

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-210-218

К проблеме обобщённых характеров

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры Прикладной математики и системного анализа СГТУ им. Гагарина Ю. А., г. Саратов
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com

Матвеева Ольга Андреевна — кандидат физико-математических наук
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Аннотация

Проблема обобщённых характеров заключается в решении задачи Ю. В. Линника, поставленной им в 1949 году, относительно аналитического продолжения как целых функций на комплексную плоскость одного класса рядов Дирихле и в решении гипотезы Н. Г. Чудакова, выдвинутой им в 1950 году о том, что любой конечнозначный числовой характер, отличный от нуля почти на всех простых числах и имеющий ограниченную сумматорную функцию, является характером Дирихле. Позднее такие характеры получили название неглавных обобщённых характеров. Коэффициенты рядов Дирихле в задаче Ю. В. Линника также определялись неглавными обобщёнными характерами.

Кроме Ю. В. Линника и Н. Г. Чудакова решениями проблемы обобщённых характеров занимались такие известные математики как В. Г. Спринджук, К. А. Родосский, Б. М. Бредихин и многие другие, но проблема оставалась открытой.

Последние годы авторы разработали аппроксимационный подход, основанный на приближении в правой полуплоскости комплексной плоскости функций, заданных рядами Дирихле, полиномами Дирихле, в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами. Ранее этот подход позволил авторам решить задачу Ю. В. Линника, а в данной работе приводится решение гипотезы Н. Г. Чудакова.

Ключевые слова: обобщённый характер, аппроксимационные полиномы Дирихле, проблема обобщённых характеров.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева. К проблеме обобщённых характеров // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 210–218.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-210-218

On the problem of generalized characters

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Doctor of technical sciences, professor, Department of Applied Mathematics and Systems Analysis, Saratov State Technical University, Saratov

e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com

Matveeva Olga Andreevna — Candidate of physico-mathematical sciences

e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Abstract

The problem of generalized characters lies in the solution of Linnik's problem, posed by him in 1949, with respect to the analytic continuation of entire functions to the complex plane of a class of Dirichlet series and in the solution of the hypothesis of N. G. Chudakov, who put forward in 1950 that any finite-valued numerical character, different from zero on almost all prime numbers and having a bounded summation function, is a Dirichlet character. Later such characters were called non-principal generalized characters. The coefficients of the Dirichlet series in Linnik's problem were also determined by non-principal generalized characters.

Except Yu. V. Linnik and N. G. Chudakov's solutions to the problem of generalized characters were handled by such well-known mathematicians as V. G. Sprindzhuk, K. A. Rodosky, B. M. Bredikhin and many others, but the problem remained open.

In recent years, the authors have developed an approximation approach based on the approximation in the right half-plane of the complex plane of functions given by Dirichlet series by Dirichlet polynomials in the problem of analytic continuation of Dirichlet series with multiplicative coefficients. Earlier this approach allowed the authors to solve the problem of Yu. V. Linnik, and in this paper the solution of the hypothesis of N. G. Chudakov is given.

Keywords: generalized character, approximate Dirichlet polynomials, the problem of generalized characters.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva. 2018, "On the problem of generalized characters", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 210–218.

1. Введение

Рассмотрим ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, s = \sigma + it, \quad (1)$$

где $h(n)$ – конечнозначный числовой характер, отличный от нуля почти для всех простых и имеющий ограниченную сумматорную функцию

$$S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = O(1).$$

Такие характеры в 1950 году получили название неглавных обобщённых характеров (см. [1], [2]).

В случае, когда

$$S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = d \cdot x + O(1), d \neq 0.$$

характеры $h(n)$ стали называться главными обобщёнными характерами.

В 1949 году Ю. В. Линник поставил задачу показать аналитическое продолжение ряда (1) как целой функции на комплексную плоскость. Решением задачи Ю. В. Линника занимались многие известные ученые. Но попытки решить эту задачу оказались безуспешными. Профессор Н. Г. Чудаков видел решение задачи Ю. В. Линника в доказательстве высказанного им в 1950 году ([1], [2], [3]) предположения о том, что любой обобщённый характер является характером Дирихле. В течение всей своей жизни Н. Г. Чудаков неоднократно обращался к решению этой гипотезы.

В 1964 году В. В. Глазков, ученик Н. Г. Чудакова, элементарными методами доказал гипотезу для главных обобщённых характеров (см. [4]).

В 1970 году на Международном математическом конгрессе в Ницце Н. Г. Чудаков сформулировал гипотезу для неглавных обобщённых характеров как одну из актуальных задач аналитической теории чисел (см. [5]).

