ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 3.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-241-256

Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками

Михляева Анна Владимировна — аспирант кафедры алгебры и дискретной математики, Оренбургского государственного университета, г. Оренбург.
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Аннотация

Данная работа посвящена вопросам приближения квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками.

Даётся общая постановка вопроса о приближении алгебраических решёток и соответствующих сеток целочисленными решётками и рациональными сетками.

В случае простого p вида $p = 4k+3$ или $p = 2$ рассматривается целочисленная решётка, заданная m-й подходящей дробью к числу $\sqrt{p}$. В явном виде выписана соответствующая алгебраическая решётка и обобщённая параллелепипедальная сетка.

Для определения качества соответствующей обобщённой параллелепипедальной сетки определена функция качества, которая для своего вычисления требует $O(N)$ арифметических операций, где N — количество точек сетки. Центральным результатом является алгоритм вычисления функции качества за $O\left(\sqrt{N}\right)$ арифметических операций.

Сформулирована гипотеза о существовании алгоритма, требующего $O(\ln N)$ арифметических операций. Намечен подход для вычисления сумм с целыми частями линейных функций.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

Библиография: 27 названий.

Для цитирования:
А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 241–256.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 3.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-241-256

Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets

Mikhlyaeva Anna Vladimirovna — Postgraduate Student, Department of Algebra and discrete mathematics, Orenburg state University, Orenburg.
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Abstract

This paper is devoted to the approximation of quadratic algebraic lattices and grids by integer lattices and rational grids.

A General formulation of the problem of approximation of algebraic lattices and corresponding meshes by integer lattices and rational meshes is given.

In the case of a simple p of the form $p = 4k + 3$ or $p = 2$, we consider an integer lattice given $m$by a suitable fraction to the number $\sqrt{p}$. The corresponding algebraic lattice and the generalized parallelepipedal grid are written out explicitly.

To determine the quality of the corresponding generalized parallelepipedal grid, a quality function is defined, which requires $O(N)$ arithmetic operations for its calculation, where N — is the number of grid points. The Central result is an algorithm for computing a quality function for $O\left(\sqrt{N}\right)$ arithmetic operations.

We hypothesize the existence of an algorithm that requires $O(\ln N)$ arithmetic operations. An approach for calculating sums with integral parts of linear functions is outlined.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

Bibliography: 27 titles.

For citation:
A. V. Mikhlyaeva, 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.

1. Введение

Алгебраические решётки и соответствующие алгебраические сетки вошли в науку, как новое самостоятельное направление в теоретико-числовом методе в приближённом анализе, в 1976 году в работах К. К. Фролова [25], [26]. Главное их достоинство заключается в том, что на них достигается правильный порядок погрешности приближенного интегрирования на классах Коробова [20], [27] и правильный порядок гиперболической дзета-функции решёток [12], [13].

К недостаткам квадратурных формул с алгебраическими сетками относится то, что это квадратурные формулы с весами, причём достаточно сложными. При оценке погрешности приближенного интегрирования возникают большие величины констант, которые трудно оценить. В результате применение таких квадратурных формул на практике весьма проблематично.

В связи с этим возникает вопрос о приближении алгебраических сеток рациональными. Так как рациональные параллелепипедальные сетки дают квадратурные формулы с равными весами только в случае, если они образованы точками решётки, взаимной к целочисленной решётке, то возникает проблема приближения алгебраической решётки целочисленной решёткой.

Пусть у нас есть алгебраическая решётка $\Lambda(t, F) = t\Lambda(F)$, где $\Lambda(F)$ — решётка, состоящая из точек $(\Theta^{(1)}, \ldots, \Theta^{(s)})$, образующих полный набор алгебраически сопряжённых чисел, и $\Theta = \Theta^{(1)}$ пробегает кольцо целых алгебраических чисел чисто вещественного алгебраического поля F. Вопрос о приближении алгебраической решётки $\Lambda(t, F)$ целочисленной решёткой $\Lambda(t)$ можно ставить так:

Найти целочисленную решётку $\Lambda(t)$ такую, что расстояние $\rho(\Lambda(t), \Lambda(t, F))$ минимальное для заданного натурального t.

Теория гиперболической дзета-функции решёток показывает, что наиболее важны те решётки Λ, для которых отношение гиперболического параметра решётки $q(\Lambda)$ к $\det \Lambda$ наибольшее. Определение гиперболического параметра смотри ниже на стр. 246.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор

$$\{\vec{x}\}=(\{x_1\},\ldots,\{x_s\}).$$

Далее везде под произвольной решёткой $\Lambda\subset\mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решётки, то есть

$$\Lambda=\{m_1\vec{\lambda}_1+\ldots+m_s\vec{\lambda}_s=\vec{m}\cdot A\,|\vec{m}=(m_1,\ldots,m_s)\in\mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1=(\lambda_{1\,1},\ldots,\lambda_{1\,s})$,...,$\vec{\lambda}_s=(\lambda_{s\,1},\ldots,\lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{\lambda}_1\\ \vdots\\ \vec{\lambda}_s\end{pmatrix}.$$

Взаимная решётка $\Lambda^*=\{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y}\in\Lambda\ (\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^*=\dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решётки Λ обобщённой параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda)=\Lambda^*\cap G_s$, где $G_s=[0;1)^s$.*

Сетка $M_1(\Lambda)=\Lambda^*\cap[-1;1)^s$.

