

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 3.

УДК 514.174.5

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-270-281

**О рациональных аналогах проблем Нелсона – Хадвигера
и Борсука¹**

Соколов Артемий Алексеевич — студент МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории чисел, г. Москва.

e-mail: sokolovartem179@yandex.ru.

Райгородский Андрей Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский физико-технический институт (государственный университет), кафедра дискретной математики и лаборатория продвинутой комбинаторики и сетевых приложений; МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра математической статистики и случайных процессов; Адыгейский государственный университет, Кавказский математический центр; Бурятский государственный университет, институт математики и информатики.

e-mail: mraigor@yandex.ru

Аннотация

В этой статье мы рассматриваем аффинно-рациональные аналоги задачи Нелсона–Хадвигера о нахождении хроматического числа рационального пространства и задачи Борсука о разбиении на части меньшего диаметра. Доказаны новые нижние оценки, в частности улучшены оценки минимального контрпримера для гипотезы Борсука.

Ключевые слова: хроматическое число, графы единичных расстояний, проблема Борсука.

Библиография: 38 названий.

Для цитирования:

А. А. Соколов, А. М. Райгородский. О рациональных аналогах проблем Нелсона — Хадвигера и Борсука // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 270–281.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 3.

UDC 514.174.5

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-270-281

On rational analogs of Nelson–Hadwiger’s and Borsuk’s problems²

Sokolov Artemy Alekseevich — student Moscow State University, Mechanics and Mathematics Faculty, Department of Number Theory, Moscow.

e-mail: sokolovartem179@yandex.ru.

¹Настоящая работа выполнена за счет гранта РФФИ (проект N 18-01-00355) и гранта президента НШ-6760.2018.1.

²This work by a grant of RFBR (project N 18-01-00355) and President grant NSH-6760.2018.1.

Raigorodskiy Andrew Mikhailovich — Doctor Phys-Math Sci., professor, Moscow Institute of Physics and Technology, Department of Discrete Mathematics and Laboratory of Advanced Combinatorics and Network Applications; Moscow State University, Mechanics and Mathematics Faculty, Department of Mathematical Statistics and Random Processes; Adyghe State University, Caucasus Mathematical Centre; Buryat State University, Institute of Mathematics and Informatics.
e-mail: mraigor@yandex.ru

Abstract

In this paper, we consider affine-rational analogs of Nelson–Hadwiger problem on finding the chromatic number of the rational space and Borsuk’s problem on partitioning into parts of smaller diameter. New lower bounds are proved. In particular, bounds on the minimum dimension of a counterexample to Borsuk’s conjecture are found.

Keywords: Chromatic number, unit-distance graphs, Borsuk’s problem.

Bibliography: 38 titles.

For citation:

A. A. Sokolov, A. M. Raigorodskiy, 2018, "On rational analogs of Nelson–Hadwiger’s and Borsuk’s problems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 270–281.

1. Введение

В 1950 году Э. Нелсон и Г. Хадвигер рассмотрели задачу о нахождении *хроматического числа* пространства $\mathbb{R}^n$ – минимального количества $\chi(\mathbb{R}^n)$ цветов, необходимого для такой покраски всех точек $\mathbb{R}^n$, чтобы никакие две точки одного цвета не находились на расстоянии 1. Точное значение $\chi(\mathbb{R}^n)$ найдено только при $n = 1$: $\chi(\mathbb{R}) = 2$. В остальных размерностях точных значений не известно, но известны различные оценки (см. [1]–[21]).

В 1976 году М. Бенда и М. Перлес определили аналогичным образом величину $\chi(\mathbb{Q}^n)$ и нашли её в размерностях 2, 3 и 4 (см. [22]). Различные оценки величины $\chi(\mathbb{Q}^n)$ можно найти в статьях [1], [20], [23]–[27].

Для удобства дальнейших рассуждений рассмотрим величину $\chi(A)$ – минимальное количество цветов, необходимое для покраски всех точек множества A , чтобы никакие точки одного цвета не находились на расстоянии 1.

