} \neq 0$, то $b_6^{(j)} = 0$ и

$$w_3^{(j)} = b_5^{(j-1)}/w_2^{(j-1)},$$
$$w_2^{(j)} = \left(b_4^{(j-1)}w_2^{(j-1)} - b_5^{(j-1)}w_1^{(j-1)}\right)/(w_2^{(j-1)})^2,$$
$$w_1^{(j)} = \left(b_3^{(j-1)}(w_2^{(j-1)})^2 - b_4^{(j-1)}w_1^{(j-1)}w_2^{(j-1)} - b_5^{(j-1)}w_0^{(j-1)}w_2^{(j-1)} + b_5^{(j-1)}(w_1^{(j-1)})^2\right)/(w_2^{(j-1)})^3,$$
$$w_0^{(j)} = \Big(b_2^{(j-1)}(w_2^{(j-1)})^3 - b_3^{(j-1)}w_1^{(j-1)}(w_2^{(j-1)})^2 - b_4^{(j-1)}w_0^{(j-1)}(w_2^{(j-1)})^2 +$$
$$+ b_4^{(j-1)}(w_1^{(j-1)})^2w_2^{(j-1)} + 2b_5^{(j-1)}w_0^{(j-1)}w_1^{(j-1)}w_2^{(j-1)} - b_5^{(j-1)}(w_1^{(j-1)})^3\Big)/(w_2^{(j-1)})^4.$$

Если $w_3^{(j-1)} = w_2^{(j-1)} = 0$, то $b_6^{(j)} = b_5^{(j)} = 0$ и

$$w_3^{(j)} = b_4^{(j-1)}/w_1^{(j-1)},$$
$$w_2^{(j)} = \left(b_3^{(j-1)}w_1^{(j-1)} - b_4^{(j-1)}w_0^{(j-1)}\right)/(w_1^{(j-1)})^2,$$
$$w_1^{(j)} = \left(b_2^{(j-1)}(w_1^{(j-1)})^2 - b_3^{(j-1)}w_0^{(j-1)}w_1^{(j-1)} + b_4^{(j-1)}(w_0^{(j-1)})^2\right)/(w_1^{(j-1)})^3,$$
$$w_0^{(j)} = \Big(b_1^{(j-1)}(w_1^{(j-1)})^3 - b_2^{(j-1)}w_0^{(j-1)}(w_1^{(j-1)})^2 +$$
$$+ b_3^{(j-1)}(w_0^{(j-1)})^2w_1^{(j-1)} - b_4^{(j-1)}(w_0^{(j-1)})^3\Big)/(w_1^{(j-1)})^4.$$

Если $w_3^{(j-1)} = w_2^{(j-1)} = w_1^{(j-1)} = 0$, то $b_6^{(j)} = b_5^{(j)} = b_4^{(j)} = 0$ и

$$w_3^{(j)} = b_3^{(j-1)}/w_0^{(j-1)}, \quad w_2^{(j)} = b_2^{(j-1)}/w_0^{(j-1)},$$
$$w_1^{(j)} = b_1^{(j-1)}/w_0^{(j-1)}, \quad w_0^{(j)} = b_0^{(j-1)}/w_0^{(j-1)}.$$

Далее вычисляем

$$u_{00}^{(j)} = -h_0w_2^{(j)} + w_0^{(j)}, \quad u_{01}^{(j)} = -h_0w_3^{(j)} + w_1^{(j)},$$
$$u_{10}^{(j)} = w_2^{(j)}, \quad u_{11}^{(j)} = w_3^{(j)}.$$

Рассмотрим два случая: $u_{00}^{(j)} = u_{01}^{(j)} = 0$ и $u_{00}^{(j)} \cdot u_{01}^{(j)} \neq 0$.

Если $u_{00}^{(j)} = u_{01}^{(j)} = 0$, то при $u_{00}^{(j)} \neq 0$ вычислим

$$a_{01}^{(j)} = \frac{f_{01}u_{00}^{(j)} - f_{00}u_{01}^{(j)}}{h_0(u_{01}^{(j)})^2 + (u_{00}^{(j)})^2}, \quad a_{00}^{(j)} = \frac{f_{00} + a_1^{(j)}u_{01}^{(j)}h_0}{u_{00}^{(j)}},$$

а при $u_{00}^{(j)} = 0$ вычислим

$$a_{01}^{(j)} = -\frac{f_{00}}{h_0u_{01}^{(j)}}, \quad a_{00}^{(j)} = \frac{f_{01}}{u_{01}^{(j)}}.$$