Обобщённой параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda)=\{\vec{x}\,|\,\vec{x}=\{\vec{y}\},\vec{y}\in M_1(\Lambda)\}.$$

Пусть $\vec{a}=(a_0,a_1,\ldots,a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x)=\sum_{\nu=0}^{s-1}a_\nu x^\nu+x^s \tag{1}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни $\Theta_\nu\,(\nu=1,\ldots,s)$ многочлена (1) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряжённых целых алгебраических чисел Θ_1,...,Θ_s — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a})=\begin{pmatrix}1 & \ldots & 1\\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1}\end{pmatrix}, \tag{2}$$

а через $\vec{\Theta}=(\Theta_1,\ldots,\Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряжённых чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t>0$ решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))=\left\{\vec{x}=\left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu,\ldots,t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right)=t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a})\,\middle|\,\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu=t\cdot(\Theta_1^{\nu-1},\ldots,\Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu=1,\ldots,s)$.

Естественной научной проблемой является вопрос о приближении алгебраической сетки рациональной сеткой. Из теории обобщённых параллелепипедальных сеток и квадратурных формул с этими сетками возникает следующая постановка.

Дана алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ и натуральное t, требуется найти целочисленную решётку $\Lambda_{\mathbb{Z}}(t\cdot T(\vec{a}))$ такую, чтобы величина гиперболического параметра решётки $\Lambda_{\mathbb{Z}}(t\cdot T(\vec{a}))$ была наибольшей, когда

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\Lambda_{\mathbb{Z}}(t\cdot T(\vec{a}))=\Lambda(T(\vec{a})).$$

В связи с этим можно дать следующее определение наилучшего приближения алгебраической решётки $\Lambda(t,F)$ целочисленной решёткой $\Lambda(t)$.

Целочисленная решётка $\Lambda(t)$ называется наилучшим приближением алгебраической решётки $\Lambda(t,F)$ с показателем β, если для любого натурального $t_1<t$ выполняется неравенство

$$\frac{q(\Lambda(t))\cdot\ln^{\beta}\det\Lambda(t)}{\det\Lambda(t)}>\frac{q(\Lambda(t_1))\cdot\ln^{\beta}\det\Lambda(t_1)}{\det\Lambda(t_1)}.$$

Такая постановка является новой и ранее не встречалась в литературе.

Принципиальный вопрос, который связан с такой постановкой, заключается в следующем.

Какое минимальное значение β допустимо в определении наилучшего приближения алгебраической решётки целочисленной?

Если окажется, что $\beta>0$, то это означает, что для наилучших приближений алгебраических решёток имеется аналог теоремы Туэ для приближения алгебраических чисел.

В работе [18] рассматривались вопросы приближения алгебраических решёток в случае квадратичных полей, а в работе [21] сделаны попытки рассмотреть общие подходы в этой тематике.

Целью данной работы является рассмотрение вопроса о качестве указанных приближений в случае квадратичных алгебраических решёток.

2. Обозначения и необходимые факты

Рассмотрим квадратичное поле $F=\mathbb{Q}(\sqrt{p})$, где p — простое число и $p=2$ или $p\equiv 3 \pmod 4$. Тогда кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F=\{n+k\sqrt{p}|n,k\in\mathbb{Z}\}$.

Через $\Lambda(F)$ обозначим алгебраическую решётку поля F: $\Lambda(F)=\{(\Theta^{(1)},\Theta^{(2)})|\Theta=\Theta^{(1)}\in\mathbb{Z}_F\}$ и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа.

Таким образом, $\Theta^{(1)}=n+k\sqrt{p},\quad \Theta^{(2)}=n-k\sqrt{p}\quad n,k\in\mathbb{Z}$ и $\Theta^{(1)}$, $\Theta^{(2)}$ — корни уравнения $x^2-2nx+n^2-pk^2=0$. Базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1=(1,1)$, $\vec{\lambda}_2=(\sqrt{p},-\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det\Lambda(F)=2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda^*(F)$ имеет вид: $\vec{\lambda}_1^*=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\vec{\lambda}_2^*=\left(\frac{\sqrt{p}}{2p},-\frac{\sqrt{p}}{2p}\right)$ и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda^*(F)=\frac{\sqrt{p}}{2p}$.

Рассмотрим разложение $\sqrt{p}$ в цепную периодическую дробь:

$$\sqrt{p}=q_0+[(q_1,\ldots,q_n,2q_0)]=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{2q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

с периодом $(q_1,\ldots,q_n,2q_0)$. Через $\frac{P_m}{Q_m}$ будем обозначать m-ую подходящую дробь к $\sqrt{p}$. Таким образом,

$$\sqrt{p}=\frac{P_m}{Q_m}+\frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m^2},\quad 0<\theta_m<1\quad (m=0,1,\ldots). \tag{3}$$

Через $\Lambda_m(F)$ будем обозначать алгебраическую решётку, заданную равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \left\{(Q_m(n+k\sqrt{p}), Q_m(n-k\sqrt{p}))|n,k\in\mathbb{Z}\right\},$$

а через $\Lambda_m(p)$ — целочисленную решётку, заданную равенствами:

$$\Lambda_m(p) = \left\{(Q_m n + kP_m, Q_m n - kP_m)|n,k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Базис решётки $\Lambda_m(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2} = (Q_m\sqrt{p}, -Q_m\sqrt{p})$, а детерминант решётки $\det\Lambda_m(F) = 2Q_m^2\sqrt{p}$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(F)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}^*_{m,1} = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m}\right), \quad \vec{\lambda}^*_{m,2} = \left(\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m}, -\frac{\sqrt{p}}{2pQ_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda_m^*(F) = \frac{\sqrt{p}}{2pQ_m^2}$.

