ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 3.

УДК 511.321 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-183-201

Оценка взвешенных сумм Клоостермана с помощью аддитивного сдвига[1]

Королёв Максим Александрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Отдела теории чисел, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 119991, Москва, ул. Губкина, 8.
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Аннотация

Аддитивный сдвиг – один из часто используемых приёмов оценки тригонометрических сумм и сумм значений характеров. Он состоит в замене переменной суммирования n выражением вида $n+x$ с последующим суммированием по искусственно введённой переменной x. Превращение исходной однократной суммы в кратную открывает дополнительные возможности, позволяющие получить её нетривиальную оценку. Этот приём широко использовался в работах Й. Г. ван дер Корпута, И. М. Виноградова, Д. А. Бёрджесса, А. А. Карацубы и многих других исследователей. Он оказался весьма полезным рабочим инструментом и при работе с суммами значений характеров в конечных полях, а также с кратными тригонометрическими суммами. Э. Фуври и П. Мишель (1998), Ж. Бургейн (2005) стали успешно применять этот приём к оценкам сумм Клоостермана по простому модулю.

Э. Фуври и П. Мишель сочетали аддитивный сдвиг с глубокими результатами, которые получаются средствами алгебраической геометрии. Метод Ж. Бургейна полностью элементарен. Так, его использование позволило автору дать полностью элементарный вывод оценки суммы Клоостермана с простыми числами по простому модулю q в случае, когда длина N такой суммы превосходит $q^{1/2+\varepsilon}$.

В настоящей статье даются новые примеры применения аддитивного сдвига к взвешенным суммам Клоостермана вида

$$\sum_{n\leqslant N} f(n)\exp\left(\frac{2\pi i a}{q}\,(n+b)^*\right),\quad (ab,q)=1,\quad mm^*\equiv 1 \pmod q,$$

где q - простое число, а весовая функция $f(n)$ берётся равной числу $\tau(n)$ делителей n или же количеству $r(n)$ представлений n суммою двух квадратов целых чисел. Полученные оценки нетривиальны уже при $N\geqslant q^{2/3+\varepsilon}$.

Следствием таких оценок являются новые результаты о распределении дробных долей вида

$$\left\{\frac{a}{q}\,(uv+b)^*\right\},\quad \left\{\frac{a}{q}\,(u^2+v^2+b)^*\right\},$$

в случае, когда целочисленные переменные u, v меняются в гиперболической ($uv\leqslant N$) и круговой ($u^2+v^2\leqslant N$) областях, соответственно.

Ключевые слова: обратные вычеты, суммы Клоостермана, аддитивный сдвиг, функция делителей.

Библиография: 49 названий.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00433).

Для цитирования:
М. А. Королёв. Оценка взвешенных сумм Клоостермана с помощью аддитивного сдвига // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 183–201.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 3.

UDC 511.321 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-183-201

The estimate of weighted Kloosterman sums by additive shift[2]

Korolev Maxim Aleksandrovich — Doctor Phys.-Math. Sci., Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Department of Number Theory, Leading Scientific Researcher, 119991, Moscow, Russia, Gubkina str., 8.
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

Abstract

Additive shift is a widely used tool in the estimating of exponential sums and character sums. It bases on the replacement of the summation variable n by the expression of the type $n+x$ and the summation over artificially introduced variable x. The transformation of the simple sum to multiple sum gives an additional opportunities, which allow one on obtain the non-trivial bound for the initial sum. This shift was widely used by I.G. van der Corput, I.M. Vinogradov, D.A. Burgess, A.A. Karatsuba and many other researchers. It became very useful tool also in dealing with character sums in finite fields and with multiple exponential sums.

E. Fouvry and P. Michel (1998) and then J. Bourgain (2005) used successfully this shift to the estimation of Kloosterman sums. E. Fouvry and P. Michel combine additive shift with deep-lying results from algebraic geometry. On the contrary, the method of J. Bourgain is completely elementary. For example, it allows to the author to give elementary proof of the estimate of Kloosterman sum prime modulo q with primes in the case when its length N exceeds $q^{1/2+\varepsilon}$.