В середине 70-х годов Н. Г. Чудаков пытался доказать свою гипотезу обращаясь к степенным рядам. Он пытался показать, что степенные ряды с неглавными обобщёнными характерами удовлетворяют условиям известных теорем Сёге или Даффина-Шеффера (см. [6]). Но эти попытки были безуспешными.

В 1983 году В. Н. Кузнецов, используя результат теоремы Сёге для степенных рядов, показал, что если ряд Дирихле (1) аналитически продолжим целым образом на комплексную плоскость с определенным порядком роста модуля, то $h(n)$ является характером Дирихле (см. [7]).

В начале 2010-х годов в работах О. А. Матвеевой ([8],[9],[10],[11]) были разработаны основные положения аппроксимационного подхода в задаче изучения аналитических свойств рядов Дирихле, основанного на построении полиномов Дирихле, сходящихся в правой полуплоскости к функции, определенной рядом Дирихле, и переносе отдельных свойств полиномов Дирихле на ряды Дирихле.

В последние годы авторы в результате применения аппроксимационного подхода получили ряд новых результатов в задаче аналитического продолжения рядов как целых функций на комплексную плоскость (см. [12],[13],[14],[15]). Так в работе [14] было получено условие, выраженное в терминах поведения функции, определенной рядом Дирихле, на мнимой оси, при котором ряд Дирихле допускает аналитическое продолжение как целой функции на комплексную плоскость.

В работе [15] авторы показали, что ряды Дирихле (1) удовлетворяют условию аналитического продолжения целым образом на комплексную плоскость, полученному в работе [14], и, тем самым, получили решение задачи Ю. В. Линника.

В данной работе показано, что ряды Дирихле (1), которые в силу результата работы [15] продолжаются целым образом на комплексную плоскость, и при этом выполняется условие на рост модуля, приведенное в работе [7], то есть как отмечалось выше любой неглавный обобщённый характер является характером Дирихле.

Таким образом в работе показано, что гипотеза Н. Г. Чудакова получена как следствие решения задачи Ю. В. Линника и ее решение закрывает проблему обобщённых характеров.

2. Некоторые свойства аппроксимационных полиномов для рядов Дирихле, коэффициенты которых определены неглавными обобщёнными характерами

В работах [12]–[15] приведены определения и отдельные свойства аппроксимационных полиномов $Q_n(s)$, необходимые для решения задачи Ю. В. Линника.

Здесь приведен ряд свойств аппроксимационных полиномов Дирихле $Q_n(s)$, которые будут использованы для доказательства гипотезы Н. Г. Чудакова относительно обобщённых характеров. Как отмечалось в работах [14], [15] аппроксимационные полиномы, то есть последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, которые в каждом прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T$, равномерно сходятся к функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (1), и нормы этих полиномов ограничены в D_T константой, зависящей только от величины T , определяется не однозначно. Такие полиномы выбираются определенным образом в зависимости от поставленной задачи. Опишем выбор аппроксимационных полиномов в нашем случае и укажем некоторые свойства таких полиномов.

Рассмотрим степенной ряд, соответствующий ряду Дирихле (1):

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)x^n. \quad (2)$$

В работе [15] показано, что ряд Дирихле (1) определяет целую функцию, следовательно, согласно работе [16] степенной ряд (2) имеет в точке $x = 1$ односторонние производные любого порядка, то есть функция $g(x)$ бесконечное число раз дифференцируема на отрезке $[0;1]$. Известно (см. [17]), что для величин наилучшего приближения функции $g(x)$ на отрезке $[0;1]$ алгебраическими полиномами степени $n : E_n(g(x))$ имеет место оценка

$$E_n(g(x)) = o\left(\frac{1}{n^m}\right), \quad (3)$$

при любом натуральном m .

Рассмотрим последовательность алгебраических полиномов $\hat{T}_n(x)$, заданных на отрезке $[0;1]$ и полученных из многочленов Чебышева в результате линейного преобразования. Система полиномов $\hat{T}_n(x)$ будет ортогональной на отрезке $[0;1]$ с соответствующей весовой функцией.