Для целочисленной решётки $\Lambda_m(p)$ базис имеет вид $\vec{\lambda}_{m,1,Z} = (Q_m, Q_m)$, $\vec{\lambda}_{m,2,Z} = (P_m, -P_m)$, а детерминант решётки $\det\Lambda_m(p) = 2Q_mP_m$. Базис взаимной решётки $\Lambda_m^*(p)$ имеет вид:

$$\vec{\lambda}^*_{m,1,Z} = \left(\frac{1}{2Q_m}, \frac{1}{2Q_m}\right), \quad \vec{\lambda}^*_{m,2,Z} = \left(\frac{1}{2P_m}, -\frac{1}{2P_m}\right)$$

и детерминант взаимной решётки $\det\Lambda_m^*(p) = \frac{1}{2P_mQ_m}$.

Лемма 1. *Для $m \geqslant 0$ справедливы соотношения*

$$\det\Lambda_m(F) = \det\Lambda_m(p) + (-1)^m 2\theta_m,$$

$$\vec{\lambda}_{m,1} = \vec{\lambda}_{m,1,Z}, \quad \vec{\lambda}_{m,2} = \vec{\lambda}_{m,2,Z} + \left(\frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m}, \frac{(-1)^{m+1}\theta_m}{Q_m}\right).$$

Доказательство. Доказательство получается прямыми вычислениями. □

Лемма 2. *Для $m \geqslant 0$ справедливы соотношения*

$$\det\Lambda_m^*(F) = \det\Lambda_m^*(p) + 2\left(\det\Lambda_m^*(p)\right)^2 \frac{(-1)^{m+1}\theta_m}{1 + \frac{(-1)^m\theta_m}{P_mQ_m}},$$

$$\vec{\lambda}^*_{m,1} = \vec{\lambda}^*_{m,1,Z}, \quad \left\|\vec{\lambda}^*_{m,2} - \vec{\lambda}^*_{m,2,Z}\right\|_1 = \frac{\theta_m}{\det\Lambda_m(p)\left(P_m + \frac{(-1)^m\theta_m}{Q_m}\right)}.$$

Доказательство. Доказательство получается прямыми вычислениями. □

Рассмотрим следующие две сетки:

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \Lambda_m^*(F)\cap[-1;1)^s, \quad M(\Lambda_m(p)) = \Lambda_m^*(p)\cap[0;1)^s.$$

Нетрудно видеть, что

$$M_1(\Lambda_m(F)) = \left\{\left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{\sqrt{p}k}{2pQ_m}\right)\middle| k\in A(n), |n|\leqslant 2Q_m - 1\right\},$$

$$A(n) = \left\{k \left| \begin{array}{ll} -2P_m < k < 2P_m, & \text{при } n = 0, \\ -2P_m + \frac{P_mn}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = 1,\dots 2Q_m - 1, \\ -2P_m - \frac{P_mn}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = -1,\dots -2Q_m + 1; \end{array}\right.\right\},$$

$$M(\Lambda_m(p)) = \left\{\left(\frac{n}{2Q_m} + \frac{k}{2P_m}, \frac{n}{2Q_m} - \frac{k}{2P_m}\right)\middle| k\in B(n), 0\leqslant n\leqslant 2Q_m - 1\right\},$$

$$B(n) = \left\{k \left| \begin{array}{ll} k = 0, & \text{при } n = 0, \\ -\frac{P_mn}{Q_m} \leqslant k \leqslant \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = 1,\dots Q_m - 1, \\ -2P_m + \frac{P_mn}{Q_m} < k < 2P_m - \frac{P_mn}{Q_m}, & \text{при } n = Q_m,\dots 2Q_m - 1; \end{array}\right.\right\}.$$

Определение 2. *Квадратурной формулой с обобщённой параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = (\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y}\in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\}=\vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ *— погрешность квадратурной формулы.*

Для погрешности квадратурной формулы с обобщённой параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка[1]

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB\cdot c_1(\alpha)^s \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

где

$$c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Для гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha$ произвольной решётки Λ справедлива обобщённая теорема Бахвалова [14]

$$\begin{array}{lcll} \zeta_H(\Lambda|\alpha) & \leqslant & C_3(\alpha,s)C_1(\Lambda)^s & \text{при} \quad q(\Lambda)=1, \\ \zeta_H(\Lambda|\alpha) & \leqslant & C_4(\alpha,s)q^{-\alpha}(\Lambda)(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1} & \text{при} \quad q(\Lambda)>1, \end{array} \tag{4}$$

где гиперболический параметр решётки

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}} q(\vec{x})$$

имеет простой геометрический смысл: *гиперболический крест $K_s(T)$ не содержит ненулевых точек решётки Λ при $T < q(\Lambda)$.*

Гиперболическим крестом называется область

$$K_s(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leqslant T\},$$

где $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s$ — усечённая норма $\vec{x}$, и для вещественного x обозначаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$ ([19], 1963).

В работе [15] доказана следующая асимптотическая формула.

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов квадратичного поля F: $\zeta_{D_0}(\alpha|F) = \sum_{(\omega)} |N(\omega)|^{-\alpha}$, тогда $\zeta'_{D_0}(\alpha|F) = -\sum_{(\omega)} \ln(N(\omega))|N(\omega)|^{-\alpha}$.