In this paper, we give some new elementary applications of additive shift to weighted Kloosterman sums of the type

$$\sum_{n\leqslant N} f(n)\exp\left(\frac{2\pi i a}{q}\,(n+b)^*\right), \quad (ab,q)=1.$$

Here q is prime and weight function $f(n)$ is equal to $\tau(n)$, that is, the number of divisors of n, or equal to $r(n)$, which is the number of representations of n by the sum of two squares of integers. The bounds for these sums are non-trivial for $N\geqslant q^{2/3+\varepsilon}$.

As a corollary of such estimates, we obtain some new results concerning the distribution of the fractional parts of the following type

$$\left\{\frac{a}{q}\,(uv+b)^*\right\}, \quad \left\{\frac{a}{q}\,(u^2+v^2+b)^*\right\},$$

where the integers u, v run through the hyperbolic ($uv\leqslant N$) and circle ($u^2+v^2\leqslant N$) domains, consequently.

Keywords: inverse residues, Kloosterman sums, additive shift, divisor function.

Bibliography: 49 titles.

For citation:
M. A. Korolev, 2018, "The estimate of weighted Kloosterman sums by additive shift" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 183–201.

[2]The work was supported by the Russian science Foundation (grant № 14-11-00433).

Памяти Юрия Владимировича Линника

1. Введение

Суммой Клоостермана по модулю $q > 2$ называется тригонометрическая сумма вида

$$\sum_{n\in A} e_q(a\overline{n} + bn) \;=\; \sum_{n\in A} e_q\biggl(\frac{a}{n} + bn\biggr), \tag{1}$$

где $e_q(u) = e^{2\pi iu/q}$, a, b — целые числа, $a \not\equiv 0 \pmod q$, $\overline{n} = 1/n = n^*$ — решение сравнения $n\overline{n} \equiv 1 \pmod q$, A - некоторое подмножество приведённой системы вычетов $\mathbb{Z}_q^*$ по модулю q.

Суммы (1) и им подобные возникают во многих задачах теории чисел (см., например, обзоры Д. Р. Хизбрауна [1] и П. Сарнака [2], гл. 11, 16 и 20 книги Х. Иванца и Э. Ковальского [4], монографию А. В. Устинова [3], а также приведённые в этих работах библиографии; разумеется, этот список не является сколь-нибудь полным).

Наряду с суммами (1) рассматриваются и суммы Клоостермана с весами, т.е. суммы вида

$$\sum_{n\in A} f(n)e_q(a\overline{n} + bn), \tag{2}$$

где $f(n)$ — некоторая арифметическая функция. Оценкам таких сумм посвящены, в частности, работы [5]–[10].

При оценках тригонометрических сумм вида

$$S \;=\; \sum_{M<n\leqslant M+N} e(\varphi(n)), \quad N > 1, \quad e(z) \;=\; e^{2\pi iz},$$

часто применяется следующий приём, который условно можно назвать “аддитивным сдвигом” переменной суммирования. Заключается он в следующем. Пусть X – целое число, причем $1 \leqslant X \leqslant N^{1-\delta}$, где $\delta > 0$ – достаточно малая постоянная. Задавшись произвольным целым x с условием $1 \leqslant x \leqslant X$, преобразуем сумму S следующим образом:

$$S \;=\; \sum_{M<n+x\leqslant M+N} e(\varphi(n+x)) \;=\; \sum_{M-x<n\leqslant M+N-x} e(\varphi(n+x)) \;=$$
$$=\; \sum_{M<n\leqslant M+N} e(\varphi(n+x)) \;+\; 2\theta x, \quad |\theta| \leqslant 1.$$

Суммируя обе части по $1 \leqslant x \leqslant X$, получим:

$$S \;=\; X^{-1} \sum_{M<n\leqslant M+N} \sum_{x=1}^{X} e(\varphi(n+x)) \;+\; 2\theta_1 X, \quad |\theta_1| \leqslant 1.$$

Наличие двойного суммирования (по n и по x) открывает дополнительные возможности, позволяющие получить нетривиальную оценку исходной суммы.

