ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 3.

УДК 512.554.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-231-240

Обобщение задачи А. И. Мальцева о коммутативных подалгебрах на алгебры Шевалле[1]

Левчук Владимир Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры и математической логики Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный 79, Сибирский федеральный университет

e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

Сулейманова Галина Сафиуллановна — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры ПИМиЕД Хакасского технического института — филиала Сибирского федерального университета, 665017, г. Абакан, ул. Щетинкина 27, Хакасский технический институт — филиал Сибирского федерального университета

e-mail: suleymanova@list.ru

Аннотация

В 1945 году А.И. Мальцев исследовал задачу описания абелевых подгрупп наивысшей размерности в комплексных простых группах Ли. Задача инспирирована доказанной ранее И. Шуром теоремой: *Наивысшая размерность абелевых подгрупп группы $SL(n,\mathbb{C})$ равна $[n^2/4]$ и абелевы подгруппы этой размерности при $n>3$ переводятся автоморфизмами друг в друга.* Свою задачу А.И. Мальцев решил переходом к комплексным алгебрам Ли. В теории Картана – Киллинга полупростые комплексные алгебры Ли классифицированы с использованием классификации систем корней евклидовых пространств V. С любой неразложимой системой корней Φ и полем K ассоциируют алгебру Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(K)$; ее базу дают база определенной абелевой самонормализуемой подалгебры H и элементы e_r ($r\in\Phi$) с H-инвариантным подпространством Ke_r. Элементы e_r ($r\in\Phi^+$) образуют базу нильтреугольной подалгебры $N\Phi(K)$. Методы А. И. Мальцева позднее получили развитие в решении проблемы о больших абелевых подгруппах конечных групп Шевалле. В настоящей статье мы используем разработанные методы для перенесения теоремы А.И. Мальцева на алгебры Шевалле. Мы исследуем следующие задачи:

(A) *Описать коммутативные подалгебры наивысшей размерности в алгебре Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

(B) *Описать коммутативные подалгебры наивысшей размерности в подалгебре $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

В статье приводится описание коммутативных подалгебр наивысшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ классического типа над произвольным полем K с точностью до автоморфизмов алгебры $\mathcal{L}_\Phi(K)$ и подалгебры $N\Phi(K)$.

Ключевые слова: алгебра Шевалле, коммутативная подалгебра, нильтреугольная подалгебра.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова. Обобщение задачи А. И. Мальцева о коммутативных подалгебрах на алгебры Шевалле // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 231–240.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00707).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 3.

UDC 512.554.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-231-240

Generalization of A. I. Mal'tsev problem on commutativa subalgebras for Chevalley algebras[2]

Levchuk Vladimir Mikhailovich — Dr. Phys.-Math. Sci., professor, head of the department of algebra and logic of Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia.
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru
Suleimanova Galina Safiullanovna — Dr. Phys.-Math. Sci., associate professor, professor of Khakas Tecnical Institute — branch of Siberian Federal University, Abakan, 655017 Russia
e-mail: suleymanova@list.ru

Abstract

In 1945 A. I. Mal'tsev investigated the problem on description of abelian subgroups of largest dimension in complex simple Lie groups. This problem's arisen from the theorem of I. Schur: *The largest dimension of abelian subgroups of the group $SL(n, \mathbb{C})$ equals to $[n^2/4]$ and abelian subgroups of such dimension for $n > 3$ are transformed by automorphisms into each other.* A. I. Mal'tsev solved his problem by the reduction to complex Lie algebras. In Cartan – Killing theory semisimple complex Lie algebras are classified making use of the classification of root systems in Euclidean space V. A Chevalley algebra $\mathcal{L}_\Phi(K)$ is associated with the indecomposable root system Φ and with the field K; the base of the Chevalley algebra consists of the base of certain abelian self-normalized subalgebra H and of the elements e_r $(r \in \Phi)$ with H-invariant subspace Ke_r. The elements e_r $(r \in \Phi^+)$ form a base of niltriangular subalgebra $N\Phi(K)$. Methods of A. I. Mal'tsev were developed for the solving of the problem on large abelian subgroups in finite Chevalley groups. In this article we use the worked out methods for the reduction of A. I. Mal'cev theorem for the Chevalley algebras. We investigate the problems:

(A) *to describe commutative subalgebras of largest dimension in a Chevalley algebra $\mathcal{L}_\Phi(K)$ over arbitrary field K.*

(B) *to describe commutative subalgebras of largest dimension in subalgebra $N\Phi(K)$ of the Chevalley algebra $\mathcal{L}_\Phi(K)$ Over arbitrary field K.*

In this article we give the description of all commutative subalgebras of largest dimension in subalgebra $N\Phi(K)$ of classical type over arbitrary field K up to automorphisms of algebra $\mathcal{L}_\Phi(K)$ and of subalgebra $N\Phi(K)$.