Наконец вычисляем коэффициенты многочлена V_j:

$$v_{10}^{(j)} = a_{01}^{(j)}u_{01}^{(j)} + a_{00}^{(j)}u_{10}^{(j)} - h_0a_{01}^{(j)}u_{01}^{(j)} - v_{10}^{(j-1)},$$
$$v_{11}^{(j)} = a_{00}^{(j)}u_{11}^{(j)} + a_{01}^{(j)}u_{10}^{(j)} - v_{11}^{(j-1)},$$
$$v_{20}^{(j)} = a_{01}^{(j)}u_{11}^{(j)} - v_{20}^{(j-1)}.$$

Если $u_{00}^{(j)} \cdot u_{01}^{(j)} \neq 0$, то при $u_{00}^{(j)} \neq 0$ вычислим

$$a_{11}^{(j)} = \frac{f_{01}u_{00}^{(j)} - f_{00}u_{01}^{(j)}}{h_0(u_{01}^{(j)})^2 + (u_{00}^{(j)})^2}, \quad a_{10}^{(j)} = \frac{f_{00} + a_1^{(j)}u_{01}^{(j)}h_0}{u_{00}^{(j)}},$$

а при $u_{00}^{(j)} = 0$ вычислим

$$a_{11}^{(j)} = -\frac{f_{00}}{h_0 u_{01}^{(j)}}, \quad a_{10}^{(j)} = \frac{f_{01}}{u_{01}^{(j)}}.$$

Далее положим

$$r_0^{(j)} = f_{10} + v_{10}^{(j)} - a_{10}^{(j)}u_{10}^{(j)} - a_{11}^{(j)}u_{01}^{(j)} + a_{11}^{(j)}u_{11}^{(j)}h_0,$$
$$r_1^{(j)} = f_{11} + v_{11}^{(j)} - a_{11}^{(j)}u_{10}^{(j)} - a_{10}^{(j)}u_{11}^{(j)},$$

тогда

$$a_{00}^{(j)} = \frac{r_0^{(j)}u_{00}^{(j)} - r_1^{(j)}u_{01}^{(j)}h_0}{h_0(u_{01}^{(j)})^2 + (u_{00}^{(j)})^2}, \quad a_{01}^{(j)} = \frac{r_1^{(j)}u_{00}^{(j)} - r_0^{(j)}u_{01}^{(j)}}{h_0(u_{01}^{(j)})^2 + (u_{00}^{(j)})^2}.$$

Наконец вычисляем коэффициенты многочлена V_j:

$$v_{10}^{(j)} = a_{11}^{(j)}u_{11}^{(j)} + a_{00}^{(j)}u_{10}^{(j)} - h_0 a_{01}^{(j)}u_{11}^{(j)} - v_{10}^{(j-1)},$$
$$v_{11}^{(j)} = a_{00}^{(j)}u_{11}^{(j)} + a_{01}^{(j)}u_{10}^{(j)} - v_{11}^{(j-1)},$$
$$v_{20}^{(j)} = a_{01}^{(j)}u_{11}^{(j)} - v_{20}^{(j-1)}.$$

Далее, согласно алгоритму 1 повторяем вышеописанные операции до тех пор, пока на некотором шаге n не будет выполнено $U_n = U_0$ и $V_n = V_0$.

4. Заключение

В качестве заключения продемонстрируем полученные результаты на примерах, найденных с помощью алгоритма 1 для $g = 3$.

Пример 1. *Рассмотрим поле $K = \mathbb{Q}$, многочлены $h = x^2 + 2$ и*

$$f = x^7 + x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 4x + 4 =$$
$$= \left(x^2 + x + 2\right)\left(x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 2\right).$$

Нормирование v_h поля $\mathbb{Q}(x)$ имеет два неэквивалентных продолжения v_h^- и v_h^+ на поле $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$. Элемент $\sqrt{f}$ имеет следующее разложение в $\Sigma((h))$

$$\sqrt{f} = x + (1 - x) \cdot h + \ldots$$

Бесконечное нормирование поля $\mathbb{Q}(x)$ имеет единственное продолжение на поле L. Рассмотрим $D_0 = D_h + \infty$. Находим

$$U_0 = h, \quad V_0 = x + (1 - x) \cdot h + 0 \cdot h^2 = -x^3 + x^2 - x + 2.$$

Далее строим непрерывную дробь для элемента $\sqrt{f}/h$ *по нормированию* v_h^-*:*

$$\frac{\sqrt{f}}{h}=\Bigg[-\frac{1}{x^2+2}\left(x^3-x^2+x-2\right);\overline{-\frac{1}{x^2+2}\left(x^3+2x^2+2x+2\right),x,x,1,}$$
$$\overline{-2,1,x,x,-\frac{1}{x^2+2}\left(x^3+2x^2+2x+2\right),-\frac{2}{x^2+2}\left(x^3-x^2+x-2\right)}\Bigg].$$