Теорема 1. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \frac{2(\det\Lambda)^\alpha \zeta_{D_0}(\alpha|F)}{R} \cdot \frac{\ln\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^\alpha} -$$

$$-\frac{2(\det\Lambda)^\alpha \left(\ln(\det\Lambda)\,\zeta_{D_0}(\alpha|F) + \zeta'_{D_0}(\alpha|F)\right)}{R(\det\Lambda(t))^\alpha} + \frac{2(\det\Lambda)^\alpha \zeta_{D_0}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^\alpha}\left(\theta_1(\alpha) + \frac{\theta_2(\alpha)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\right),$$

где $|\theta_1(\alpha)| \leqslant 1$ и $\frac{1}{\varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}} \leqslant \theta_2(\alpha) \leqslant \varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}$, ε_0 — фундаментальная единица квадратичного поля F и R — регулятор этого поля.

[1] Здесь и далее символ $\sum'$ обозначает, что из области суммирования исключён нулевой набор.

Доказательство. Доказательство см. [15]. □

Хорошо известно, что граничной функцией класса $E_s^2\left(\cdot, \frac{\pi^2}{6}\right)$ для параллелепипедальных сеток является функция $h(x,y) = 9(1-2\{x\})^2(1-2\{y\})^2$, поэтому для оценки качества сетки $M(\Lambda_m(p))$ можно использовать функцию

$$H(M(\Lambda_m(p))) = \frac{9}{2P_mQ_m}\sum_{n=0}^{2Q_m-1}\sum_{k\in B(n)}\left(1-2\left(\frac{n}{2Q_m}+\frac{k}{2P_m}\right)\right)^2\left(1-2\left(\frac{n}{2Q_m}-\frac{k}{2P_m}\right)\right)^2.$$

Будем для краткости называть это выражение функцией качества. Для вычисления функции качества обобщённой параллелепипедальной сетки $M(\Lambda_m(p))$ требуется $O(N(P_m,Q_m))$ арифметических операций, где $N(P_m,Q_m)$ — количество точек сетки $M(\Lambda_m(p))$.

Цель данной работы — найти алгоритм вычисления функции качества за $O(\sqrt{N(P_m,Q_m)})$ арифметических операций.

3. Преобразование функции качества

Прежде всего, подсчитаем количество слагаемых в выражении для функции качества, которое обозначим через $N = N(P,Q)$, где $P = P_m$, $Q = Q_m$.

Лемма 3. *Для функции качества справедливо равенство $N = N(P,Q) = 2PQ$.*

Доказательство. Действительно,

$$N = \sum_{n=0}^{2Q-1}|B(n)|, \quad |B(n)| = \begin{cases} 1, & \text{при } n=0,\\ 1+2\left[\frac{P\cdot n}{Q}\right], & \text{при } n=1,\dots Q-1,\\ 2P-1, & \text{при } n=Q,\\ 1+2\left[2P-\frac{P\cdot n}{Q}\right], & \text{при } n=Q+1,\dots 2Q-1.\end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$N = 2Q+2(P-1)+2\sum_{n=1}^{Q-1}\left(\left[\frac{P\cdot n}{Q}\right]+\left[P-\frac{P\cdot n}{Q}\right]\right) = 2Q+2(P-1)+2(Q-1)(P-1) = 2PQ,$$

так как

$$\left[\frac{P\cdot n}{Q}\right]+\left[P-\frac{P\cdot n}{Q}\right] = P-\left\{\frac{P\cdot n}{Q}\right\}-\left\{-\frac{P\cdot n}{Q}\right\} = P-1 \quad \text{при } n=1,2,\dots,Q-1.$$

□

Далее нам потребуются полные суммы дробных долей $S_{\nu,\mu}(P,Q)$, которые задаются равенствами:

$$S_{\nu,\mu}(P,Q) = \frac{1}{Q}\sum_{n=1}^{Q-1}\left(\frac{n}{Q}\right)^{\nu}\left\{\frac{P\cdot n}{Q}\right\}^{\mu}, \quad \nu,\mu \geqslant 0.$$

Мы будем рассматривать только случай $(P,Q)=1$. Такие суммы рассматривались в работах [1]–[7], [16], [23]–[24]. Аналогичные неполные суммы дробных долей были детально изучены в работах [8]–[11].

Наряду с обозначением $H(M(\Lambda_m(p)))$ будем использовать $H(P,Q)$:

$$H(P,Q) = \frac{9}{N}\sum_{n=0}^{2Q-1}\sum_{k\in B(n)}\left(1-2\left(\frac{n}{2Q}+\frac{k}{2P}\right)\right)^2\left(1-2\left(\frac{n}{2Q}-\frac{k}{2P}\right)\right)^2.$$

Нетрудно видеть, что

$$H(P,Q)=\frac{9}{N}\sum_{n=0}^{2Q-1}\sum_{k\in B(n)}\left(\left(1-\frac{n}{Q}\right)^2-\left(\frac{k}{P}\right)^2\right)^2.$$

Обозначим через $S(n)$ внутреннюю сумму:

$$S(n)=\sum_{k\in B(n)}\left(\left(1-\frac{n}{Q}\right)^2-\left(\frac{k}{P}\right)^2\right)^2,$$

тогда

$$H(P,Q)=\frac{9}{N}\sum_{n=0}^{2Q-1}S(n).$$

Обозначим через $T(n)$ величину $T(n)=\left[\frac{P\cdot n}{Q}\right]$. Ясно, что $T(n+Q)=P+T(n)$.