Этот приём и его модификации широко и успешно применялись Й. Г. ван дер Корпутом, И. М. Виноградовым, А. А. Карацубой, Д. А. Берджессом и многими другими исследователями при решении ряда задач аддитивной теории чисел, теории дзета-функции Римана, характеров Дирихле, характеров в конечных полях, кратных тригонометрических сумм (см., например, [14]–[37]; и этот список, конечно, не является исчерпывающим).

Аддитивный сдвиг оказывается наиболее эффективным в задачах, где функция $\varphi(n)$ либо является многочленом, либо хорошо им приближается: в таких случаях имеется определённая "гибкость" в работе с выражениями вида $\varphi(n+x)$, где x мало по сравнению с n. Однако функции вида

$$\varphi(n) = \frac{1}{q}(a\overline{n}+bn) \pmod 1$$

такими свойствами, вообще говоря, не обладают.

Тем не менее, в ряде случаев аддитивный сдвиг удаётся применить и к оценкам сумм Клоостермана и их обобщениям. Так, в 1997 г. Э. Фаври и П. Мишель, сочетая этот приём с методами алгебраической геометрии, смогли получить оценки билинейных форм вида

$$\sum_{M<m\leqslant M_1}\sum_{N<n\leqslant N_1}\alpha_m\beta_n e_q(f(mn)),$$

где модуль q — простое число, а $f(x) = P(x)/Q(x) = P(x)\overline{Q(x)}$ — рациональная функция над $\mathbb{Z}_q^*$ достаточно общего вида. Следствием оценок таких форм явилась, в частности, оценка суммы с простыми числами вида

$$\sum_{p\leqslant N} e_q(f(p)) \ll N^{25/36}q^{3/16+\varepsilon},$$

нетривиальная при $N \geqslant q^{6/7+\varepsilon}$.

В 2005 г. Ж. Бургейн [39], также используя аддитивный сдвиг, в случае простого модуля q смог получить оценку билинейной формы

$$\sum_{c<m\leqslant c+M}\sum_{d<n\leqslant d+N}\alpha_m\beta_n e_q(a\overline{mn}+bmn),$$

где $MN \geqslant q^{1/2+\varepsilon}$, $q^{\varepsilon} < M, N \leqslant \sqrt{q}$, а c, d — произвольные числа. Наряду с оценкой

$$\sum_{M<n\leqslant M+N} e_q(a\overline{n}+bn) \ll \sqrt{q}\ln q, \tag{3}$$

следующей из классического неравенства А. Вейля [40] вида

$$\left|\sum_{n=1}^{q-1} e_q(a\overline{n}+bn)\right| \leqslant 2\sqrt{q}$$

это приводит к следующей оценке суммы Клоостермана с простыми числами:

$$\sum_{p\leqslant N} e_q(a\overline{p}+bp) \ll Nq^{-\delta}, \quad N \geqslant q^{1/2+\varepsilon}, \quad \delta = c\varepsilon^4. \tag{4}$$

Дальнейшее развитие метод Бургейна (применительно к суммам Клоостермана) получил в работах [41]–[45]. В частности, в работах [43], [45] с помощью элементарных рассуждений (т.е. не опирающихся на средства алгебраической геометрии), включающих аддитивный сдвиг, автору удалось получить оценки вида

$$\sum_{M<n\leqslant M+N} e_q(a\overline{n}+bn) \ll Nq^{-c\varepsilon^2},$$

нетривиальные при $N \geqslant q^{1/2+\varepsilon}$. В соединении с методом Бургейна это дало полностью элементарный вывод неравенства (4).

Метод Бургейна практически без изменения переносится на взвешенные суммы типа

$$\sum_{n\leqslant N} f(n)e_q(a\overline{n}) \;=\; \sum_{n\leqslant N} f(n)e_q\biggl(\frac{a}{n}\biggr),$$