Рассмотрим разложение функции $g(x)$ на отрезке $[0;1]$ на системе полиномов $\hat{T}_n(x)$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \hat{T}_k(x) \quad (4)$$

Известно (см. [17]), что последовательность алгебраических полиномов

$$P_m(x) = S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \hat{T}_k(x)$$

приближает функцию $g(x)$ на отрезке $[0;1]$ в $\ln n$ раз хуже, чем наилучшее приближение, т. е.

$$\|g(x) - P_n(x)\|_{C[0;1]} \leq (3 + \ln n) E_n(x).$$

Отсюда в силу (3) получаем

$$\|g(x) - P_n(x)\|_{C[0;1]} = O\left(\frac{1}{n^m}\right), \quad (5)$$

где m – любое натуральное, и следовательно

$$|c_n| = O\left(\frac{1}{n^m}\right). \quad (6)$$

Рассмотрим последовательность полиномов $\hat{\hat{T}}_k(x)$, которые отличаются от полиномов $\hat{T}_k(x)$ тем, что в них отсутствуют свободные члены, так как $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)x^k$, то в силу (5) имеет место оценка

$$\|g(x) - \hat{P}_n(x)\|_{C[0;1]} = O\left(\frac{1}{n^m}\right), \quad (7)$$

где m – любое натуральное заданное и где

$$\hat{P}_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \hat{\hat{T}}_k(x) = \sum_{k=1}^n b_{n,k} x^k.$$

Рассмотрим последовательность полиномов Дирихле

$$Q_k(s) = \sum_{k=1}^n \frac{b_{n,k}}{k^s} \quad (8)$$

В работе [8] показано, что в силу (7) имеет место оценка

$$\|f(s) - Q_n(s)\|_{C(D_T)} = O\left(\frac{1}{n^m}\right),$$

где m – любое заданное натуральное, и как показано в [12] для функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (1), для каждого заданного m выполняется оценка

$$\|f(s) - Q_k(s)\|_{C(D_T)} \leq C \cdot \frac{1}{n^m}, \quad (9)$$

где константа C зависит от величины T .

Следовательно полиномы Дирихле (8) являются аппроксимационными полиномами для ряда Дирихле (1).

Докажем ряд утверждений относительно свойств аппроксимационных полиномов Дирихле вида (6), которые будут использованы при доказательстве основного результата.

ЛЕММА 1. *Для производной k -го порядка полинома $Q_n(s)$ в прямоугольнике D_T имеет место оценка*

$$\left\| Q_n^{(k)}(s) \right\|_{C(D_T)} \leq C \ln^k n,$$

где константа C зависит только от величины T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив к производной полинома $Q_n(s)$ формулу суммирования Абеля, получим

$$\|Q_n'(s)\|_{C(D_T)} \leq \ln n \|Q_n(s)\|_{C(D_T)}$$

Учитывая, что в полосе $: 0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$

$$|Q_n(s)| < C,$$

где константа C зависит только от T , и повторив рассуждения k раз, получим утверждение леммы 1. $\square$

ЛЕММА 2. *Для любого k в прямоугольнике D_T имеет место оценка*

$$\left\| Q_m^{(k)}(s) - Q_n^{(k)}(s) \right\| \leq C \cdot \frac{1}{n^m},$$

где m – любое натуральное, а константа C при каждом m зависит только от T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (3)

$$\|f(s) - Q_n(s)\|_{C(D_T)} = O\left(\frac{1}{n^m}\right),$$

где m – любое заданное натуральное.

Отсюда следует

$$\|Q_{n+1}(s) - Q_n(s)\|_{C(D_T)} = O\left(\frac{1}{n^m}\right),$$

где m – любое.

Эта оценка в силу леммы 1 дает утверждение леммы 2. $\square$

ЛЕММА 3. Для любого заданного натурального k имеет место оценка

$$\left\| f^{(k)}(s) - Q_n^{(k)}(s) \right\|_{C(D_T)} = O\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство леммы 3 следует из следующего разложения в ряд в прямоугольнике D_T :

$$f^{(k)}(s) = Q_n^{(k)}(s) + \sum_{c=n}^{\infty} (Q_{c+1}^{(k)}(s) - Q_c^{(k)}(s)),$$

который равномерно сходится в силу леммы 2. $\square$

ЛЕММА 4. Для любого k и $s_0 = 0$ последовательность $Q_n^{(k)}(s_0)$ сходится к $f^{(k)}(s_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы 4 следует из леммы 3. $\square$

ТЕОРЕМА 1. Для точек s , лежащих в круге радиуса R с центром в нуле, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что для всех $n \geq n_0$ имеет место неравенство

$$|f(s) - Q_n(s)| < \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [15] было показано, что ряд Тейлора функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (1), сходится равномерно в любом круге радиуса R с центром в нуле. Следовательно для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N_0 , что в круге радиуса R будет иметь место неравенство

$$|f(s) - S_{N_0}(s)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (10)$$

где $S_{N_0}(s)$ – частичная сумма ряда Тейлора порядка N_0 .

