ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-202-209

К одной задаче Ю. В. Линника

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры Прикладной математики и системного анализа СГТУ им. Гагарина Ю. А., г. Саратов
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com

Матвеева Ольга Андреевна — кандидат физико-математических наук
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Аннотация

В конце 40-х годов прошлого века Ю. В. Линник поставил задачу относительно аналитического продолжения целым образом на комплексную плоскость рядов Дирихле, коэффициенты которых определяются конечнозначными числовыми характеристиками, не равными нулю на почти всех простых числах и имеющих ограниченные сумматорные функции. Такие характеры получили название неглавных обобщенных характеров. Решением задачи Ю. В. Линника занимались многие математики. В частности, этой задачей занимался Н. Г. Чудаков, который видел ее решение в доказательстве высказанного им предположения о том, что неглавный обобщенный характер является характером Дирихле.

Проблема, заключающаяся в решении задачи Ю. В. Линника и гипотезы Н. Г. Чудакова, широко известна в теории чисел. Она носит название проблемы обобщенных характеров.

В данной работе приводится решение задачи Ю. В. Линника, основанное на результатах, полученных ранее авторами относительно аналитического продолжения рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами.

Таким образом, в данной работе приведено частичное решение проблемы обобщенных характеров, поставленной в 1950-м году Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым.

Ключевые слова: аппроксимационные полиномы Дирихле, принцип симметрии Римана — Шварца, проблема обобщенных характеров.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева. К одной задаче Ю. В. Линника // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 202–209.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-202-209

On a problem of Yu. V. Linnik

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — Doctor of technical sciences, professor, Department of Applied Mathematics and Systems Analysis, Saratov State Technical University, Saratov
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com

Matveeva Olga Andreevna — Candidate of physico-mathematical sciences
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Abstract

In the late 40-s of the last century Yu. V. Linnik posed the problem of analytic continuation in an integral way to the complex plane of Dirichlet series whose coefficients are determined by finite-valued numerical characteristics that are not equal to zero on almost all primes and have bounded summation functions. Such characters are called non-principal generalized characters. Many mathematicians dealt with Linnik's problem. In particular, this task was handled by N. G. Chudakov, who saw the way to solving it in proving his suggestion that the non-principal generalized character is the Dirichlet character.

Linnik's problem and the hypothesis of N. G. Chudakov is widely known in number theory. It is called the problem of generalized characters.

In this paper we solve the problem of Yu. V. Linnik, based on the results obtained earlier by the authors concerning the analytic continuation of Dirichlet series with multiplicative coefficients.

Thus, in this paper a partial solution of the generalized character problem posed in the 1950-s Yu. V. Linnik and N. G. Chudakov.

Keywords: approximation Dirichlet polynomials, the Riemann-Schwarz symmetry principle, the problem of generalized characters

Bibliography: 15 titles.

For citation:

V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva. 2018, "On a problem of Yu. V. Linnik", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 202–209.

1. Введение

Знаменитый подход Римана в задаче аналитического продолжения дзета-функции, основанный на функциональном уравнении для тэта-функции, стал в начале 20-го века основополагающим при решении задач, связанных с аналитическим продолжением рядов Дирихле. Здесь, в первую очередь нужно отметить работы Гекке, Тейта ([1]) и многих других известных авторов, внесших весомый вклад в развитие идеи Римана. Но следует отметить значительное усложнение математического аппарата при решении соответствующих задач. Это побудила в конце 40-х годов прошлого века Ю. В. Линника к поиску новых подходов в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле. Им была поставлена задача аналитического продолжения рядов Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, \quad s = \sigma + it, \quad (1)$$

где $h(n)$ — конечнозначный числовой характер, отличный от нуля почти для всех простых, имеющий ограниченную сумматорную функцию

$$S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = O(1).$$

В дальнейшем (см. [2],[3]) такие характеры получили название неглавных обобщенных характеров.

Решением задачи Ю. В. Линника занимались многие известные математики. Долгие годы этой задачей занимался Н. Г. Чудаков. Он видел решение этой задачи в доказательстве высказанной им гипотезы о том, что неглавный обобщенный характер является характером Дирихле (см., например, [4],[5]).

В данной работе приведено решение задачи Ю. В. Линника, не связанное с решением гипотезы Н. Г. Чудакова. В основе решения задачи аналитического продолжения рядов Дирихле, коэффициенты которых определяются неглавными обобщенными характерами, лежит так

называемый аппроксимационный подход, разработанный О. А. Матвеевой в работах [6]–[9]. Суть этого подхода заключается в построении последовательности полиномов Дирихле, приближающих функцию, определенную рядом Дирихле, в правой полуплоскости комплексной плоскости и изучении тех свойств полиномов Дирихле, которые удастся перенести на ряды Дирихле.