Keywords: Chevalley algebra, commutative subalgebra, niltriangular subalgebra.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova, 2018, "Generalization of A. I. Mal'tsev problem on commutativa subalgebras for Chevalley algebras", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 231–240.

1. Введение

В 1945 году А.И. Мальцев [1] исследовал задачу описания абелевых подгрупп наивысшей размерности в комплексных простых группах Ли. Задача инспирирована доказанной ранее И. Шуром [2] теоремой:

[2]This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00707)

Наивысшая размерность абелевых подгрупп группы $SL(n,\mathbb{C})$ равна $[n^2/4]$ и абелевы подгруппы этой размерности при $n > 3$ переводятся автоморфизмами друг в друга.

Свою задачу А.И. Мальцев решил переходом к комплексным алгебрам Ли.

В теории Картана – Киллинга полупростые комплексные алгебры Ли классифицированы с использованием классификации систем корней евклидовых пространств V. С любой неразложимой системой корней Φ и полем K ассоциируют алгебру Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(K)$; ее базу дают база определенной абелевой самонормализуемой подалгебры H и элементы e_r $(r \in \Phi)$ с H-инвариантным подпространством Ke_r, [3].

Методы [1] позднее получили развитие в решении проблемы о больших абелевых подгруппах конечных групп Шевалле, [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12].

В настоящей статье мы используем разработанные методы для перенесения основной в [1] теоремы на алгебры Шевалле.

С любой неразложимой системой корней Φ и полем K ассоциируют алгебру Шевалле $L_\Phi(K)$; ее базу составляют база определенной абелевой подалгебры H и элементы e_r $(r \in \Phi)$ такие, что $He_r \subseteq Ke_r$, [3]. Элементы e_r $(r \in \Phi^+)$ образуют базу нильтреугольной подалгебры $N\Phi(K)$. Мы исследуем следующие задачи, записанные в [13].

(A) *Описать коммутативные подалгебры наивысшей размерности в алгебре Шевалле $L_\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

(B) *Описать коммутативные подалгебры наивысшей размерности в подалгебре $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

2. Теорема А.И. Мальцева

В теории Картана – Киллинга полупростые комплексные алгебры Ли классифицированы, наряду с системами корней евклидовых пространств V. Простые комплексные (конечномерные) алгебры Ли $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Phi$ взаимнооднозначно соответствуют 9 сериям приведенных неразложимых систем корней Φ, [14, Таблицы I– IX]. Основной в [1] является

Теорема А.И. Мальцева. *Каждая простая алгебра Ли $\mathcal{L}_\Phi$, исключая тип A_2, B_4, D_4, G_2, с точностью до автоморфизмов имеет только одну коммутативную подалгебру наивысшей размерности с нильпотентными элементами. Эта размерность равна $[n^2/4]$ для алгебр A_{n-1} $(n > 3)$, $1 + n(n-1)/2$ – для B_n $(n > 4)$, $n(n+1)/2$ – для C_n $(n \geq 2)$, $n(n-1)/2$ – для D_n $(n > 4)$, $16, 27, 36, 9, 5$ – соответственно для E_6, E_7, E_8, F_4, B_3. Алгебра B_4 имеет два класса размерности 7, D_4 – два класса размерности 6 и G_2 – три класса размерности 3.*

Для перенесения теоремы А. И. Мальцева на алгебры Шевалле используем схему ее доказательства и соответствующие методы алгебр Шевалле.