Лемма 4. *При $n=1,\dots,Q-1$ справедливо равенство*

$$B(Q-n)=B(Q+n)=\left\{k\,\middle|\,\frac{Pn}{Q}-P<k<P-\frac{Pn}{Q}\right\}.$$

Доказательство. Действительно, при $n=1,\dots,Q-1$ из определения множества $B(n)$ имеем

$$B(Q-n)=\left\{k\,\middle|\,\frac{Pn}{Q}-P\leqslant k\leqslant P-\frac{Pn}{Q}\right\}=\left\{k\,\middle|\,\frac{Pn}{Q}-P<k<P-\frac{Pn}{Q}\right\},$$

так как $\frac{Pn}{Q}$ — нецелое число в силу $(P,Q)=1$.

Аналогично, имеем

$$B(Q+n)=\left\{k\,\middle|\,\frac{Pn}{Q}-P<k<P-\frac{Pn}{Q}\right\},$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$H(P,Q)=\frac{9}{N}\left(S(0)+S(Q)+2\sum_{n=1}^{Q-1}S(n)\right).$$

Доказательство. Действительно, из определения величины $S(n)$ и леммы (4) имеем

$$S(Q-n)=\sum_{k\in B(Q-n)}\left(\left(\frac{n}{Q}\right)^2-\left(\frac{k}{P}\right)^2\right)^2=\sum_{k\in B(Q+n)}\left(\left(-\frac{n}{Q}\right)^2-\left(\frac{k}{P}\right)^2\right)^2=S(Q+n).$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 6. *Справедливы равенства:*
при $n=0$ $S(0)=1$;
при $n=1,\dots,Q-1$

$$S(n)=\left(1-\frac{n}{Q}\right)^4(1+2T(n))-2\left(1-\frac{n}{Q}\right)^2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}+$$
$$+\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)(3T^2(n)+3T(n)-1)}{15P^4};$$

при $n=Q$

$$S(Q)=\frac{(P-1)(2P-1)(3P^2-3P-1)}{15P^3}.$$

Доказательство. Действительно, при $n = 0$ имеем:

$$S(0) = \sum_{k\in B(0)} \left(1 - \left(\frac{k}{P}\right)^2\right)^2 = \sum_{k=0} \left(1 - \left(\frac{k}{P}\right)^2\right)^2 = 1.$$

При $n = 1, \dots, Q-1$ получим:

$$S(n) = \left(1 - \frac{n}{Q}\right)^4 |B(n)| - 2\left(1 - \frac{n}{Q}\right)^2 \sum_{k\in B(n)} \left(\frac{k}{P}\right)^2 + \sum_{k\in B(n)} \left(\frac{k}{P}\right)^4.$$

Имеем $|B(n)| = 1 + 2T(n)$ и

$$\sum_{k\in B(n)} \left(\frac{k}{P}\right)^2 = \frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2},$$

$$\sum_{k\in B(n)} \left(\frac{k}{P}\right)^4 = \frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)(3T^2(n)+3T(n)-1)}{15P^4}.$$

Отсюда следует, что

$$S(n) = \left(1 - \frac{n}{Q}\right)^4 (1+2T(n)) - 2\left(1 - \frac{n}{Q}\right)^2 \frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2} + \\ + \frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)(3T^2(n)+3T(n)-1)}{15P^4}.$$

При $n = Q$ получим:

$$S(Q) = \sum_{k\in B(Q)} \left(\frac{k}{P}\right)^4 = 2\sum_{k=1}^{P-1} \left(\frac{k}{P}\right)^4 = \frac{P(P-1)(2P-1)(3P^2-3P-1)}{15P^4}.$$

□

Для краткости положим $t(n) = \left\{\frac{P\cdot n}{Q}\right\}$, тогда $T(n) = \frac{P\cdot n}{Q} - t(n)$ и

$$S_{\nu,\mu}(P,Q) = \frac{1}{Q}\sum_{n=1}^{Q-1} \left(\frac{n}{Q}\right)^\nu t^\mu(n), \quad \nu,\mu \geqslant 0.$$

Теорема 2. *Справедливо равенство*

$$H(P,Q) = \frac{9}{N}\Bigg(\frac{2}{5}P + \frac{2}{3P} - \frac{1}{15P^3} + 2\sum_{n=1}^{Q-1}\Bigg(1 + 2T(n) - 2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2} + \\ + \frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)(3T^2(n)+3T(n)-1)}{15P^4} - \\ -4\frac{n}{Q}\left(1 + 2T(n) - \frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}\right) + \\ + \left(\frac{n}{Q}\right)^2\left(6(1+2T(n)) - 2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}\right) - \\ - \left(\frac{n}{Q}\right)^3 4(1+2T(n)) + \left(\frac{n}{Q}\right)^4 (1+2T(n))\Bigg)\Bigg).$$

Доказательство. Действительно, из лемм 5 и 6 следует, что

$$H(P,Q)=\frac{9}{N}\left(1+2\sum_{n=1}^{Q-1}S(n)+\frac{(P-1)(2P-1)(3P^2-3P-1)}{15P^3}\right)=$$
$$=\frac{9}{N}\left(\frac{2}{5}P+\frac{2}{3P}-\frac{1}{15P^3}+2\sum_{n=1}^{Q-1}S(n)\right).$$