где $f(n)$ — одна из функций $\tau_k(n)$, $\mu(n)$ (см. [45]), а также $f(n) = r(n)$ (как обычно, $\tau_k(n)$ — многомерная функция делителей, $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $r(n)$ — количество представлений n суммою двух квадратов целых чисел). Однако этот метод (во всяком случае, без внесения существенных изменений в рассуждения) не позволяет получить, например, оценки сумм вида

$$S_1 = S_1(q,N;a,b) \;=\; \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \tau(n)e_q\biggl(\frac{a}{n+b}\biggr) \;=\; \sum_{\substack{1\leqslant uv\leqslant N\\ u,v\geqslant 1}} e_q\biggl(\frac{a}{uv+b}\biggr),$$

$$S_2 = S_2(q,N;a,b) \;=\; \sum_{1\leqslant n\leqslant N} r(n)\; e_q\biggl(\frac{a}{n+b}\biggr) \;=\; \sum_{1\leqslant u^2+v^2\leqslant N} e_q\biggl(\frac{a}{u^2+v^2+b}\biggr),$$

где q — простое число, $(ab,q) = 1$, $\tau(n) = \tau_2(n)$ — число делителей n.

В 2000 г. А. А. Карацуба [46] применил аддитивный сдвиг вида $n\mapsto n+xy$ (с последующим суммированием по x и y) к задаче оценки суммы значений неглавного характера Дирихле χ_q по простому модулю q с весами типа $\tau_k(n)$, $r(n)$. В частности, ему удалось получить оценки вида

$$\sum_{n\leqslant N} \tau(n)\chi_q(n+a), \quad \sum_{n\leqslant N} r(n)\chi_q(n+a), \quad 0<|a|\leqslant\sqrt{q},$$

нетривиальные при $N\geqslant q^{1/3+\varepsilon}$, и тем самым значительно уточнить свой предыдущий результат [47].

В настоящей статье мы применяем идею работы [46] к оценке взвешенных сумм Клоостермана $S_j = S_j(q,N;a,b)$, $j = 1, 2$. Основным результатом является следующая

Теорема 1. *Пусть $0<\varepsilon<0.1$ — сколь угодно малое фиксированное число, $q\geqslant q_0(\varepsilon)$ — простое, $(ab,q) = 1$, N — целое, причём $q^{2/3+\varepsilon} < N \leqslant q$. Тогда для определённых выше сумм S_1, S_2 справедливы следующие оценки:*

$$S_1,\; S_2 \;\ll\; Nq^{-\varepsilon^2/35}.$$

Эта теорема позволяет получить некоторые утверждения, касающиеся распределения дробных долей вида

$$\biggl\{\frac{a}{uv+b}\biggr\}, \quad \biggl\{\frac{a}{u^2+v^2+b}\biggr\}$$

при изменении целых чисел u, v в гиперболической и круговой областях, соответственно (см. теоремы 2–4).

2. Вспомогательная лемма

В настоящем параграфе мы получаем верхнюю оценку для числа решений системы сравнений специального вида. Метод доказательства этой оценки восходит к работе [48].

Лемма 1. *Пусть $c_1, c_2 > 1$ – произвольные абсолютные постоянные, $q\geqslant q_0(c_1,c_2)$ – достаточно большое простое число. Пусть, далее, числа X, U, U_1, V, V_1 удовлетворяют условиям*

$$(\ln q)^3 < U < U_1 \leqslant c_1U, \quad (\ln q)^3 < V < V_1 \leqslant c_2V, \quad U\leqslant V,$$
$$X_0(c_1,c_2) < X \leqslant V, \quad U_1V_1 < q, \quad XV \leqslant qU. \quad (5)$$

Тогда для количества $I = I(q; X; U, U_1; V, V_1)$ *решений системы сравнений*

$$\begin{cases} x_1u_1 \equiv x_2u_2 \pmod q, \\ x_1v_1 \equiv x_2v_2 \pmod q \end{cases} \tag{6}$$

с условиями $1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant X$, $U < u_1, u_2 \leqslant U_1$, $V < v_1, v_2 \leqslant V_1$ *справедлива следующая оценка:*

$$I \leqslant 2c_1c_2XUV \ln q.$$

Доказательство. Ввиду неравенств $1 \leqslant x_1u_1, x_2u_2 \leqslant XU_1 < q$ первое сравнение системы оказывается уравнением: $x_1u_1 = x_2u_2$. Разобьём все решения (6) на классы, относя к классу $E(\delta)$ все решения $(x_1, x_2, u_1, u_2, v_1, v_2)$, отвечающие условию $(x_1, x_2) = \delta$. Обозначая через $I(\delta)$ число решений в классе $E(\delta)$, будем, следовательно, иметь:

$$I = \sum_{1 \leqslant \delta \leqslant X} I(\delta). \tag{7}$$

Оценим величину $I(\delta)$. Если x_1, x_2 – компоненты произвольного решения из класса $E(\delta)$, то $x_j = \delta y_j$, $j = 1, 2$, где

$$(y_1, y_2) = 1, \quad 1 \leqslant y_1, y_2 \leqslant X\delta^{-1}. \tag{8}$$

Зафиксируем произвольную пару y_1, y_2 с условиями (8). Тогда из второго сравнения системы (6) получим:

$$\delta y_1v_1 - \delta y_2v_2 = qn,$$

где n — некоторое целое число. Поскольку q простое, то необходимо $n = \delta m$, так что

$$y_1v_1 - y_2v_2 = qm,$$

причём

$$|m| \leqslant \frac{1}{q}|y_1v_1 - y_2v_2| \leqslant \frac{XV_1}{q\delta} \leqslant \frac{c_2XV}{q\delta}. \tag{9}$$

Фиксируя произвольное целое m с условием (9), оценим сверху число $I(\delta; y_1, y_2, m)$ четвёрок (u_1, u_2, v_1, v_2), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} y_1u_1 = y_2v_2, \\ y_1v_1 - y_2v_2 = qm, \\ U < u_1, u_2 \leqslant U_1, \; V < v_1, v_2 \leqslant V_1. \end{cases} \tag{10}$$

В силу (8) из первого уравнения (10) получаем $u_1 = sy_2$, $u_2 = sy_1$, где s — некоторое целое число. Тогда $U < sy_1, sy_2 \leqslant U_1$, откуда несложно заключить, что величина s может принимать не более

$$\min\left(\frac{U_1 - U}{y_1}, \frac{U_1 - U}{y_2}\right) + 1 \leqslant (c_1 - 1)\min\left(Uy_1^{-1}, Uy_2^{-1}\right) + 1 = \nu$$

значений.

Зафиксируем произвольное решение $v_1^{(0)}, v_2^{(0)}$ второго уравнения системы (10). Тогда для любого другого решения v_1, v_2 будем иметь:

$$y_1v_1^{(0)} - y_2v_2^{(0)} = qm = y_1v_1 - y_2v_2,$$

откуда $y_1(v_1 - v_1^{(0)}) = y_2(v_2 - v_2^{(0)})$. В силу (8) отсюда имеем: $v_1 - v_1^{(0)} = ty_2$, $v_2 - v_2^{(0)} = ty_1$, где t — целое число. Область изменения t определяется неравенствами

$$V < ty_1 + v_2^{(0)} \leqslant V_1, \quad V < ty_2 + v_1^{(0)} \leqslant V_1,$$

так что

$$\max\left(\frac{V-v_2^{(0)}}{y_1},\frac{V-v_1^{(0)}}{y_2}\right) < t \leqslant \min\left(\frac{V_1-v_2^{(0)}}{y_1},\frac{V_1-v_1^{(0)}}{y_2}\right).$$

Следовательно, величина t может принимать не более

$$\min\left(\frac{V_1-V}{y_1},\frac{V_1-V}{y_2}\right)+1 \leqslant (c_2-1)\min\left(Vy_1^{-1},Vy_2^{-1}\right)+1 = \lambda$$

значений. Так находим:

$$I(\delta;y_1,y_2,m) \leqslant \lambda\nu \leqslant \Big((c_1-1)\min\left(Uy_1^{-1},Uy_2^{-1}\right)+1\Big)\Big((c_2-1)\min\left(Vy_1^{-1},Vy_2^{-1}\right)+1\Big). \quad (11)$$

Суммируя неравенство (11) по всем целым m с условием (9), получим:

$$\sum_{|m|\leqslant c_2XV(q\delta)^{-1}} I(\delta;y_1,y_2,m) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{2c_2XV}{q\delta}+1\right)\Big((c_1-1)\min\left(Uy_1^{-1},Uy_2^{-1}\right)+1\Big)\Big((c_2-1)\min\left(Vy_1^{-1},Vy_2^{-1}\right)+1\Big).$$