Алгебру Шевалле $\mathcal{L}_\Phi(K)$ ассоциируют с любым полем K и системой корней Φ, характеризуя базой Шевалле $\{e_r \ (r \in \Phi), \quad h_s \ (s \in \Pi)\}$ с целочисленными структурными константами, где Π – система простых корней (или база) в Φ. Более точно, по теореме Шевалле о базисе

$$e_r * e_{-r} = h_r, \quad h_s * h_r = 0, \quad h_s * e_r = \frac{2(r,s)}{(r,r)}\, e_r \quad (r, s \in \Phi);$$

$$e_r * e_s = 0 \ \ (r + s \notin \Phi \cup \{0\}), \quad e_r * e_s = N_{rs} e_{r+s} = -e_s * e_r \ \ (r + s \in \Phi),$$

где $N_{rs} = \pm 1$ или $|r| = |s| < |r + s|$ и $N_{rs} = \pm 2$ или Φ типа G_2 и $N_{rs} = \pm 2$ или ± 3. Произвол в выборе знаков констант N_{rs} описан в [3, 4.2.2].

Известно, что $p(\Phi) := \max\{(r,r)/(s,s) \mid r,s \in \Phi\} = 1, 2$ или (тип G_2) 3. *Высотой корня* r называют сумму $\mathrm{ht}(r)$ коэффициентов в разложении r по базису Π. Фиксируем в Φ систему положительных корней $\Phi^+ \supseteq \Pi$.

Элементы e_r ($r \in \Phi^+$) образуют базу нильтреугольной подалгебры $N\Phi(K)$. Ее стандартный центральный ряд $L_i = \langle Ke_r \mid r \in \Phi^+,\ \mathrm{ht}\ (r) \geqslant i\rangle$ $(i = 1, 2, \dots)$ при $p(\Phi)!K = K$ есть также и нижний и верхний центральный ряд. Для любого корня r отображение $t \to x_r(t) := exp\ (tad.e_r)$ $(t \in K)$ дает изоморфизм аддитивной группы поля K в группу автоморфизмов $Aut\ \mathcal{L}_\Phi(K)$. Корневые подгруппы $X_r = x_r(K)$ порождают *группу Шевалле* $\Phi(K)$ с унипотентной подгруппой $U\Phi(K) = \langle X_r\ (r \in \Phi^+)\rangle$ [3]. В [1] используется

Лемма 1. В алгебре Ли $\mathcal{L}_\Phi = \mathcal{L}_\Phi(C)$ любая максимальная коммутативная подалгебра с нильпотентными элементами переводится автоморфизмом из $\Phi(C)$ в нильпотентную подалгебру $N\Phi(C)$.

А.И. Мальцев [1] назвал подмножество Ψ системы корней Φ *коммутативным*, если $r + s \notin \Phi$ для любых корней $r, s \in \Psi$. В этом случае коммутативны подмножества корней $w(\Psi)$ для любого элемента w группы Вейля

$$W = W(\Phi) = \langle w_r \mid r \in \Phi\rangle = \langle w_r \mid r \in \Pi\rangle, \quad w_r(x) = x - \frac{2(r,x)}{(r,r)}\, r \ \ (x \in V),$$

а также подалгебра $A_\Psi = \sum_{r\in\Psi} Ke_r$. Наибольший порядок коммутативных множеств корней в Φ оказывается равен наивысшей размерности коммутативных подалгебр алгебры $N\Phi(C)$.

Пусть $\{r\}^+$ — множество корней $s \in \Phi^+$ таких, что в разложении $s - r$ по базе Π все коэффициенты неотрицательны, $T(r)$ и $Q(r)$ – подалгебры в $N\Phi(K)$ с базисом, соответственно, $\{e_s \mid s \in \{r\}^+\}$ и $\{e_s \mid s \in \{r\}^+,\ s \neq r\}$.

Приведем описание коммутативных подмножеств корней в Φ наибольшего порядка, которое вытекает из [1]. Для систем корней типа E_m, $m = 6, 7, 8$, и F_4 используем обозначения из [14] простых корней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Лемма 2. Коммутативные множества наибольшего порядка в системе корней Φ типа $\neq G_2$ исчерпывают, с точностью до ее изометрий $^-$и W-сопряженности, следующие.

Тип A_{n-1}**:** $\{r\}^+$, где r - простой корень с $\bar{r} = r$ или $r + \bar{r} \in \Phi,\ r < \bar{r}$.