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/h$ *периодическая, причем период симметричен, длина периода равна длине квазипериода и равна* 10. *Замечаем, что* $U_{10}=U_0$ *и* $V_{10}=V_0$*, поэтому справедливы условия теоремы 1 и, следовательно, в якобиане гиперэллиптического поля* L *класс дивизора* $\big(D_h-2\infty\big)$ *имеет порядок* $m=16$*, а класс дивизора* $\big(D_h-\iota D_h\big)$ *имеет порядок* $m/2=8$. *В поле* L *существует фундаментальная* S*-единица* u *степени* 16*, которую можно найти с помощью* (4)*:*

$$u=\mu_1-\mu_2\sqrt{f},\qquad u\cdot\overline{u}=h^{16}$$
$$\mu_1=x^{16}+18x^{15}+40x^{14}+140x^{13}+242x^{12}+426x^{11}+724x^{10}+664x^9+$$
$$+1408x^8+512x^7+1904x^6+32x^5+1760x^4-224x^3+1056x^2-96x+320,$$
$$\mu_2=6x^{12}+28x^{11}+38x^{10}+152x^9+56x^8+$$
$$+352x^7-32x^6+480x^5-160x^4+384x^3-192x^2+128x-96.$$

Также в поле L *существует фундаментальная* S_h*-единица* u_h *степени* 8, $u_h=u\cdot h^{-8}$.

Пример 2. *Рассмотрим поле* $K=\mathbb{Q}$*, многочлены* $h=x^2+1$ *и*

$$f=x^7+3x^5-3x^4+5x^3-3x^2+x=$$
$$=x\left(x^6+3x^4-3x^3+5x^2-3x+1\right).$$

Нормирование v_h *поля* $\mathbb{Q}(x)$ *имеет два неэквивалентных продолжения* v_h^- *и* v_h^+ *на поле* $L=\mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$. *Элемент* $\sqrt{f}$ *имеет следующее разложение в* $\Sigma((h))$

$$\sqrt{f}=(1-x)+x\cdot h+\ldots$$

Бесконечное нормирование поля $\mathbb{Q}(x)$ *имеет единственное продолжение на поле* L. *Рассмотрим* $D_0=D_h+\infty$. *Находим*

$$U_0=h,\quad V_0=(1-x)+x\cdot h+0\cdot h^2=x^3+1.$$

Далее строим непрерывную дробь для элемента $\sqrt{f}/h$ *по нормированию* v_h^-*:*

$$\frac{\sqrt{f}}{h}=\Bigg[\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x^2+1};\overline{-\frac{x^3-x^2+x+1}{x^2+1},x-1,-x-1,1,-2x,x,}$$
$$\overline{-\frac{2x\left(x^2-x+2\right)}{x^2+1},x,-2x,1,-x-1,x-1,}$$
$$\overline{-\frac{x^3-x^2+x+1}{x^2+1},\frac{2\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}{x^2+1}}\Bigg].$$

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/h$ *периодическая, причем период симметричен, длина периода равна длине квазипериода и равна* 14. *Замечаем, что* $U_{14}=U_0$ *и* $V_{14}=V_0$*, поэтому справедливы условия теоремы 1 и, следовательно, в якобиане гиперэллиптического поля* L *класс дивизора* $\big(D_h-2\infty\big)$ *имеет порядок* $m=22$*, а класс дивизора* $\big(D_h-\iota D_h\big)$ *имеет порядок*