В силу леммы 4 и леммы 3 существует n_0 , что для всех s , лежащих в круге радиуса R , для $n \geq n_0$ имеет место оценка

$$|S_{N_0}(s) - S_{N_0,n}(s)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

где $S_{N_0,n}(s)$ – частичная сумма ряда Тейлора многочлена $Q_n(s)$ порядка N_0 . Отсюда в силу оценки (k) следует утверждение теоремы 1. $\square$

3. К проблеме обобщённых характеров

Прежде всего докажем гипотезу Н. Г. Чудакова относительно обобщённых характеров. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Любой неглавный обобщённый характер является характером Дирихле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [7] доказано, что ряд Дирихле с конечнозначными коэффициентами тогда и только тогда определяет целую функцию $f(s)$, удовлетворяющую следующему условию роста модуля

$$|f(x)| < C e^{|\sigma| \ln |s| + A(s)}, \sigma < 0, \quad (11)$$

где A – некоторая положительная константа, когда коэффициенты этого ряда периодичны, начиная с некоторого номера.

При этом в [7] показано, что в случае периодических, начиная с некоторого номера коэффициентов, константа $A \leq \frac{\pi}{2}$, а константа C определяется величиной $|\hat{g}(e^{-x})|$ на отрезке $[\rho; \infty]$, где $\rho > 0$, $g(x)$ – соответствующий степенной ряд, и $g(e^{-x}) = e^{-x} \cdot \hat{g}(e^{-x})$.

В нашем случае рассмотрим $f_k(s) = Q_n(s)$, где $Q_n(x)$ полиномы Дирихле, определенные по формулам (8), и рассмотрим

$$g_n(e^{-x}) = \sum_{k=1}^n b_{n,k} e^{-kx} = \sum_{k=1}^n c_k \hat{T}_k(e^{-x}).$$

В силу того, что на отрезке $[0; 1]$ для всех k выполняется оценка $\|\hat{T}_k(x)\| \leq 2$ и в силу (6) $|c_k| = O(\frac{1}{n^m})$, где m – любое натуральное, для $\hat{g}_n(e^{-x})$ на отрезке $[\rho; \infty]$ имеет место оценка вида

$$|\hat{g}_n(e^{-x})| < C,$$

где константа C не зависит от n .

Следовательно, для полиномов $Q_n(s)$ выполняется оценка

$$|Q_n(s)| < C e^{|s| \ln|s| + A|s|},$$

где константа C единая для всех n , и где $A < \frac{\pi}{2}$.

Отсюда в силу Теоремы 1 имеет место оценка вида

$$|f(s)| < C e^{|s| \ln|s| + A|s|} \quad (12)$$

где $f(s)$ – целая функция, определенная рядом Дирихле (1). Оценка (12) в силу приведенного выше результата работы [7] доказывает периодичность характера $h(n)$, т.е. доказывает утверждение теоремы 2. $\square$

4. Заключение

Отметим, что приведенное здесь доказательство гипотезы Н. Г. Чудакова относительно обобщённых характеров является следствием основного результата работы [15], т.е. является следствием решения задачи Ю. В. Линника относительно аналитического продолжения рядов Дирихле вида (1).

Таким образом, проблема обобщённых характеров, которая заключается в решении задачи Ю. В. Линника и гипотезы Н. Г. Чудакова, получила окончательное решение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чудаков Н. Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций // ДАН СССР, 1950, Т. 74, №2. С. 133–136.
2. Чудаков Н. Г., Родосский К. А. Об обобщённом характере // ДАН СССР, 1950, Т. 74, №4. С. 1137–1138.
3. Чудаков Н. Г., Павлючук А. К. О сумматорных функциях характеров числовых групп с конечной базой // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1951. Т. 38. С. 366–381.
4. Глазков В. В. Об обобщённых характерах // Некоторые вопросы теории полей. Изд-во СГУ, 1964. С. 67–78.
5. Чудаков Н. Г. Обобщённые характеры // Междунар. конгресс математиков в Ницце – 1970. Доклад советских математиков – М.: Наука, 1972. С. 335.