Тип B_n**:** $\{2a + b\}^+ \cup \{q\}^+$, где a, b – простые корни, $|a| < |b|$, и q - максимальный короткий корень.

Тип C_n**:** $\{q\}^+$, где q - длинный простой корень.

Тип D_n**:** $\{r\}^+$, где r - простой корень и $r < \bar{r}$ для любой симметрии $^-$.

Тип E_8**:** $\{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6\}^+$.

Тип E_n**, n=6 или 7 :** $\{\alpha_n\}^+$.

Тип F_4**:** $\{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4\}^+ \cup \{\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4\}^+$.

Учитывая w_s-инвариантность подмножества корней $\Phi^+ \setminus \{s\}$ для любого простого корня s, с помощью леммы 2 получаем

Следствие. Пусть Ψ есть коммутативное подмножество корней из леммы для типа A_n, C_n, D_n, E_6 или E_7. Тогда для любого простого корня $s \notin \Psi$ подмножества Ψ и $w_s(\Psi)$ в Φ^+ совпадают или $^-$-симметричны.

3. Большие абелевы подалгебры в алгебрах $N\Phi(K)$ классических типов

Большой $\mathcal{P}$-подгруппой конечной группы ($\mathcal{P}$ – теоретико-групповое свойство) называют всякую $\mathcal{P}$-подгруппу наибольшего порядка. Абелевы подалгебры наивысшей размерности алгебры Ли назовем *большими абелевыми,* аналогично большим абелевым подгруппам конечной группы Шевалле.

С учетом леммы 1, исследуем большие абелевы подалгебры алгебры $N\Phi(K)$. Их описание с точностью до ее автоморфизмов, в отличие от [1], оказывается более единообразным.

Теорема 1. *В алгебре $N\Phi(K)$ классического типа Φ над любым полем K, с точностью до ее автоморфизмов, большая абелева подалгебра M для типов A_n, D_n и C_n совпадает с идеалом $T(r)$ для единственного простого корня r и размерности, соответственно, $[n^2/4]$, $n(n-1)/2$ и $n(n+1)/2$. В остальных случаях M переводится в идеал автоморфизмом из Aut $\mathcal{L}_\Phi(K)$, в частности, для типа B_n $(n > 4)$ – в централизатор $C(L_n)$.*

Замечание 1. Для типов E_6 и E_7 большая абелева подалгебра M также совпадает с идеалом $T(r)$ для единственного простого корня r .

В [13] записана **гипотеза (А):** *Всякий коммутативный идеал наивысшей размерности алгебры $N\Phi(K)$ является её коммутативной подалгеброй наивысшей размерности.*

Гипотеза была подтверждена в статье [15], вместе с доказательством существования и описанием больших абелевых идеалов алгебры $N\Phi(K)$.

Отметим, что порядки подалгебр из теоремы Мальцева соответствуют порядкам коммутативных подмножеств корней Ψ из леммы 2.

Для простого числа p подмножество $\Psi \subseteq \Phi$ называем *p-коммутативным*, согласно Е. П. Вдовину [10], если в алгебре Ли $N\Phi(K)$ над любым полем K характеристики p имеем $e_r * e_s = 0$ при всех $r, s \in \Psi$. При $p(\Phi)!K = K$ понятия p-коммутативности и коммутативности, очевидно, совпадают.

Ясно, что для коммутативной подалгебры M алгебры $N\Phi(K)$ над полем K характеристики $p > 0$ множество корней $\mathcal{L}_1(M)$ является p-коммутативным. Из [1], [10] и [11] несложно вытекает

Лемма 4. Наивысшая размерность коммутативных подалгебр алгебры Ли $N\Phi(K)$ над полем K характеристики p равна наибольшему порядку p-коммутативных при $2 \le p \le p(\Phi)$ и коммутативных в остальных случаях множеств корней в Φ.

Доказательство. Когда $H \subseteq T(r_1) + T(r_2) + \cdots + T(r_m)$ и любая замена $T(r_i)$ на $Q(r_i)$ нарушает включение, назовём $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\} = \mathcal{L}(H)$ *множеством углов для H.*

Как и в [3, Lemma 5.3.1], далее используем *регулярное упорядочение корней* $>$; тогда из неравенства $\mathrm{ht}(r) > \mathrm{ht}(s)$ следует $r > s$.