В работе [28] было введено в некотором смысле промежуточное по отношению к $\chi(\mathbb{Q}^n)$ и $\chi(\mathbb{R}^n)$ *аффинное хроматическое число* рационального пространства $\chi_{\text{aff}}(\mathbb{Q}^n)$, определяемое следующим образом:

$$\chi_{\text{aff}}(\mathbb{Q}^n) = \max_m \max_{A \subset \mathbb{Q}^m, \text{affdim } A \leq n} \chi(A),$$

где $\text{affdim } A$ – размерность минимального аффинного пространства, содержащего A . Разница заключается в том, что рассматриваемые множества A лежат в некотором рациональном пространстве большей размерности, но “настоящая” размерность подпространства не превосходит n . Однако “внутренние” координаты в этом подпространстве уже не будут рациональными.

В работе [29] было введено следующее определение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Граф $G = (V, E)$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, называется $\sqrt{Q}$ -графом единичных расстояний, если для любых $x, y \in V$ имеет место $|x - y|^2 \in \mathbb{Q}$ и для любого ребра $(x, y) \in E$ выполняется $|x - y| = 1$.*

В статье [29] была доказана важная теорема, гласящая, что $\chi_{\text{aff}}(\mathbb{Q}^n) = \chi_{\sqrt{Q}}(\mathbb{R}^n)$, где

$$\chi_{\sqrt{Q}}(\mathbb{R}^n) = \max \left\{ \chi(G) : G - \sqrt{Q}\text{-граф единичных расстояний в } \mathbb{R}^n \right\}.$$

Также работа [29] мотивирует введение величины $\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^n)$, равной

$$\max \left\{ \chi(G) : G - \sqrt{Q}\text{-граф единичных расстояний в } \mathbb{R}^n \text{ и } K_{n+1} \subseteq G \right\},$$

где K_{n+1} – полный граф на $n+1$ вершинах, т.е. полноразмерный правильный симплекс в $\mathbb{R}^n$.

В статье [29] было доказано, что $\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^2) = 3$, $\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^3) = 4$, и выдвинута гипотеза, что $\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^n) = n+1$. Но, как и следовало ожидать в подобной ситуации, гипотеза не подтвердилась.

Более того, имеет место серия результатов, которые мы сформулируем и докажем в разделе 2.

Еще одна классическая проблема комбинаторной геометрии, тесно связанная с задачами о хроматических числах пространств, – это проблема Борсука о разделении множеств на части меньшего диаметра.

Обозначим $b(n)$ минимальное число частей меньшего диаметра, на которые разбивается любое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Классическая гипотеза Борсука заключается в том, что $b(n) = n+1$. На данный момент известно, что гипотеза верна при $n \leq 3$ и неверна при $n \geq 64$ (см. [1], [4], [8], [10], [11], [30]–[33]).

В настоящей работе мы рассмотрим следующий аналог числа Борсука:

$$f(n) = \max_{A \subset \mathbb{R}^n, \text{diam } A=1} \chi(A).$$

Отметим, что величина $f(n)$ может не равняться $b(n)$, т.к. разбить множество на части меньшего диаметра – это, вообще говоря, не то же самое, что раскрасить его точки без нахождения точек одного цвета на расстоянии 1: для конечных множеств A это верно, но, например, даже для сферы $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ величина $\chi(S^n)$ равна 2, тогда как частей меньшего диаметра нужно $n+2$.

Правильным аналогом величины $f(n)$ в рациональном случае послужит величина

$$g(n) = \max_{A \subset \mathbb{Q}^n, \text{diam } A=1} \chi(A).$$

Наконец, по аналогии с хроматическим числом, введем *аффинно-рациональное* число Борсука, которое равно

$$h(n) = \max_m \max_{A \subset \mathbb{Q}^m, \text{diam } A=1, \text{affdim } A \leq n} \chi(A).$$

Аффинно-рациональный аналог гипотезы Борсука заключается в том, что $h(n) = n+1$. Но, как и следовало ожидать по аналогии с вещественным случаем, гипотеза неверна. В статье [34] доказано, что она неверна при $n \in [561, 757] \cup [903, \infty)$.