$m/2 = 11$. В поле L существует фундаментальная S-единица и степени 22, которую можно найти с помощью (4):

$$u = \mu_1 - \mu_2\sqrt{f}, \qquad u \cdot \overline{u} = h^{22}$$
$$\mu_1 = (x+1)\left(x^{21} + 7x^{20} + 12x^{19} + 30x^{18} + 29x^{17} + 61x^{16} + \right.$$
$$+152x^{15} - 120x^{14} + 642x^{13} - 946x^{12} + 2048x^{11} - 2588x^{10} + 3026x^{9} - 2062x^{8} +$$
$$\left. +936x^{7} + 264x^{6} - 515x^{5} + 379x^{4} - 76x^{3} - 18x^{2} + 17x + 1\right),$$
$$\mu_2 = \left(2x^8 + 4x^7 + 8x^6 - 4x^5 + 20x^4 + 4x^3 + 12x + 2\right) \times$$
$$\times \left(2x^{10} + x^9 + 5x^8 - 2x^7 + 6x^6 + 8x^5 - 16x^4 + 18x^3 - 8x^2 - x + 3\right).$$

Также в поле L существует фундаментальная S_h-единица u_h степени 11, $u_h = u \cdot h^{-11}$.

Пример 3. *Рассмотрим поле $K = \mathbb{Q}$, многочлены $h = x^2 + 2$ и*

$$f = 2x^7 + x^6 + 6x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4 =$$
$$= \left(x^2+1\right)\left(2x^5 + x^4 + 4x^3 + 4\right).$$

Нормирование v_h поля $\mathbb{Q}(x)$ имеет два неэквивалентных продолжения v_h^- и v_h^+ на поле $L = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f})$. Элемент $\sqrt{f}$ имеет следующее разложение в $\Sigma((h))$

$$\sqrt{f} = 2x + (1-x)\cdot h + \ldots$$

Бесконечное нормирование поля $\mathbb{Q}(x)$ имеет единственное продолжение на поле L. Рассмотрим $D_0 = D_h + \infty$. Находим

$$U_0 = h, \quad V_0 = 2x + (1-x)\cdot h + 0 \cdot h^2 = -x^3 + x^2 + 2.$$

Далее строим непрерывную дробь для элемента $\sqrt{f}/h$ по нормированию v_h^-:

$$\frac{\sqrt{f}}{h} = \left[-\frac{x^3-x^2-2}{x^2+2}; \overline{-1, -2x, -\frac{x\left(x^2+2x+2\right)}{2\left(x^2+2\right)}, \frac{2x\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2}, \frac{x}{2}, 4,}\right.$$
$$\left.\overline{\frac{x^3-x^2-2}{2\left(x^2+2\right)}, 4, \frac{x}{2}, \frac{2x\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2}, -\frac{x\left(x^2+2x+2\right)}{2\left(x^2+2\right)}, -2x, -1, -\frac{2\left(x^3-x^2-2\right)}{x^2+2}}\right].$$

Непрерывная дробь элемента $\sqrt{f}/h$ периодическая, причем период симметричен, длина квазипериода равна 7, длина периода равна 14, коэффициент квазипериода $c = -1/4$ Замечаем, что $U_7 = U_0$ и $V_7 = V_0$, поэтому справедливы условия теоремы 1 и, следовательно, в якобиане гиперэллиптического поля L класс дивизора $\left(D_h - 2\infty\right)$ имеет порядок $m = 13$, класс дивизора $\left(D_h - \iota D_h\right)$ также имеет порядок 13. В поле L существует фундаментальная S-единица и степени 13, которую можно найти с помощью (4):

$$u = \mu_1 - \mu_2\sqrt{f}, \qquad u \cdot \overline{u} = h^{13}$$
$$\mu_1 = x^{13} + 16x^{12} + 45x^{11} + 149x^{10} + 220x^9 + 430x^8 +$$
$$+352x^7 + 584x^6 + 224x^5 + 528x^4 + 48x^3 + 336x^2 + 96,$$
$$\mu_2 = 4x^9 + 19x^8 + 48x^7 + 100x^6 + 112x^5 + 144x^4 + 64x^3 + 80x^2 + 16.$$

Также в поле L существует фундаментальная S_h-единица u_h степени 13.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abel N. H. Uber die Integration der Differential-Formel $\rho\ \mathrm{d}x/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind // J. Reine Angew. Math. 1826. №1. P. 185-221.

2. Chebychev P. L. Sur l'integration de la differential $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma}}\mathrm{d}x$ // J. Math. Pures Appl. 1864. Vol. 2, №9. P. 225-246.

3. Платонов В. П., Федоров Г. В. О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Матем. сб. 2018. Т. 209, №4. С. 54-94.

4. Платонов В. П. Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69, №1(415). С. 3-38.

5. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 474, №5. С. 540-544.

6. Платонов В. П., Федоров Г. В. О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 475, №2. С. 133-136.

7. Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В. Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и многочлены Мамфорда // ДАН. 2016. Т. 471, №6. С. 640-644.

8. Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П. Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Мат. сборник. 2009. Т. 200, №1. С. 15-44.

9. Петрунин М. М. О периодичности квадратных корней в гиперэллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 474, №2. С. 155-158.

10. Платонов В. П., Петрунин М. М. S-единицы и периодичность в квадратичных функциональных полях // УМН. 2016. Т. 71, №5. С. 181-182.

11. Платонов В. П., Петрунин М. М. S-единицы в гиперэллиптических полях и периодичность непрерывных дробей // ДАН. 2016. Т. 470, №3. С. 260-265.

12. Платонов В. П., Федоров Г. В., S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // ДАН. 2015. Т. 465, №5. С. 537-541.

13. Жгун В. С., Обобщенные якобианы и непрерывные дроби в гиперэллиптических полях // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, №4. С. 208-220.

14. Кузнецов Ю. В., Штейников Ю. Н., О некоторых свойствах непрерывных периодических дробей с небольшой длиной периода, связанных с гиперэллиптическими полями и S-единицами // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, №4. С. 260-267.

15. Петрунин М. М., Вычисление фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях рода 2 и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, №4. С. 250-283.

16. Мамфорд Д. Лекции о тета-функциях // Мир, Москва, 1988.

REFERENCES

1. Abel, N. H. 1826, "Uber die Integration der Differential-Formel $\rho\,\mathrm{d}x/\sqrt{R}$, wenn R und ρ ganze Functionen sind", *J. Reine Angew. Math.* no. 1, pp. 185-221.
2. Chebychev, P. L. 1864, "Sur l'integration de la differential $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma}}\mathrm{d}x$", *J. Math. Pures Appl.*, vol. 2, no. 9, pp. 225-246.
3. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2018, "On the problem of periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields", *Sb. Math.*, vol. 209, no. 4, pp. 519-559.
4. Platonov, V. P. 2014, "Number-theoretic properties of hyperelliptic fields and the torsion problem in Jacobians of hyperelliptic curves over the rational number field", *Russian Math. Surveys*, vol. 69, no. 1, pp. 1-34.
5. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2017, "On the periodicity of continued fractions in hyperelliptic fields", *Dokl. Math.*, vol. 95, no. 3, pp. 254-258.
6. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2017, "On the periodicity of continued fractions in elliptic fields", *Dokl. Math.*, vol. 96, no. 1, pp. 332-335.
7. Platonov, V. P., Zhgoon, V. S., Fedorov, G. V. 2016, "Continued Rational Fractions in Hyperelliptic Fields and the Mumford Representation", *Dokl. Math.*, vol. 94, no. 3, pp. 692-696.
8. Benyash-Krivets, V. V., Platonov, V. P. 2009, "Groups of S-units in hyperelliptic fields and continued fractions", *Sb. Math.*, vol. 200, no. 11, pp. 15871615.
9. Petrunin, M. M. 2017, О периодичности квадратных корней в гиперэллиптических полях // ДАН. 2017. Т. 474, №2. С. 155-158.
10. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2016, "S-Units and periodicity in quadratic function fields", *Russian Math. Surveys*, vol. 71, no. 5, pp. 973-975.
11. Platonov, V. P., Petrunin, M. M. 2016, "S-units in hyperelliptic fields and periodicity of continued fractions", *Dokl. Math.*, vol. 94, no. 2, pp. 532-537.
12. Platonov, V. P., Fedorov, G. V. 2015, "S-Units and Periodicity of Continued Fractions in Hyperelliptic Fields", *Dokl. Math.*, vol. 92, no. 3, pp. 752-756.
13. Zhgoon, V. S. 2017, "On generalized jacobians and retional continued fractions in the hyperelliptic fields", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 208-220. (In Russ.)
14. Kuznetsov, Y. V., Shteinikov, Y. N. 2017, "On some properties of continued periodic fractions with small length of period related with hyperelliptic fields and S-units", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 260-267. (In Russ.)
15. Petrunin, M. M. 2015, "Calculation of the fndamental S-units in hyperelliptic fields of genus 2 and the torsion problem in the jacobians of hyperelliptic curves", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, no. 4, pp. 250-283. (In Russ.)
16. Mumford, D. 1983, 1984, Tata Lectures on Theta I, II, *Progress in Mathematics*, vol. 28, 43.

Получено 06.09.2018
Принято к печати 15.10.2018