В последние годы авторы изучали применение аппроксимационного подхода к задаче аналитического продолжения рядов Дирихле (см. [10]–[13]).

Приведенное здесь решение задачи Ю. В. Линника является следствием этих исследований.

2. Аналитическое продолжение рядов Дирихле [1] целым образом на комплексную плоскость

В работах [10]–[13] было показано, что для рядов Дирихле (1) существует последовательность полиномов Дирихле $Q_n(s)$, удовлетворяющих условиям:

- (i). В любой полосе: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$, последовательность полиномов $Q_n(s)$ равномерно сходится к функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (1);
- (ii). Пусть $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Тогда для любого ε_{n_0} существует n_1 , что при $n \geq n_1$ в полосе: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$, выполняется неравенство

$$|f(s) - Q_n(s)| < C \cdot \varepsilon_n,$$

где константа C не зависит от n и ε_{n_0} ;

- (iii). Для любой полосы: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$, существует n_0 , что при $n \geq n_0$ нормы полиномов $Q_n(s)$ ограничены константой, зависящей только от величины T .

В работе [13] было показано, что свойства таких аппроксимационных полиномов Дирихле позволяют воспользоваться основными идеями принципа симметрии Римана — Шварца (см. [14], [15]) в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле (1). В этой работе доказано следующее утверждение

ТЕОРЕМА 1. *Ряд Дирихле (1) тогда и только тогда аналитически продолжен как целая функция на комплексную плоскость, когда функция $f(s)$, определенная рядом (1), является регулярной во всех точках мнимой оси.*

В данной работе мы покажем, что функция $f(s)$ является регулярной на мнимой оси, тем самым имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Ряд Дирихле (1) аналитически продолжен целым образом на комплексную плоскость.*

Доказательству теоремы 2 предпослём доказательство ряда лемм.

Рассмотрим аппроксимационный полином

$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^s}. \quad (2)$$

ЛЕММА 1. *Для производной m -го порядка аппроксимационного полинома $Q_n(s)$ в полосе $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$ имеет место оценка*

$$\left| Q_n^{(m)}(s) \right| \leq C \ln^m n,$$

где константа C зависит только от величины T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив к производной полинома Дирихле (2) формулу суммирования Абеля получим

$$\left| Q'_n(s) \right| \leq \ln(n) |Q_n(s)|$$

Учитывая, что в полосе: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$

$$|Q_n(s)| < C,$$

где константа зависит только от T , и повторив рассуждение m раз получим утверждение леммы 1. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $Q_{n_k}(s)$ — последовательность аппроксимационных полиномов, где $n_k = k^n$ и где $k > 2$ — некоторое натуральное. Тогда в полосе: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$ для любого m имеет место оценка вида

$$\left| Q_{(n+1)_k}^{(m)}(s) - Q_{n_k}^{(m)}(s) \right| = O \left(\frac{(n+1)^m \ln^m k}{n^l \ln^l k} \right), \quad (3)$$

где l — любое натуральное, а константа в символе « O » зависит от T и l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [11] показано, что для аппроксимационных полиномов $Q_n(s)$ ряда Дирихле (1) в полосе: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$, выполняется оценка

$$|f(s) - Q_{n_k}(s)| = O \left(\frac{1}{\ln^l k} \right),$$

где l — любое натуральное, а константа в символе « O » зависит от T и l .

Отсюда получаем

$$|Q_{(n+1)_k}(s) - Q_{n_k}(s)| = O \left(\frac{1}{n^l \ln^l k} \right), \quad (4)$$

где l — любое натуральное, а константа в символе « O » зависит от T и l .

В силу оценки (4) и леммы 1 получаем утверждение леммы 2. $\square$

ЛЕММА 3. В полосе: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$ для любого m имеет место оценка

$$\left| f^{(m)}(s) \right| = O \left(\frac{1}{(l-m-1)n_0^{l-m} \ln^{l-m} k} \right),$$

где l — натуральное, большее чем m ; n_0 — некоторое натуральное, которое может быть достаточно большим; константа в символе « O » зависит от T и l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение функции $f(s)$ в ряд

$$f(s) = Q_{(n_0)_k}(s) + \sum_{n \geq n_0}^{\infty} (Q_{(n+1)_k}(s) - Q_{n_k}(s)),$$

который в силу (4) абсолютно сходится при любом s из полосы: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$.

В результате его почленного дифференцирования имеем

$$f^{(m)}(s) = Q_{(n_0)_k}^{(m)}(s) + \sum_{n \geq n_0}^{\infty} (Q_{(n+1)_k}^{(m)}(s) - Q_{n_k}^{(m)}(s)),$$

где ряд сходится абсолютно при любом s и при любом m , что следует из леммы 2.