В разделе 3 мы сначала объясним, как убрать “зазор” между 757 и 903, а потом докажем, что эта гипотеза неверна во всех размерностях, начиная с 65.

2. Аффинное хроматическое число $\mathbb{Q}^n$

В этом разделе мы опровергнем гипотезу, что $\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^n) = n+1$.

На самом деле, верна следующая теорема

ТЕОРЕМА 1. $\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^n) \geq \chi(\mathbb{Q}^{\omega(n)-1})$, где $\omega(n)$ – наибольшее количество точек в $\mathbb{Q}^n$, образующих симплекс со стороной 1. Если выполнено условие, что $\omega(n) = n+1$, то $\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathbb{Q}^n)$.

Выпишем для небольших n значения $\omega(n)$ и $\chi(\mathbb{Q}^n)$ (см. [35], [36]).

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\omega(n)$	2	2	2	4	4	6	8	9
$\chi(\mathbb{Q}^n)$	2	2	2	4	≥ 8	≥ 8	≥ 9	≥ 10

Из этого выводим, что

$$\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^6) \geq \chi(\mathbb{Q}^{6-1}) \geq 8,$$

в связи с чем получаем противоречие с гипотезой. Как мы упоминали ранее, в статье [29] доказано, что $\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^2) = 3$ и $\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^3) = 4$. Вопрос, верна ли гипотеза в размерностях 4 и 5, все еще остается открытым.

Поскольку $\omega(n) \geq n-2$, то при устремлении n к бесконечности получим, что (см. [25], [26])

$$\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^n) \geq \chi(\mathbb{Q}^{n-3}) \geq (1.199 + o(1))^n.$$

Но поскольку существует бесконечно большая последовательность $\{n_k\}$ такая, что $\omega(n_k) = n_k + 1$, то при бесконечном количестве n верно, что $\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathbb{Q}^n)$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая лемма

ЛЕММА 1 (Соколов, [29]). Пусть G — $\sqrt{Q}$ -граф в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\text{affdim } G = n$. Выберем в нем множество вершин $v_0, v_1, \dots, v_n \in G$ общего положения. Тогда для любой вершины $x \in G$ верно, что $\overrightarrow{v_0x} = \lambda_1 \overrightarrow{v_0v_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{v_0v_n}$, где $\lambda_i \in \mathbb{Q}$.

Также нам понадобится “обратная” лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $v_0, v_1, \dots, v_n$ — точки общего положения в $\mathbb{R}^n$, образующие $\sqrt{Q}$ -граф. Пусть для каждой вершины x графа $G = (V, E)$, $V \subset \mathbb{R}^n$ верно, что $\overrightarrow{v_0x} = \lambda_1 \overrightarrow{v_0v_1} + \dots + \lambda_n \overrightarrow{v_0v_n}$, где $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. Тогда G является $\sqrt{Q}$ -графом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала заметим, что для любых $1 \leq i, j \leq n$ выполнено

$$(\overrightarrow{v_0v_i}, \overrightarrow{v_0v_j}) = \frac{|v_0 - v_i|^2 + |v_0 - v_j|^2 - |v_i - v_j|^2}{2} \in \mathbb{Q}.$$

Также для любых $x, y \in G$ выполнено

$$(\overrightarrow{v_0x}, \overrightarrow{v_0y}) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{v_0v_i}, \sum_{j=1}^n \mu_j \overrightarrow{v_0v_j} \right) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j (\overrightarrow{v_0v_i}, \overrightarrow{v_0v_j}) \in \mathbb{Q}.$$

Наконец, для любых $x, y \in G$ верно $|x - y|^2 = |v_0 - x|^2 + |v_0 - y|^2 - 2(\overrightarrow{v_0x}, \overrightarrow{v_0y}) \in \mathbb{Q}$, что и означает, что G является $\sqrt{Q}$ -графом. $\square$

Теперь докажем теорему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 1]