Далее, суммирование по всем парам y_1, y_2, удовлетворяющих (8), даёт:

$$I(\delta) \leqslant 2\left(\frac{2c_2XV}{q\delta}+1\right)\sum_{1\leqslant y_1\leqslant y_2\leqslant X\delta^{-1}}\left((c_1-1)Uy_2^{-1}+1\right)\left((c_2-1)Vy_2^{-1}+1\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\frac{2c_2XV}{q\delta}+1\right)\sum_{1\leqslant y_2\leqslant X\delta^{-1}}\left((c_1-1)(c_2-1)UVy_2^{-1}+(c_1-1)U+(c_2-1)V+y_2\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(\frac{2c_2XV}{q\delta}+1\right)\Big((c_1-1)(c_2-1)UV(\ln X+1)+(c_1-1)XU\delta^{-1}+(c_2-1)XV\delta^{-1}+X^2\delta^{-2}\Big).$$

Переходя, наконец, к оценке величины I, согласно (7) будем иметь:

$$I \leqslant 2\sum_{1\leqslant\delta\leqslant X}\left(\frac{2c_2XV}{q\delta}+1\right)\times$$
$$\times\Big((c_1-1)(c_2-1)UV(\ln X+1)+(c_1-1)XU\delta^{-1}+(c_2-1)XV\delta^{-1}+X^2\delta^{-2}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant 2\bigg((c_1-1)(c_2-1)XUV(\ln X+1) + (c_1-1)XU(\ln X+1) + (c_2-1)XV(\ln X+1)+$$
$$+\frac{\pi^2}{6}X^2 + 2c_2(c_1-1)(c_2-1)\frac{XUV^2}{q}(\ln X+1)^2+\frac{\pi^2}{3}c_2(c_1-1)\frac{X^2UV}{q}+$$
$$+\frac{\pi^2}{3}c_2(c_2-1)\frac{X^2V^2}{q} + 2\zeta(3)c_2\frac{X^3V}{q}\bigg) = 2XUV\Delta,$$

где

$$\Delta = (\ln X+1)\left\{(c_1-1)(c_2-1) + (c_1-1)V^{-1} + (c_2-1)U^{-1}\right\}+$$
$$+ 2c_2(c_1-1)(c_2-1)\frac{V}{q}(\ln X+1)^2+$$
$$+\frac{\pi^2}{6}\frac{X}{UV} + \frac{\pi^2}{3}c_2(c_1-1)\frac{X}{q} + \frac{\pi^2}{3}c_2(c_2-1)\frac{XV}{qU} + 2\zeta(3)c_2\frac{X^2}{qU}.$$

Принимая во внимание условия (5), находим:

$$\frac{X}{UV} \leqslant \frac{1}{U} \leqslant (\ln q)^{-3}, \quad \frac{X}{q} \leqslant \frac{V}{q} \leqslant \frac{1}{U} \leqslant (\ln q)^{-3}, \quad \frac{X^2}{qU} \leqslant \frac{XV}{qU} \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\Delta \leqslant (c_1-1)(c_2-1)(\ln X+1) + (c_1+c_2-2)(\ln X+1)(\ln q)^{-3} + \frac{\pi^2}{6}(\ln q)^{-3} + \\ + 2c_2(c_1-1)(c_2-1)(\ln X+1)^2(\ln q)^{-3} + \frac{\pi^2}{3}c_2(c_1-1)(\ln q)^{-3} + \\ + \frac{\pi^2}{3}c_2(c_2-1) + 2\zeta(3)c_2 < c_1c_2\ln q.$$

Лемма доказана. □

3. Доказательство теоремы 1

Поскольку сумма S_2 оценивается подобно сумме S_1, далее мы приведём достаточно подробный вывод оценки S_1, а затем укажем на необходимые изменения, которые нужно внести в рассуждения для получения оценки S_2.