Отсюда в силу леммы 2 получаем оценку вида

$$|f^{(m)}(s)| = O \left(\sum_{n \geq n_0} \frac{n^m \ln^m k}{n^l \ln^l k} \right) \quad (5)$$

где l – любое натуральное, а константа в символе « O » зависит от T и l .

Положим в формуле (5) $l > m$. Тогда получим

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(s)| &= O \left(\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{n^{l-m} \ln^{l-m} k} \right) = O \left(\frac{1}{n_0^{l-m} \ln^{l-m} k} \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{(\frac{n}{n_0})^{l-m}} \right) = \\ &= O \left(\frac{1}{n_0^{l-m} \ln^{l-m} k} \int_1^\infty \frac{1}{x^{l-m}} dx \right) = O \left(\frac{1}{n_0^{l-m} \ln^{l-m} k} \frac{1}{(l-m-1)} \right) \end{aligned}$$

что и завершает доказательство леммы 3. $\square$

Пусть C_l обозначает наименьшее число, входящее в символ « O » оценки леммы 3. Приведем оценку этой константы в зависимости от величины l .

Докажем следующее утверждение

ЛЕММА 4. *Имеет место оценка*

$$C_l \leq \left\| g^{(l)}(x) \right\|_{C[0;1-\varepsilon]},$$

где $g(x)$ – функция, определенная степенным рядом, соответствующим ряду Дирихле (1), ε – некоторое положительное число, меньшее, чем 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выводе основной оценки леммы 3 мы воспользовались результатом доказательства леммы 5 и теоремы 2 работы [11]

$$\omega_k \left(\frac{1}{n}, g \right) \leq C \ln^{-k} n,$$

где $\omega_k \left(\frac{1}{n}, g \right)$ – модуль непрерывности k -го порядка функции $g(x)$ на отрезке $[0; 1 - \varepsilon]$, и где константа C не зависит от n и ε . Эта константа и определяет константу C_l в нашем случае. В силу известного неравенства для отрезка $[0; 1 - \varepsilon]$

$$\omega_k \left(\frac{1}{n}, g \right) \leq \left\| g^{(k)}(x) \right\|_{C[0;1-\varepsilon]} \cdot \frac{1}{n^k}.$$

Можно считать $C_k \leq \left\| g^{(k)}(x) \right\|_{C[0;1-\varepsilon]}$. Это завершает доказательство леммы 4. $\square$

Как следствие леммы 4 получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 5. *Имеет место неравенство*

$$\overline{\lim} \sqrt[l]{\frac{C_l}{l!}} < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \varepsilon < 1$. Для любой точки $x_0 \in [0; 1 - \varepsilon]$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim} \sqrt[l]{\frac{|g^{(l)}(x_0)|}{l!}} < \infty,$$

Что связано с положительностью радиуса сходимости ряда Тейлора функции $g(x)$ в точке x_0 . Взяв в качестве x_0 предельную точку для точек x_m , в которых достигается $\left\| g^{(m)}(x) \right\|_{C[0;1-\varepsilon]}$,

то последнее неравенство, в силу леммы 4, доказывает утверждение леммы 5. Действительно, взяв в качестве x_0 предельную точку всех x_m , в которых достигается величина $\|g^{(m)}(x)\|_{C[0;1]}$, то получим наше неравенство. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим формальный ряд Тейлора функции $f(s)$ в точке s_0

$$f(s) = f(s_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(s_0)}{m!} (s - s_0)^m, \quad (6)$$

где s_0 лежит на мнимой оси, и покажем что он имеет ненулевой радиус сходимости R .

Известно, что

$$\lim_m \sqrt[m]{\frac{f^{(m)}(s_0)}{m!}} = \frac{1}{R}$$

Положим в лемме 3 $l = m + 2$. Тогда в силу (6) и леммы 5 получаем

$$\frac{1}{R} = \lim_m \sqrt[m]{\frac{C_m}{m!}} < \infty.$$

Таким образом, функция $f(s)$ регулярна во всех точках мнимой оси. Отсюда в силу теоремы 1 получаем утверждение теоремы 2. $\square$

3. Заключение

Таким образом, решение задачи Ю. В. Линника, приведенное в данной работе, основывается на результатах, полученных ранее авторами относительно аналитического продолжения рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами.