Рассмотрим полноразмерный симплекс S со стороной 1 в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\omega(n)$ его вершин рациональны. Обозначим через T симплекс, образованный этими рациональными вершинами. Пусть V — рациональное подпространство размерности $\omega(n) - 1$, содержащее T . Несложно видеть, что V изоморфно $\mathbb{Q}^{\omega(n)-1}$. Рассмотрим рациональный дистанционный граф $G \subset V$ такой, что $\chi(G) = \chi(\mathbb{Q}^{\omega(n)-1})$, его существование нам гарантирует теорема Эрдеша — Де Брёйна (см. [38]). Рассмотрим граф $H = G \cup S$. Каждая его вершина рационально выражается через вершины симплекса S , а значит, по лемме 2, он является $\sqrt{Q}$ -графом. Тогда

$$\chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^n) \geq \chi(H) \geq \chi(G) = \chi(\mathbb{Q}^{\omega(n)-1}).$$

Докажем теперь вторую часть утверждения теоремы. Пусть натуральное число n таково, что $\omega(n) = n + 1$. Рассмотрим граф G такой, что $\chi(G) = \chi_{\sqrt{Q},\Delta}(\mathbb{R}^n)$, пусть также S — полноразмерный симплекс, содержащийся в G . Расположим граф G таким образом, чтобы вершины

симплекса S стали рациональными. Заметим, что по лемме 1 все вершины графа G также будут рациональными. Таким образом, G – дистанционный граф в $\mathbb{Q}^n$. Тогда

$$\chi(\mathbb{Q}^n) \geq \chi(G) = \chi_{\sqrt{Q}, \Delta}(\mathbb{R}^n).$$

Обратное неравенство следует из первой части теоремы. $\square$

3. Аффинно-рациональная проблема Борсука

3.1. Формулировки результатов

В этом разделе мы будем строить контрпримеры к аффинно-рациональной гипотезе Борсука.

В параграфе 3.2 мы рассмотрим конструкцию из статьи [34], дающую контрпримеры к гипотезе в размерностях $n \in [561, 757]$. Далее мы научимся “поднимать” контрпримеры в большую размерность, что позволит опровергнуть аффинно-рациональную гипотезу Борсука для всех $n \geq 561$.

В параграфе 3.3 мы рассмотрим конструкцию из статьи [37] и адаптируем ее для аффинно-рационального случая, что в свою очередь позволит доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Аффинно-рациональная гипотеза Борсука неверна во всех размерностях, начиная с 65.*

Предварительно введем следующие обозначения: $X_{m,r} = \mathbb{Q}^m \cap S_r^{m-1}$, $X_m = X_{m,1}$, где $S_r^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ – сфера радиуса r с центром в нуле.

3.2. Контрпримеры при $n \geq 561$

В статье [34] было доказано, что аффинно-рациональная гипотеза Борсука неверна в размерностях $n \in [561, 757] \cup [903, \infty)$. В данном параграфе мы научимся в некоторых случаях “поднимать” контрпримеры к гипотезе Борсука в большую размерность, что позволит убрать “зазор” и опровергнуть гипотезу во всех размерностях, начиная с 561.

Для удобства введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть A – некоторое множество точек евклидова пространства. Будем говорить, что множество A аффинно-рационально лежит на сфере радиуса r при некотором $r \in \sqrt{\mathbb{Q}}$, если существует такое $n \geq 1$, что в множестве $X_{n,r}$ найдется подмножество, конгруэнтное A .

Справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 3. Пусть множество A дает контрпример к аффинно-рациональной гипотезе Борсука в размерности n , причем A аффинно-рационально лежит на сфере радиуса r при $r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда можно построить множество, дающее контрпример в любой большей размерности.

Докажем сперва следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть множество A аффинно-рационально лежит на сфере радиуса r_0 . Тогда для любого $r \in \sqrt{\mathbb{Q}}$, $r > r_0$ верно, что A аффинно-рационально лежит на сфере радиуса r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку число $r^2 - r_0^2$ положительно и рационально, то по теореме Лагранжа его можно представить в виде $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$, где $a_i \in \mathbb{Q}$. Без ограничения общности можно считать, что $A \subset X_{n,r_0}$ при некотором $n \geq 1$. Рассмотрим множество

$$A' = A \times \{(a_1, a_2, a_3, a_4)\} \subset \mathbb{Q}^{n+4}.$$

Заметим, что множества A и A' конгруэнтны, однако множество A' лежит на сфере радиуса

$$\sqrt{r_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} = \sqrt{r^2} = r.$$