Далее имеем:

$$S(n)=\left(1-\frac{n}{Q}\right)^4(1+2T(n))-2\left(1-\frac{n}{Q}\right)^2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}+$$
$$+\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)(3T^2(n)+3T(n)-1)}{15P^4}=$$
$$=S_0(n)+\frac{n}{Q}S_1(n)+\left(\frac{n}{Q}\right)^2S_2(n)+\left(\frac{n}{Q}\right)^3S_3(n)+\left(\frac{n}{Q}\right)^4S_4(n),$$

где

$$S_0(n)=1+2T(n)-2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}+$$
$$+\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)(3T^2(n)+3T(n)-1)}{15P^4};$$
$$S_1(n)=-4\left(1+2T(n)-\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}\right);$$
$$S_2(n)=6(1+2T(n))-2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2};$$
$$S_3(n)=-4(1+2T(n));\quad S_4(n)=1+2T(n).$$

Отсюда следует, что

$$H(P,Q)=\frac{9}{N}\left(\frac{2}{5}P+\frac{2}{3P}-\frac{1}{15P^3}+2\sum_{n=1}^{Q-1}\left(1+2T(n)-2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}+\right.\right.$$
$$+\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)(3T^2(n)+3T(n)-1)}{15P^4}-$$
$$-4\frac{n}{Q}\left(1+2T(n)-\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}\right)+$$
$$+\left(\frac{n}{Q}\right)^2\left(6(1+2T(n))-2\frac{T(n)(T(n)+1)(2T(n)+1)}{3P^2}\right)-$$
$$\left.\left.-\left(\frac{n}{Q}\right)^3 4(1+2T(n))+\left(\frac{n}{Q}\right)^4(1+2T(n))\right)\right).$$

□

4. Об одном подходе для вычисления сумм с целыми частями

Пусть $(P,Q)=1$ и рассмотрим простейшую сумму целых частей

$$S(P,Q)=\sum_{n=0}^{Q-1}\left[\frac{Pn}{Q}\right],$$

которую можно легко вычислить

$$S(P,Q)=\sum_{n=0}^{Q-1}\frac{Pn}{Q}-\sum_{n=0}^{Q-1}\left\{\frac{Pn}{Q}\right\}=\frac{P(Q-1)}{2}-\sum_{n=0}^{Q-1}\left\{\frac{n}{Q}\right\}=\frac{P(Q-1)}{2}-\frac{(Q-1)}{2}=\frac{(P-1)(Q-1)}{2}.$$

Этот метод при переходе к более сложным суммам вызывает при реализации существенные трудности.

Рассмотрим другой метод, который, на наш взгляд, имеет перспективы для обобщения. Мы будем считать, что $P=P_m$, $Q=Q_m$, где P_m и Q_m — числители и знаменатели m-ой подходящей дроби, а $q_0,\dots,q_m$ — неполные частные. Воспользуемся представлением

$$n=yQ_{m-1}+x,\quad \begin{cases} 0\leqslant y\leqslant q_m-1,\quad 0\leqslant x\leqslant Q_{m-1}-1, & \text{при } 0\leqslant n<q_mQ_{m-1},\\ y=q_m,\quad 0\leqslant x\leqslant Q_{m-2}-1 & \text{при } q_mQ_{m-1}\leqslant n\leqslant Q_m-1.\end{cases}$$

Заметим, что

$$\left[\frac{Pn}{Q}\right]=\left[\frac{P_{m-1}n}{Q_{m-1}}+\frac{(-1)^{m-1}n}{Q_mQ_{m-1}}\right]=\left[\frac{P_{m-1}n}{Q_{m-1}}\right]=P_{m-1}y+\left[\frac{P_{m-1}x}{Q_{m-1}}\right].$$

Отсюда следует рекуррентное соотношение при $m\geqslant 2$

$$S(P_m,Q_m)=\sum_{y=0}^{q_m-1}\sum_{x=0}^{Q_{m-1}-1}\left(P_{m-1}y+\left[\frac{P_{m-1}x}{Q_{m-1}}\right]\right)+\sum_{x=0}^{Q_{m-2}-1}\left(P_{m-1}q_m+\left[\frac{P_{m-1}x}{Q_{m-1}}\right]\right)=$$
$$=\frac{q_m(q_m-1)}{2}P_{m-1}Q_{m-1}+q_mS(P_{m-1},Q_{m-1})+q_mP_{m-1}Q_{m-2}+S(P_{m-2},Q_{m-2}).$$

При $m=0$ имеем $Q_0=1$ и

$$S(P_0,Q_0)=\sum_{n=0}^{Q_0-1}\left[\frac{P_0n}{Q_0}\right]=0.$$

Если $Q_1=1$, то $S(P_1,Q_1)=0$. Пусть $Q_1=q_1>1$, тогда

$$S(P_1,Q_1)=\sum_{n=0}^{q_1-1}\left[\frac{(q_0q_1+1)n}{q_1}\right]=q_0\frac{(q_1(q_1-1)}{2}=\frac{(P_1-1)(Q_1-1)}{2}$$