Первым углом ненулевого элемента $a \in N\Phi(K)$ назовем корень s, если в разложении $a = \sum_{r\in\Phi^+} \lambda_r e_r$ по базе, упорядоченной согласно возрастанию корней, λ_s есть первый ненулевой коэффициент. Множество первых углов всех элементов подмножества $M \subseteq N\Phi(K)$ обозначаем через $\mathcal{L}_1(M)$.

Утверждение леммы сейчас несложно вытекает из леммы 2 и ее следствия.

В [11] подмножество Ψ системы корней Φ названо *нормальным*, если при $r \in \Psi$ всегда имеем $\{r\}^+ \subseteq \Psi$. Очевидно, каждое подмножество $\Psi \subseteq \Phi$ из леммы 2 нормально и поэтому A_Ψ есть коммутативный идеал.

Доказательство теоремы.

Тип A_n. Пусть A – большая коммутативная подалгебра алгебры $N\Phi(K)$. Рассмотрим случай $n = 2m + 1$. Согласно лемме 2, в этом случае имеется единственное максимальное коммутативное подмножество корней $\{r\}^+$, где r - простой корень и $\bar{r} = r$. Если подалгебра A имеет простой угол $q \neq r$, то при подходящей нумерации простых корней q вошёл бы в $\mathcal{L}_1(A)$, и, следовательно, в некоторое максимальное коммутативное подмножество корней, что противоречит лемме 2. Таким образом, $A \subseteq T(r) + L_2$. Предположим, что $A \subseteq T(r) + L_i$ и A имеет угол s высоты i $(2 \leq i \leq m)$, не входящий в $\{r\}^+$. Тогда подалгебра $n_p(1)(A) \subseteq N\Phi(K)$, где p – простой корень с условием $s-p \in \Phi^+$, $n_p(1)$ – мономиальный элемент группы Шевалле [3], будет иметь угол $s - p \notin \{r\}^+$ высоты $i-1$, что противоречит сделанному выше предположению. Таким образом, A содержится в идеале $T(r)$ и совпадает с ним, в силу максимальности.

Рассмотрим случай $n = 2m$. В этом случае, согласно лемме 2, максимальные коммутативные подмножества корней исчерпываются множествами $\{r\}^+$ и $\{\bar{r}\}^+$, где r, $\bar{r}$ – простые корни, $r + \bar{r} \in \Phi^+$. Как и в рассмотренном выше случае $n = 2m + 1$, получаем, что $A \subseteq T(r) + T(\bar{r})$. Предположим, что $\mathcal{L}_1(A) = \{r\}^+$. Пусть $m > 1$ и

$$x = ae_r + be_{\bar{r}} \mod L_2, \quad a \neq 0,$$

$$y = ce_{r+p} + de_{r+\bar{r}} + fe_{\bar{r}+q} \mod L_3, \quad c \neq 0,$$

где $r + p \in \Phi^+$, $p \neq \bar{r}$, $\bar{r} + q \in \Phi^+$, $q \neq r$. Тогда

$$x * y = -afe_{r+\bar{r}+q} + bce_{r+\bar{r}+p} = 0,$$

следовательно, $b = f = 0$, то есть $x, y \in T(r)$, и $A \supseteq Ke_r$. Тогда, в силу коммутативности, s-проекция элементов из A для всех $s \in \{\bar{r}\}^+ \setminus \{r\}^+$ является нулевой, следовательно, $A \subseteq T(r)$. В случае $\mathcal{L}_1(A) = \{\bar{r}\}^+$ аналогично доказывается, что $A = T(\bar{r})$.

Для типа A_2, когда алгебра Ли $N\Phi(K)$ представляется ассоциированной к алгебре $NT(3, K)$ (нижних) нильтреугольных 3×3 матриц над K с матричными единицами e_{ij} $(1 \leq j < i \leq 3)$. В силу [16, Теорема 3], любая матрица $\alpha = ||a_{uv}|| \in GL(2, K)$ дает здесь автоморфизм

$$\bar{\alpha}: \ e_{i+1,i} \to a_{i1}e_{21} + a_{i2}e_{32} \ (i = 1, 2), \quad e_{31} \to (det \ \alpha)e_{31},$$

причем группа $AutN\Phi(K)$ факторизуется подгруппой центральных автоморфизмов и $\bar{G}L(2, K)$. Поэтому все большие абелевы алгебры Ли $N\Phi(K)$ переводятся здесь друг в друга ее автоморфизмами.