□

Теперь научимся “поднимать” контрпримеры к гипотезе Борсука в аффинно-рациональном случае, для этого докажем теорему 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 3] Поскольку A аффинно-рационально лежит на сфере радиуса не больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$, то по лемме 3 оно аффинно-рационально лежит и на сфере радиуса ровно $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Итак, без ограничения общности можно считать, что $A \subset X_{N, \frac{1}{\sqrt{2}}}$ при некотором $N \geq 1$. Пусть мы хотим построить контрпример в аффинной размерности $n + k$. Рассмотрим $\mathbb{Q}^{N+2k}$, и, используя только первые N координат, поместим туда множество A . Далее, используя только последние $2k$ координат рассмотрим точки вида

$$y_i = \left(0 \dots 0, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right),$$

где ненулевые координаты стоят на местах $N + 2i - 1$ и $N + 2i$ соответственно. Заметим, что множество $A \cup \{y_i\}_{i=1}^k$ также лежит на сфере радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$, и его нельзя разбить на $n + k$ частей меньшего диаметра, таким образом, оно дает контрпример к аффинно-рациональной гипотезе Борсука в размерности $n + k$.

□

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле, если мы хотим поднять контрпример в размерность именно $n + k$, то достаточно, чтобы радиус изначального контрпримера был не больше, чем

$$\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{k-1}{2k}}\right)^2} = \sqrt{\frac{k+1}{2k}},$$

что немного больше, чем $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Заметим, что множество, полученное в статье [34], подходит под условие теоремы, откуда следует, что аффинно-рациональная гипотеза Борсука неверна для всех размерностей, больших 560.

3.3. Контрпримеры при $n \in [65, 560]$

Теперь построим контрпримеры в размерностях от 65 до 560. Для этого воспользуемся конструкцией из статьи [37], которая тесно связана с понятием *сильно регулярного графа*. Далее мы покажем, как именно эта конструкция применима к нашей задаче.

3.3.1. Описание конструкции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Граф $G = (V, E)$ называется *сильно регулярным с параметрами* (n, d, λ, μ) , если

- (i). $|V| = n$
- (ii). для любого $v \in V : \deg v = d$
- (iii). если $(u, v) \in E : |\{w \in V : (u, w) \in E \text{ и } (w, v) \in E\}| = \lambda$
- (iv). если $(u, v) \notin E : |\{w \in V : (u, w) \in E \text{ и } (w, v) \in E\}| = \mu$

Как известно, собственные числа матрицы смежности A графа G выглядят следующим образом:

- d с кратностью 1
- $r = \frac{1}{2} \left(\lambda - \mu + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(d - \mu)} \right)$ с кратностью $f = \frac{1}{2} \left(n - 1 - \frac{2d + (n-1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(d - \mu)}} \right)$
- $s = \frac{1}{2} \left(\lambda - \mu - \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(d - \mu)} \right)$ с кратностью $g = \frac{1}{2} \left(n - 1 + \frac{2d + (n-1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(d - \mu)}} \right)$

Обозначим через y_i векторы-столбцы матрицы $A - sE$. Через x_i , в свою очередь, обозначим отнормированные и центрированные векторы y_i , т.е. x_i коллинеарен y_i , $\|x_i\| = 1$ и $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Заметим, что все векторы x_i лежат на единичной сфере в подпространстве размерности не более f .

Также можно заметить, что

$$(x_i, x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ p, & (i, j) \in E \\ q, & (i, j) \notin E \end{cases}$$

где

$$p = \frac{\lambda - 2s - \beta}{s^2 + d - \beta}; \quad q = \frac{\mu - \beta}{s^2 + d - \beta}; \quad \beta = \frac{1}{n}(s^2 + d + d(\lambda - 2s) + (n - d - 1)\mu)$$

Таким образом, полученные векторы образуют на сфере множество с двумя расстояниями.

3.3.2. Применение конструкции.