и утверждение леммы верно при $m\leqslant 1$. Далее по индукции имеем:

$$S(P_m,Q_m)=\frac{q_m(q_m-1)}{2}P_{m-1}Q_{m-1}+q_m\frac{(P_{m-1}-1)(Q_{m-1}-1)}{2}+$$
$$+q_mP_{m-1}Q_{m-2}+\frac{(P_{m-2}-1)(Q_{m-2}-1)}{2}=\frac{q_mP_{m-1}q_mQ_{m-1}}{2}-\frac{q_mP_{m-1}}{2}-\frac{q_mQ_{m-1}}{2}+\frac{q_m}{2}+$$
$$+q_mP_{m-1}Q_{m-2}+\frac{P_{m-2}Q_{m-2}}{2}-\frac{P_{m-2}}{2}-\frac{Q_{m-2}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{q_mP_{m-1}q_mQ_{m-1}}{2}-\frac{P_m}{2}-\frac{Q_m}{2}+$$
$$+\frac{q_mP_{m-1}Q_{m-2}}{2}+\frac{P_mQ_{m-2}}{2}+\frac{q_m}{2}+\frac{1}{2}=\frac{q_mP_{m-1}Q_m}{2}-\frac{P_m}{2}-\frac{Q_m}{2}+\frac{P_mQ_{m-2}}{2}+\frac{q_m}{2}+\frac{1}{2}=$$
$$=\frac{P_mQ_m}{2}-\frac{P_m}{2}-\frac{Q_m}{2}+\frac{1}{2}+R_m,$$

где

$$R_m=\frac{q_m}{2}+\frac{P_mQ_{m-2}}{2}-\frac{P_{m-2}Q_m}{2}=0,$$

так как по известному тождеству для подходящих дробей имеем

$$P_{m-2}Q_m-P_mQ_{m-2}=q_m.$$

5. Заключение

Теорема 2 позволяет вычислять значение функции качества за $O\left(\sqrt{N(P_m,Q_m)}\right)$ арифметических операций. Мы предполагаем, что найденное выражение для функции качества можно просуммировать по n. В результате должно получиться выражение через числители и знаменатели подходящих дробей к $\sqrt{p}$ и неполные частные. Искомое выражение должно будет позволить вычислять значение функции качества за $O(\ln N(P_m,Q_m))$ арифметических операций.

По-видимому, осуществление этой программы может потребовать значительных ресурсов, так как вычисление в конечном виде более простого выражения

$$H_p(a)=\frac{9}{p}\sum_{n=0}^{p-1}\left(1-2\frac{n}{p}\right)^2\left(1-2\left\{\frac{an}{p}\right\}\right)^2$$

потребовало 50 страниц подробного математического текста (см. [6]).

На возможное использование симметрии в лемме 4 обратил внимание А. В. Родионов, за что выражаю ему свою благодарность.

Также выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вронская Г. Т. Квадратичное отклонение плоских сеток [Текст]/ автореферат диссертации на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук: 01.06.06 / Г. Т. Вронская. – М., 2005. – 10 с.

2. Вронская Г. Т. Квадратичное отклонение плоских сеток / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МПГУ, 2005.

3. Вронская Г. Т., Добровольский Н. М. О двумерных сетках Воронина // Чебышевский сборник 2004 Т. 5. Вып. 1(9). – Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 74–86.

4. Вронская Г. Т., Добровольский Н. М., Родионова О. В. Сравнения суммы и произведения (тезисы)// Материалы всероссийской конференции "Современные проблемы математики, механики и информатики" ТулГУ. Тула, 2002.

5. Вронская Г. Т., Добровольский Н. М., Родионова О. В. Сравнения, суммы и произведения по приведенной системе вычетов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 8. Вып. 1. Тула, 2002. С. 10–28.

6. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток: Моногр. / Под ред. Н. М. Добровольского. – Тула, 2012.

7. Вронская Г. Т., Родионова О. В. Квадратичное отклонение плоских сеток. – Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2005.

8. Добровольская В. Н. Неполные суммы дробных долей // Чебышевский сборник. Тула, 2004. Т. 5, вып. 2 (10). С. 43–48.

9. Добровольская В. Н. Формула Пика и неполные суммы дробных долей // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 10. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. С. 5–11.

10. Добровольская В. Н. Отклонение плоских параллелепипедальных сеток // Чебышевский сборник. Тула, 2005. Т. 6. Вып. 1 (13). С. 87–97.

11. Добровольская В. Н. Элементарный метод дробных долей Виноградова – Коробова и отклонение плоских сеток Бахвалова // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, вып. 2(14). С. 138–144.

12. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. – 283 с. http://elibrary.ru/item.asp? id=20905960.

13. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

14. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

15. Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Соболева В. Н., Соболев Д. К., Юшина (Климова) Е. И. Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сб., 2015. Т. 16, вып. 4. С. 100–149. С. 47–52.

16. Добровольский Н. М., Есаян А. Р., Пихтильков С. А., Родионова О. В., Устян А. Е. Об одном алгоритме поиска оптимальных коэффициентов // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. Тула, 1999. С. 51–71.

17. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 1996. С. 77–87.

18. Климова Е. И., Добровольский Н. Н. Квадратичные поля и квадратурные формулы // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 308–310.

19. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. – М.: Физмат-гиз, 1963.

20. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

21. Родионов А. В. О рациональных приближениях алгебраических сеток // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 321–310.

22. Родионов А. В., Чуприн С. Ю. О гиперболических параметрах решётки линейного сравнения // Известия ТулГУ. Естественные науки. Вып. 1. Ч. 1. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 50–62.

23. Родионова О. В. Рекуррентные формулы первого порядка для степенных сумм дробных долей // Сб.: "Всероссийская научная конференция "Современные проблемы математики, механики, информатики". – Тула, 2000. – С. 50-51.

24. Родионова О. В. Обобщенные параллелепипедальные сетки и их приложения / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: МПГУ, 2000.

25. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.

26. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М.: ВЦ АН СССР, 1979.

27. Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 7. 1963. № 4. С. 784–802.