Замечание 2. Последнее утверждение не имеет аналога для соответствующей унитреугольной группы $UT(3, K)$, см. там же ее автоморфизмы. (Элементы $e + e_{21}, e + e_{21} + e_{32}$ не автоморфны, в силу различия их жордановой формы, а при $2K = 0$ различны и их групповые порядки.)

Тип B_n. Рассмотрим случай $2K = K$. Обозначим $p_{i,\pm j} = \varepsilon_i \mp \varepsilon_j$, $p_{i0} = \varepsilon_i$ $(1 \leq j < i \leq n)$, где ε_1, ε_2, …, ε_n – ортнонормированный базис n-мерного евклидова пространства (ср. [14]). Для краткости будем обозначать $e_{p_{ij}} = e_{ij}$. Для типов B_2 и B_3 идеалы $T(p_{21})$ и $T(p_{32})$ будут единственными коммутативными подалгебрами наивысшей размерности 3 и 5, соответственно.

Согласно [1], для типа $G = B_n$, $n > 3$, большие коммутативные подмножества корней исчерпываются множествами $\{p_{2,-1}\}^+ \cup p_{i0}$, $1 \leq i \leq n$, а при $n = 4$ ещё множеством $\{p_{43}\}^+$. Пусть $p_{10} < p_{21} < \cdots < p_{n,n-1}$. В случае $\mathcal{L}_1(A) = \{p_{43}\}^+$ очевидно, что $A = T(p_{43})$.

Пусть $\mathcal{L}_1(A) = \{p_{2,-1}\}^+ \cup p_{10}$. Если подалгебра A имеет простой угол $q \neq p_{10}$, то при подходящей нумерации простых корней q вошёл бы в $\mathcal{L}_1(A)$, и, следовательно, в некоторое максимальное коммутативное подмножество корней, что противоречит [1]. Таким образом, $A \subseteq T(p_{10}) + L_2$. Предположим, что $A \subseteq T(p_{10}) + L_i$ и A имеет угол $p_{k,k-i}$ высоты i $(i + 1 \leq k \leq n, \ 2 \leq i \leq n - 1)$, не входящий в $\{p_{10}\}^+$. Тогда подалгебра

$n_{k-i+1,k-i}(1)(A) \subseteq N\Phi(K)$ будет иметь угол $p_{k,k-i+1}$ высоты $i-1$, что противоречит сделанному предположению. Таким образом, $A \subseteq T(p_{10})$.

Пусть теперь $\mathcal{L}_1(A) = \{p_{2,-1}\}^+ \cup p_{i0}$, $(1 \le i \le n-1)$. Рассмотрим $a \in A$ вида

$$a = a_{i0}e_{i0} + a_{i+1,0}e_{i+1,0} \mod L_{i+3}, \quad a_{i0} \neq 0.$$

С точностью до подходящего автоморфизма $x_{p_{i+1,i}}(t)$ (где $x_{p_{i+1,i}}(t)$ – корневой элемент групы Шевалле [3]), можем считать, что $a_{i+1,0} = 0$. Тогда $B = n_{i+1,i}(1)(A) \subseteq T(p_{10})$ и $\mathcal{L}_1(B)$ содержит $p_{i+1,0}$, откуда $\mathcal{L}_1(B) = \{p_{2,-1}\}^+ \cup p_{i+1,0}$. Таким образом, подалгебра A переводится автоморфизмом алгебры $L\Phi(K)$ в подалгебру $T(p_{2,-1}) + Ke_{n0}$, являющуюся идеалом.

Рассмотрим случай $2K = 0$. Для типа B_2 большие коммутативные подалгебры наивысшей размерности содержат идеал $T(p_{20})$, являющийся центром алгебры $N\Phi(K)$, и исчерпываются подалгебрами $K(ae_{10} + be_{21}) + T_{20}$, $(a, b) \neq (0, 0)$, которые являются идеалами. При $n > 2$ единственным 2-коммутативным множеством, в обозначениях леммы 2, является $\{a\}^+$. Это следует из описания больших абелевых подгрупп группы U типа B_n над полем характеристики 2 [5], а также из того, что каждому 2-коммутативному множеству корней соответствует абелева подгруппа, порождённая соответствующими корневыми подгруппами. По аналогии с типом A_n, $n = 2m+1$, убеждаемся, что идеал $T(a)$ будет единственной коммутативной подалгеброй наивысшей размерности.