Рассмотрим сильно регулярный граф $G = G_2(4)$ с параметрами $(n = 416, d = 100, \lambda = 36, \mu = 20)$.

Для этого графа описанные величины равны

$$\begin{aligned} r &= 20; & s &= -4 \\ f &= 65; & g &= 350 \\ p &= \frac{1}{5}; & q &= -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

Таким образом, векторы y_i имеют рациональные координаты, а значит квадраты координат векторов x_i тоже рациональны. Используя рассуждения с теоремой Лагранжа из предыдущего раздела заметим, что полученное множество аффинно-рационально лежит на сфере радиуса 1. При этом оно все так же лежит в подпространстве размерности не более f .

Наконец, докажем теорему 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 2] Построенное множество образует граф с двумя расстояниями, причем наибольшее из них равно $\sqrt{2-2q} = \sqrt{\frac{32}{15}}$, и оно достигается, когда соответствующие вершины не связаны ребром. Снова отнормируем векторы так, чтобы диаметр стал равным 1. Тогда радиус сферы станет равным $\sqrt{\frac{15}{32}} < \sqrt{\frac{1}{2}}$. Заметим, что данное множество нельзя разбить менее, чем на $\frac{n}{\omega(G)}$, где $\omega(G)$ – кликовое число графа G . Известно, что $\omega(G_2(4)) \leq 5$, поэтому $h(65) = h(f) \geq \frac{n}{\omega(G_2(4))} \geq \frac{416}{5} > 83 > 66$.

Затем, поднимая контрпримеры так же, как и в лемме 3, получим, что аффинно-рациональный аналог гипотезы Борсука не верен при $n \geq 65$. $\square$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. A.M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters*, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer, 2013, 429 - 460.
2. P.K. Agarwal, J. Pach, *Combinatorial geometry*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1995.
3. V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Math. Association of America, 1991.
4. P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, 2005.
5. L.A. Székely, *Erdős on unit distances and the Szemerédi – Trotter theorems*, Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer, 11 (2002), 649 - 666.
6. A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book*, Springer, 2009.
7. A. de Grey, *The chromatic number of the plane is at least 5*, arXiv:1804.02385, April 2018.
8. А.М. Райгородский, *Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств*, Успехи матем. наук, 56 (2001), N1, 107 - 146.
9. А.М. Райгородский, *Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов*, Матем. сборник, 196 (2005), N1, 123 - 156.
10. A.M. Raigorodskii, *Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters*, “Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics”, AMS, Contemporary Mathematics, 625 (2014), 93 - 109.
11. A.M. Raigorodskii, *Combinatorial geometry and coding theory*, Fundamenta Informatica, 145 (2016), 359 - 369.
12. Л.И. Боголюбский, А.М. Райгородский, *Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками l_1 и l_2* , подано в Матем. заметки.
13. Д.А. Захаров, А.М. Райгородский, *Клико-хроматические числа графов пересечений*, Матем. заметки, 105 (2019), N1, 142–144.
14. А.М. Райгородский, Е.Д. Шишунов, *О числах независимости некоторых дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$* , Доклады РАН, 485 (2019), N3.
15. О. А. Костина, *“О нижних оценках хроматического числа сферы”*, Матем. заметки, 105:1 (2019), 18–31