6. Биберах Л. Аналитическое продолжение – М: Наука, 1970.
7. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сёге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки, 1984. Т. 36, № 6. С. 805–813.
8. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, приближающих в критической полосе L -функции Дирихле // Чебышевский сборник, 2013. Т. 14, вып. 2. С. 117–121.
9. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L -функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Математика, Механика. Информатика — Саратов: Изд-во СГУ, 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 80–84.
10. Коротков А. Е., Матвеева О. А. Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Науч. ведомости Белгородского гос. ун-та. – Белгород: Изд-во БелГУ, 2013. Вып. 24. С. 47–54.
11. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L -функций Дирихле: Диссертация на соискание учебной степени канд. физ.-мат. наук по специальности 01.01.06. – Ульяновск, 2014.
12. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2016. Т. 17, вып. 3. С. 115–124.
13. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами на комплексную плоскость // Чебышевский сборник, 2017. Т. 18, вып. 4. С. 285–295.
14. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19, вып. 1. С. 124–137.
15. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К одной задаче Ю. В. Линника // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19, вып. 3. С. 202–209.
16. Кузнецов В. Н. Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле // Вычислит. методы и программирование: межвуз. сб. науч. трудов. – Саратов: Изд-во СГУ, 1987, С. 17–23.
17. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.

REFERENCES

1. Chudakov, N. G., Linnik, Yu. V., 1950, “Ob odnom klasse vpolne mul’tiplikativnyh funkcij“, *DAN SSSR*, vol. 74, issue 2, pp. 133–136.
2. Chudakov, N. G., Rodosskij K. A., 1950, “Ob obobshhennom haraktere“, *DAN SSSR*, vol. 74, issue 4, pp. 1137–1138.
3. Chudakov, N. G., Pavlyuchuk A. K., 1951, “O summatornyh funkcijah harakterov chislovyh grupp s konechnoj bazoj“, *Trudy matem. in-ta im. V.A.Steklova AN SSSRR*, vol. 38, pp. 366–381.

4. Glazkov V. V., 1964, "Ob obobshchennyh harakterah", *Nekotorye voprosy teorii polej. Leningrad.: Izd-vo LGU* pp. 67–78.
5. Chudakov, N. G., 1972, "Obobshchennye haraktery", *Mezhdunar. kongress matematikov v Nitsse. Doklad sovetskikh matematikov*, M.: Nauka, pp. 335.
6. Biberbah L., 1970, "Analiticheskoe prodolzhenie", *M.: Nauka*.
7. Kuznetsov, V. N. 1984, "Analog teoremy Sjoge dlja odnogo klassa rjadov Dirihle", *Mat. zametki.*, vol. 38, iss. 6, pp. 805–813.
8. Matveeva O. A., 2013, "On the zeros of Dirichlet polynomials that approximate Dirichlet L-functions in the critical band " *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, vol. 14, issue 2, pp. 117–121
9. Matveeva, O. A., 2013, "Approksimacionnye polinomy i povedenie L-funkcij Dirihle v kriticheskoj polose", *Saratov: izd-vo SGU, Izvestija Sarat. un-ta. Matematika, Mehanika. Informatika.*, iss. 4, vol. 2, pp. 80–84.
10. Korotkov, A. E. Matveeva, O. A. 2011, "Ob odnom chislennom algoritme opredelenija nulej celyh funkcij, opredeljaemyh rjadami Dirihle s periodicheskimi koeficientami", *Belgorod: Nauchnye vedomosti BelGU.*, iss. 24, pp. 47–54.
11. Matveeva, O. A., 2014, "Analiticheskie svojstva opredeljonnyh klassov rjadov Dirihle i nekotorye zadachi teorii L-funkcij Dirihle: Dissertacija na soiskanie uchebnoj stepeni kand. fiz.-mat. nauk po special'nosti 01.01.06", *Ul'janovsk*.
12. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2016, "O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle s mul'tiplikativnymi koeficientami", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 4, vol. 17, pp. 115–124.
13. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2017, "On the problem of analytical continuation of Dirichlet series with finite coefficients as entire functions onto the complex plane", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 4, vol. 18, pp. 285–295.
14. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2018, "Boundary behavior and the problem of analytic continuation of a certain class of Dirichlet series with multiplicative coefficients as an integral functions on the complex plane", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 2, vol. 19.
15. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2018, "On a problem of Yu. V. Linnik", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 3, vol. 19.
16. Kuznetsov V. N., 1987, "On the analytic extension of a class of Dirichlet series" *Vychislitel'nye metody i programmirovanie: Mezhvuz. sb. nauch. tr.*, Saratov, publ. SSU, vol. 1, pp. 13–23.
17. Daugavet I. K., 1977, "Vvedenie v teoriyu priblizheniya funkcij" *Leningrad.: Izd-vo LGU*, pp. 184.

Получено 18.08.2018

Принято к печати 15.10.2018