Тип C_n рассматривается аналогично типу B_n, случай $2K = 0$.

Тип D_n. Уточним описание в [13] больших абелевых идеалов в $N\Phi(K)$. Автоморфизмы алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа D_4 описаны в [17, Теорема 6]. Графовые автоморфизмы соответствуют симметриям графа Кокстера системы корней Φ, действующим как симметрическая группа подстановок степени 3 на простых корнях $r_1 = r < r_2 = \bar{r} < q = \bar{q} < r_3 = \bar{\bar{r}}$ ($^-$ – симметрия порядка 3). Когда $2K = K$, любой автоморфизм действует по модулю L_2 как произведение диагонального и графового автоморфизмов. При $2K = 0$ расширение дают автоморфизмы $\widehat{\beta}$, сопоставляемые в [17] каждой матрице $\beta = ||b_{uv}|| \in SL(3, K)$. Если $s = q + r_1 + r_2 + r_3$, то

$$\widehat{\beta}: \; e_{r_i} \to \sum_{m=1}^{3} b_{im}e_{r_m}, \quad e_q \to e_q, \quad e_{q+r_i} \to \sum_{m=1}^{3} b_{im}e_{q+r_m}, \quad e_s \to e_s,$$

$$e_{q+r_i+r_j} \to det \begin{bmatrix} b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} \\ b_{j1} & b_{j2} & b_{j3} \\ e_{s-r_1} & e_{s-r_2} & e_{s-r_3} \end{bmatrix} \;\; (i \neq j), \quad e_{s+q} \to e_{s+q}.$$

Для простых симметричных корней r и $\bar{r} \neq r$ ($\bar{\bar{r}} = r$) системы Φ типа D_n $(n \ge 4)$ определено [17, Теорема 8] изоморфное вложение $^\sim$ подгруппы

$$S := \{A = ||a_{uv}|| \in SL(2, K) \;:\; 2a_{11}a_{12} = 2a_{21}a_{22} = 0\}$$

группы $SL(2, K)$ в группу автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$ по правилу

$$\widetilde{A}: \quad e_r \to a_{11}e_r + a_{12}e_{\bar{r}}, \quad e_{\bar{r}} \to a_{21}e_r + a_{22}e_{\bar{r}}, \quad e_s \to e_s \quad (s \in \Pi \setminus \{r, \bar{r}\}).$$

Умножая произвольный автоморфизм алгебры Ли $N\Phi(K)$ типа D_n на выделенные автоморфизмы, добиваемся его тождественности по модулю L_2, то есть сводим его к известным гиперцентральным автоморфизмам [18].

Доказательство того, что произвольная коммутативная подалгебра алгебры $N\Phi(K)$ совпадает с одним из ее идеалов проводится по аналогии с рассмотренными выше типами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мальцев А. И. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Известия АН СССР. Сер. матем. 1945. Т. 9, № 4. С. 291-300.

2. Schur I. Zur theorie der vertauschbaren matrizen // J. reine und angew. Math. 1905. Vol. 130. P. 66-76.

3. Carter R. Simple groups of Lie type // Wiley and Sons, New York, 1972.

4. Barry M. J. J. Large Abelian subgroups of Chevalley groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1979. Vol. 27. № 1. P. 59-87.

5. Barry M. J. J., Wong W. J. Abelian 2-subgroups of finite symplectic groups in characteristic 2 // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1982. Vol. 33. № 3. P. 345-350.

6. Wong W. J. Abelian unipotent subgroups of finite orthogonal groups // J. Austral. Math. Soc., Ser. A. 1982. Vol. 32, № 2. P. 223-245.

7. Wong W. J. Abelian unipotent subgroups of finite unitary and symplectic groups // J. Austral. Math. Soc., Ser. A. 1982. Vol. 33, № 2. P. 331-344.

8. Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи математических наук. 1986. Т. 41, № 1 (247). С. 57-96.