16. Ф. А. Пушняков, “О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов”, Матем. заметки, 105:4 (2019), 592–602
17. Ю. А. Демидович, “Дистанционные графы в рациональном пространстве с большим хроматическим числом и без клик заданного размера”, Матем. заметки, 106:1 (2019), 24–39
18. A.M. Raigorodskii, A.B. Kupavskii, *On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 34 (2009), 435 - 439.
19. А.Я. Канель-Белов, В.А. Воронов, Д.Д. Черкашин, *О хроматическом числе плоскости*, Алгебра и анализ, том 29, выпуск 5, страницы 68–89.
20. Д.Д. Черкашин, А.М. Райгородский, *О хроматических числах пространств малой размерности*, Доклады РАН, 472 (2017), N1, 11 - 12.
21. D. Cherkashin, A. Kulikov, A. Raigorodskii, *On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces*, Discrete and Applied Math., 243 (2018), 125 - 131.
22. M. Benda, M. Perles, *Colorings of metric spaces*, Geombinatorics, 9 (2000), 113 - 126.
23. А.М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства с l_q -нормой*, Успехи мат. наук, 59 (2004), N5, 161 - 162.
24. А.М. Райгородский, И.М. Шитова, *О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями*, Матем. сборник, 199 (2008), N4, 107 - 142.
25. Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства*, Успехи матем. наук, 68 (2013), N5, 183 - 184.
26. Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства с одним и двумя запрещенными расстояниями*, Матем. заметки, 97 (2015), N2, 84 - 89.
27. Ю.А. Демидович, *Нижняя оценка хроматического числа рационального пространства с метрикой l_q с одним запрещенным расстоянием*, Матем. заметки, 102 (2017), N4, 532 - 548.
28. Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства $\mathbb{Q}^n$* , Труды МФТИ, 4 (2012), N1, 127 - 130.
29. А. А. Соколов, *О хроматических числах рациональных пространств*, Матем. заметки, 103:1 (2018), 120–128.
30. V.G. Boltyanski, H. Martini, P.S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer, Berlin, 1997.
31. A.M. Raigorodskii, *Around Borsuk's conjecture*, J. of Math. Sci., 154 (2008), N4, 604 - 623.
32. A.M. Raigorodskii, *Three lectures on the Borsuk partition problem*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 347 (2007), 202 - 248.
33. А.М. Райгородский, *Проблемы Борсука и Грюнбаума для решетчатых многогранников*, Известия РАН, 69 (2005), N3, 81 - 108.

34. А.Б. Купавский, Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, *О некоторых аналогах проблемы Борсука в пространстве $\mathbb{Q}^n$* , Труды МФТИ, 4 (2012), N1, 81 - 90.
35. K.B. Chilakamarri, *Unit-distance graphs in rational n -spaces*, Discrete Math. 69 (1988), 213 - 218.
36. C. Elsholtz, W. Klotz, *Maximal Dimension of Unit Simplices*, Discrete Comput Geom, 34 (2005), 167 - 177.
37. A. Bondarenko, *On Borsuk's Conjecture for Two-Distance Sets*, Discrete Comput Geom, 51 (2014), 509 - 515.
38. N.G. de Bruijn, P. Erdős, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet., Ser. A, 54 (1951), N5, 371 - 373.

REFERENCES

1. A.M. Raigorodskii, *Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters*, Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer, 2013, 429 - 460.
2. P.K. Agarwal, J. Pach, *Combinatorial geometry*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1995.
3. V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Math. Association of America, 1991.
4. P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, 2005.
5. L.A. Székely, *Erdős on unit distances and the Szemerédi – Trotter theorems*, Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer, 11 (2002), 649 - 666.
6. A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book*, Springer, 2009.
7. A. de Grey, *The chromatic number of the plane is at least 5*, arXiv:1804.02385, April 2018.
8. A.M. Raigorodskii, *The Borsuk problem and the chromatic numbers of some metric spaces*, Russian Math. Surveys, 56 (2001), N1, 103 - 139.
9. A.M. Raigorodskii, *The Erdős–Hadwiger problem and the chromatic numbers of finite geometric graphs*, Sbornik Math., 196 (2005), N1, 115 - 146.
10. A.M. Raigorodskii, *Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters*, “Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics”, AMS, Contemporary Mathematics, 625 (2014), 93 - 109.
11. A.M. Raigorodskii, *Combinatorial geometry and coding theory*, Fundamenta Informatica, 145 (2016), 359 - 369.
12. L.I. Bogoliubsky, A.M. Raigorodskii, *A Remark on Lower Bounds for the Chromatic Numbers of Spaces of Small Dimension with Metrics l_1, l_2* , Math. Notes., 105 (2019), N2, 180 - 203.
13. D.A. Zakharov, A.M. Raigorodskii, *Clique-chromatic numbers of graphs of intersections*, Math. Notes., 105 (2019), N1, 137 - 139.
14. E.A. Shishunov, A.M. Raigorodskii, *On the independence numbers of some distance graphs with vertices in $\{-1, 0, 1\}^n$* , Doklady Math., 99 (2019), N2, 165 - 166.