REFERENCES

1. Vronskaya, G. T. 2005, “Quadratic deviation of flat grids” Abstract of Ph.D. dissertation: 01.06.06 / G. T. Vronskaya. – M., – 10 c.

2. Vronskaya, G. T. 2005, “Quadratic deviation of flat grids” / Ph.D. Thesis. Moscow. MSPU.

3. Vronskaya, G. T., Dobrovol’skii, N. M. 2004, “On two-dimensional Voronin grids”, Chebyshevskii sb,Tula, Izd-vo TSPU them. L.N. Tolstoy, vol. 5, no. 1(9). pp. 74–86.

4. Vronskaya, G. T., Dobrovol’skii, N. M., Rodionova, O. V. 2002, “Comparisons sums and works (abstracts)”, Materials of all-Russian conference "Modern problems of mathematics, mechanics and computer science"TulSU. Tula.

5. Vronskaya, G. T.,Dobrovol’skii, N. M., Rodionova, O. V. 2002, "Comparisons, amounts and products on the reduced system of deductions News Of Tulgu. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics.,Tula, vol. 8, no. 1, pp. 10–28.

6. Vronskaya, G. T., Dobrovol’skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids. monograph edited by N. M. Dobrovol’skii. Tula.

7. Vronskaya, G. T., Rodionova, O. V. 2005, "Quadratic deviation of flat grids Tula, izd-vo TSPU them. L. N. Tolstoy.

8. Dobrovol’skaya, V. N. 2004, "Amount incomplete or fractions Chebyshevskii sb., Tula, vol. 5, no. 2 (10), pp. 43–48.

9. Dobrovol’skaya, V. N. 2004, "The formula of the Peak and partial sums of the fractional share Izv. Tul. st. un-ty. Ser. Mathematics. Mechanics.Informatics. Tula: Izd-vo Tulgu, vol. 10, no. 1, pp. 5–11.

10. Dobrovol’skaya, V. N. 2005, "The deviation of the flat parallelepipedal grids Chebyshevskii sb. Tula, vol. 6, no. 1 (13), pp. 87–97.

11. Dobrovol’skaya, V. N. 2005, "The basic method of fractional shares Vinogradova – Korobova and deviation of flat Bakhvalov grids Chebyshevskii sb. vol. 6, no. 2(14), pp. 138–144.

12. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N. 2012, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding the optimal coefficients Tula: Izd-vo Tul. st. ped. un-ty them. L. N. Tolstoy. – 283 p. http://elibrary.ru/item.asp? id=20905960.

13. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N. 2012, "Hyperbolic Zeta functions of grids and lattices and calculation of optimal coefficients Chebyshevskii sb. vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

14. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.

15. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Soboleva,V. N., Sobolev, D. K., Yushina(Klimova), E. I. 2015, "Hyperbolic Zeta function of the lattice of a quadratic field" , Chebyshevskii sb. vol. 16, no. 4, pp. 100–149. pp. 47–52.

16. Dobrovol'skii, N. M., Esayan, A. R., Pikhtilkov, S. A., Rodionova, O. V., Ystyan, A. E. 1999, "On one algorithm for finding optimal coefficients Izvestiya Tulgu. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics.Tula. Vol. 5, no. 1, pp. 51–71.

17. Dobrovol'skii, N. M. & Roshhenya, A.L. 1996, "On continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 2, no. 1, pp. 77–87.

18. Klimova,E. I., Dobrovol'skii, N. N. 2018, "Quadratic fields and quadrature formulas" , Proceedings of the XV International conference Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications, dedicated to the centenary of the doctor of physical and mathematical Sciences, Professor of Moscow state University named after M. V. Lomonosov Korobov Nikolai Mikhailovich. Tula: Publishing house. GOS. PED. UN-TA im. L. N. Tolstoy. pp. 308-310.

19. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

20. Korobov, N. M. 2004, "Numerical-theoretic methods in approximate analysis Moscow: mtsnmo. 288 p.

21. Rodionov, A. V. 2018, "On rational approximations of algebraic grids Proceedings of the XV International conference Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications, dedicated to the centenary of the doctor of physical and mathematical Sciences, Professor of M. V. Lomonosov Moscow state University Nikolai Mikhailovich Korobov. Tula: Publishing house. GOS. PED. UN-TA im. L. N. Tolstoy. pp. 321-310.

22. Rodionov, A. V., Chuprin, S. Yu. 2014, "On hyperbolic parameters of the lattice of linear comparison Izvestiya Tulgu. Natural science. Issue. 1. CH. 1. — Tula: Publishing house of Tulgu. pp. 50–62.

23. Rodionova, O. V. 2000, "Recurrent formulas of the first order for power sums of fractional fractions Sat.:"All-Russian scientific conference "Modern problems of mathematics, mechanics, Informatics Tula, pp. 50-51.

24. Rodionova, O. V. 2000, "Generalized parallelepipedal grids and their applications Dis. ... kand. p. Mat. sciences'. Moscow. Moscow state pedagogical University.

25. Frolov, K. K. 1976, "Upper estimates of the error of quadrature formulas on classes of functions DAN USSR. vol. 231, no. 4, pp. 818–821.

26. Frolov, K. K. 1979, "Quadrature formulas on classes of functions Dis.... kand. p. Mat. sciences'. M.: VTS an SSSR.

27. Sharugin, I. F. 1983, "Lower estimates of the error of quadrature formulas on classes of functions Journal. compute. mate. and mate. physics. vol. 7, no 4, pp. 784–802.

Получено 28.08.2018
Принято к печати 15.10.2018