9. Вдовин Е. П. Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных группах Шевалле // Матем. заметки. 2000. Т. 68, вып. 1. С. 53-76.

10. Вдовин Е. П. Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 523-544.

11. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // J. Algebra. 2012. Vol. 349, iss. 1, № 1. P. 98-116.

12. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. Thompson subgroups and large abelian unipotent subgroups of Lie-type groups // J. Siberian Federal University. Math. & Physics. 2013. Vol. 6, № 1. P. 64-74.

13. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 86. № 4. P. 384-388.

14. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли (главы IV – VI). // М.: Мир, 1976.

15. Кириллова Е.А., Сулейманова Г.С. Коммутативные идеалы наибольшей размерности нильтреугольной подалгебры алгебры Шевалле над полем // Труды института математики и механики УрО РАН. 2018. Т.24, №3. С. 98-108.

16. Левчук В.М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. Ч. 2. Группы автоморфизмов // Сибирский математический журнал. 1983. Т. 24. №. 4. С. 64-80.

17. Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика 1990. Т. 29. № 2. С. 315-338.

18. Левчук В. М., Литаврин А. В. Гиперцентральные автоморфизмы нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 467-477.

REFERENCES

1. Mal'tsev A.I. 1945, "Commutative subalgebras of semi-simple Lie algebras", *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, Ser. Mat., 1945, vol. 9, no. 4, pp. 291–300 (in Russian)

2. Schur I. 1905, "Zur theorie der vertauschbaren matrizen", *J. reine und angew. Math.*, vol. 130, pp. 66-76.

3. Carter R. 1972, "Simple groups of Lie type", *Wiley and Sons, New York*.

4. Barry M. J. J. 1979, "Large Abelian subgroups of Chevalley groups", *J. Austral. Math. Soc. Ser. A.*, vol. 27, no. 1, pp. 59-87.

5. Barry M. J. J., Wong W. J. 1982, "Abelian 2-subgroups of finite symplectic groups in characteristic 2", *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, vol. 33, no. 3, pp. 345-350.

6. Wong W. J. 1982, "Abelian unipotent subgroups of finite orthogonal groups", *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, vol. 32, no. 2, pp. 223-245.

7. Wong W. J. 1982, "Abelian unipotent subgroups of finite unitary and symplectic groups", *J. Austral. Math. Soc., Ser. A*, vol. 33, no. 2, pp. 331-344.

8. Kondrat'ev A.S. 1986, "Subgroups of ?nite Chevalley groups", *Russian Math. Surveys*, vol. 41, no. 1, pp. 65–118.

9. Vdovin E. P. 2001, "Maximal Orders of abelian Subgroups in Finite Chevalley Groups", *Mat. Zametki*, vol. 69, no. 4, pp. 524–549.

10. Vdovin E. P. 2001, "Large abelian unipotent subgroups of finite Chevalley groups", *Algebra and Logic*, vol. 40, no. 5, pp. 292–305.

11. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. 2012, "Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type", *J. Algebra*, vol. 349, iss. 1, no 1, pp. 98-116.

12. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. 2013, "Thompson subgroups and large abelian unipotent subgroups of Lie-type groups", *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, vol. 6, no.1, pp. 64-74.

13. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. 2015, "The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 86, no 4, pp. 384-388.

14. N. Bourbaki, Groupes et algebres de Lie (Chapt. IV–VI). Paris.: Hermann, 1968.

15. Kirillova E. A., Suleimanova G. S. "Highest dimension commutative ideals of a niltriangular subalgebra of a Chevalley algebra over a field", *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, vol. 24, no 3, pp. 98-108.

16. Levchuk V. M. 1983, "Connections between a unitriangular group and certain rings. 2. Groups of automorphisms", *Siberian mathematical journal*, vol. 24, no. 4, pp. 543-557.

17. V.M. Levchuk. 1990, "Automorphisms of unipotent subgroups of Chevalley groups", *Algebra and Logic*, vol. 29, no. 2, pp. 211–224.

18. Levchuk V. M., Litavrin A. V. 2016, “Hypercentral automorphisms of nil-triangular subalgebras in Chevalley algebras“, *Siberian Electronic mathematical Reports*, vol. 13, pp. 467-477.

Получено 25.06.2018
Принято к печати 15.10.2018