15. O. A. Kostina, “On Lower Bounds for the Chromatic Number of Spheres”, *Math. Notes*, 105:1 (2019), 16–27
16. F.A. Pushnyakov, "On the number of edges in induced subgraphs of some distance graphs *Math. Notes*, 105:4 (2019).
17. Yu. A. Demidovich, *Distance graphs in rational spaces with large chromatic number and without cliques of given size*, *Math. Notes*, 106:1 (2019).
18. A.M. Raigorodskii, A.B. Kupavskii, On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 34 (2009), 435 - 439.
19. A. Ya. Kanel-Belov, V. A. Voronov, D. D. Cherkashin, “On the chromatic number of infinitesimal plane layer”, *St. Petersburg Math. J.*, 29:5 (2018), 761–775.
20. D.D. Cherkashin, A.M. Raigorodskii, *On the chromatic numbers of small-dimensional spaces*, *Doklady Math.*, 95 (2017), N1, 5 - 6.
21. D. Cherkashin, A. Kulikov, A. Raigorodskii, On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces, *Discrete and Applied Math.*, 243 (2018), 125 - 131.
22. M. Benda, M. Perles, Colorings of metric spaces, *Geombinatorics*, 9 (2000), 113 - 126.
23. A.M. Raigorodskii, *On the chromatic number of a space with l_q -norm*, *Russian Math. Surveys*, 59 (2004), N5, 973 - 975.
24. A.M. Raigorodskii, I.M. Shitova, *On the chromatic numbers of real and rational spaces with several real or rational forbidden distances*, *Sbornik Math.*, 199 (2008), N4, 579 - 612.
25. E.I. Ponomarenko, A.M. Raigorodskii, *New lower bound on the chromatic number of the rational space*, *Russian Math. Surveys*, 68 (2013), N5, 960 - 962.
26. E.I. Ponomarenko, A.M. Raigorodskii, *New lower bound on the chromatic number of the rational space with one or two forbidden distances*, *Math. Notes*, 97 (2015), N2, 255 - 261.
27. Yu. A. Demidovich, “Lower Bound for the Chromatic Number of a Rational Space with Metric l_1 and with One Forbidden Distance”, *Math. Notes*, 102:4 (2017), 492–507.
28. E.I. Ponomarenko, A.M. Raigorodskii, *On the chromatic number of the space $\mathbb{Q}^n$* , *Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*, 4 (2012), N1, 127 - 130.
29. A. Sokolov, “On the Chromatic Numbers of Rational Spaces”, *Math. Notes*, 103:1-2 (2018), 111–117.
30. V.G. Boltyanski, H. Martini, P.S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer, Berlin, 1997.
31. A.M. Raigorodskii, *Around Borsuk’s conjecture*, *J. of Math. Sci.*, 154 (2008), N4, 604 - 623.
32. A.M. Raigorodskii, *Three lectures on the Borsuk partition problem*, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, 347 (2007), 202 - 248.
33. A.M. Raigorodskii, *The Borsuk and Grünbaum problems for lattice polytopes*, *Izvestiya Math.*, 69 (2005), N3, 513 - 537.

-
34. A.M. Raigorodskii, A.B. Kupavskii, E.I. Ponomarenko, *On some analogs of Borsuk's problem in the space $\mathbb{Q}^n$* , Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology, 4 (2012), N1, 81 - 90.
 35. K.B. Chilakamarri, *Unit-distance graphs in rational n -spaces*, Discrete Math. 69 (1988), 213 - 218.
 36. C. Elsholtz, W Klotz, *Maximal Dimension of Unit Simplices*, Discrete Comput Geom, 34 (2005), 167 - 177.
 37. A. Bondarenko, *On Borsuk's Conjecture for Two-Distance Sets*, Discrete Comput Geom, 51 (2014), 509 - 515.
 38. N.G. de Bruijn, P. Erdős, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet., Ser. A, 54 (1951), N5, 371 - 373.

Получено 29.07.2018

Принято к печати 15.10.2018