В данной работе приведено частичное решение проблемы обобщенных характеров, поставленной в 1950-м году Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым. В следующей работе будут продолжены исследования на эту тему.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lang S. D. Algebraic Number Theory – New. Jork, 1970, P. 384.
2. Чудаков Н. Г., Линник Ю. В. Об одном классе вполне мультипликативных функций // ДАН СССР, 1950. Т. 74, №2. С. 133–136.
3. Чудаков Н. Г., Родосский К. А. Об обобщенном характере // ДАН СССР, 1950. Т. 74, №4. С. 1137–1138.
4. Чудаков Н. Г. Об одном классе вполне мультипликативных функций // Успехи мат. наук, 1953. Т. 8, вып. 3, С. 149–150.
5. Чудаков Н. Г. Обобщенные характеры // Междунар. конгресс математиков в Ницце – 1970. Доклад советских математиков – М.: Наука, 1972. С. 335.
6. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L -функции Дирихле // Чебышевский сборник, 2013. Т. 14, вып. 2. С. 117–121.
7. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L -функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Математика, Механика. Информатика — Саратов: Изд-во СГУ, 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 80–84.

8. Коротков А. Е., Матвеева О. А. Об одном численном алгоритме определения нулей целых функций, определяемых рядами Дирихле с периодическими коэффициентами // Науч. ведомости Белгородского гос. ун-та — Белгород: Изд-во БелГУ, 2011. Вып. 24. С. 47–84.
9. Матвеева О. А. Аналитические свойства определённых классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук по специальности 01.01.06 — Ульяновск, 2014.
10. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле // Чебышевский сборник, 2016. Т. 17, вып. 2. С. 162–169.
11. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник, 2016. Т. 17, вып. 3. С. 115–124.
12. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник, 2017. Т. 18, вып. 4. С. 285–295.
13. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник, 2018. Т. 19, вып. 1. С. 124–137.
14. Маркушевич А. Н. Теория аналитических функций — М.: Наука, 1967. Т. 2. 624 с.
15. Гурвиц А., Нурант Р. Теория функций — М.: Наука, 1968. 646 с.

REFERENCES

1. Lang S. D., 1970, “Algebraic Number Theory“ *New. Jork*, P. 384.
2. Chudakov, N. G., Linnik, Yu. V., 1950, “Ob odnom klasse vpolne mul’tiplikativnyh funkciij“, *DAN SSSR*, vol. 74, issue 2, pp. 133–136.
3. Chudakov, N. G., Rodosskij K. A., 1950, “Ob obobshhennom haraktere“, *DAN SSSR*, vol. 74, issue 4, pp. 1137–1138.
4. Chudakov, N. G., 1953, “Ob odnom klasse mul’tiplikativnyh funkciij“, *Uspehi mat. nauk*, vol. 8, issue 3, pp. 149–150.
5. Chudakov, N. G., 1972, “Obobshhennye haraktery“, *Mezhdunar. kongress matematikov v Nicce. Doklad sovetskih matematikov*, M.: Nauka, pp. 335.
6. Matveeva O. A., 2013, “On the zeros of Dirichlet polynomials that approximate Dirichlet L-functions in the critical band “ *Chebyshevskij sbornik*, Tula, publ TPGU, vol. 14, issue 2, pp. 117–121.
7. Matveeva, O. A., 2013, “Approksimacionnye polinomy i povedenie L-funkcij Dirihle v kriticheskoj polose“, *Saratov: izd-vo SGU, Izvestija Sarat. un-ta. Matematika, Mehanika. Informatika.*, iss. 4, vol. 2, pp. 80–84.
8. Korotkov, A. E. Matveeva, O. A. 2011, “Ob odnom chislennom algoritme opredelenija nulej celyh funkciij, opredeljaemyh rjadami Dirihle s periodicheskimi koeficientami“, *Belgorod: Nauchnye vedomosti BelGU.*, iss. 24, pp. 47–54.

9. Matveeva, O. A., 2014, "Analiticheskie svojstva opredeljonnyh klassov rjadov Dirihle i nekotorye zadachi teorii L-funkcij Dirihle: Dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni kand. fiz.-mat. nauk po special'nosti 01.01.06", *Ul'janovsk*.
10. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2016, "O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 2, vol. 17, pp. 162–169.
11. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2016, "O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle s mul'tiplikativnymi koeficientami", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 4, vol. 17, pp. 115–124.
12. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2017, "On the problem of analytical continuation of Dirichlet series with finite coefficients as entire functions onto the complex plane", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 4, vol. 18, pp. 285–295.
13. Kuznetsov, V. N. Matveeva, O. A. 2018, "Boundary behavior and the problem of analytic continuation of a certain class of Dirichlet series with multiplicative coefficients as an integral functions on the complex plane", *Tula: izd-vo TPGU, Chebyshevskij sbornik.*, iss. 2, vol. 19.
14. Markushevich, A. I., 1968, "Theory of analytical functions" *"Nauka"*, *Moscow*, vol. 2, pp. 624.
15. Gurvic A., Nurant R., 1968, "Teoriya funkcij" *"Nauka"*, *Moscow*, pp. 646.

Получено 18.08.2018

Принято к печати 15.10.2018