Положим $\delta = 0.5\varepsilon$; представляя S_1 в виде

$$S_1 = \sum_{1\leqslant uv\leqslant N} e_q\biggl(\frac{a}{uv+b}\biggr),$$

разобьём область изменения каждой из переменных u, v на промежутки $U < u \leqslant U_1$, $V < v \leqslant V_1$, где $1 \leqslant U, V \leqslant 0.5N$, $U_1 \leqslant 2U$, $V_1 \leqslant 2V$. Соответственно, S_1 разобьётся на $\ll (\ln q)^2$ сумм

$$S(U,V) = \sum_{U<u\leqslant U_1}\sum_{\substack{V<v\leqslant V_1\\ 1\leqslant uv\leqslant N}} e_q\biggl(\frac{a}{uv+b}\biggr).$$

Очевидно, вклад в S_1 от сумм $S(U,V)$ с условием $UV \leqslant Nq^{-\delta}$ не превосходит по порядку $N(\ln q)^2q^{-\delta} < Nq^{-\varepsilon^2}$. Поэтому всюду далее будем рассматривать лишь те пары U, V, для которых $Nq^{-\delta} < UV \leqslant N$ (в случае $UV > N$ сумма $S(U,V)$, очевидно, пуста). Далее, поскольку переменные u, v входят в $S(U,V)$ симметрично, не ограничивая общности можно считать, что $U \leqslant V$. Наконец, если $1 \leqslant U \leqslant q^{1/6}$, то $V \geqslant NU^{-1}q^{-\delta} \geqslant q^{1/2+\varepsilon/2}$, так что в этом случае неравенство (3) даёт:

$$\sum_{\substack{V<v\leqslant V_1\\ 1\leqslant v\leqslant Nu^{-1}}} e_q\biggl(\frac{a}{uv+b}\biggr) = \sum_{V<v\leqslant V_2} e_q\biggl(\frac{a\overline{u}}{v+b\overline{u}}\biggr) = \sum_{b_1+V<n\leqslant b_1+V_2} e_q(a_1\overline{n}) \ll \sqrt{q}\ln q,$$

откуда

$$S(U,V) \ll U\sqrt{q}\ln q \ll q^{2/3}\ln q \ll Nq^{-\varepsilon}\ln q \ll Nq^{-0.5\varepsilon}$$

(здесь обозначено: $a_1 \equiv a\overline{u} \pmod q$, $b_1 \equiv b\overline{u} \pmod q$, $1 \leqslant b_1 < q$, $V_2 = \min(V_1, Nu^{-1})$). Следовательно, всюду далее можно считать, что $U > q^{1/6}$.

Итак, пусть U, V — произвольная пара с условиями $q^{1/6} < U \leqslant V$, $Nq^{-\delta} \leqslant UV \leqslant N$. Зададимся целыми числами $X, Y \geqslant 1$ такими, что $2XU < q$, $2XY < V$ (точные значения X, Y

будут выбраны ниже). Тогда, вновь полагая $V_2 = \min(V_1, Nu^{-1})$ для заданного u, для любых целых x, y таких, что $1 \leqslant x \leqslant X$, $1 \leqslant y \leqslant Y$, будем иметь:

$$S(U,V) = \sum_{U<u\leqslant U_1}\sum_{V<v\leqslant V_2} e_q\biggl(\frac{a\overline{u}}{v+b\overline{u}}\biggr) = \\ = \sum_{U<u\leqslant U_1}\sum_{V<v+xy\leqslant V_2} e_q\biggl(\frac{a\overline{u}}{v+xy+b\overline{u}}\biggr) = \sum_{U<u\leqslant U_1}\sum_{V-xy<v\leqslant V_2-xy} e_q\biggl(\frac{a\overline{u}}{v+xy+b\overline{u}}\biggr).$$

Просуммируем обе части последнего равенства по x и y; получим:

$$XYS(U,V) = \sum_{U<u\leqslant U_1}\sum_{x=1}^{X}\sum_{y=1}^{Y}\sum_{V-xy<v\leqslant V_2-xy} e_q\biggl(\frac{a\overline{u}}{v+xy+b\overline{u}}\biggr) = \\ = \sum_{U<u\leqslant U_1}\sum_{V-XY<v\leqslant V_2-1}\sum_{x=1}^{X}\sum_{\substack{0<y\leqslant Y\\ (V-v)/x<y\leqslant(V_2-v)/x}} e_q\biggl(\frac{a\overline{u}}{v+xy+b\overline{u}}\biggr).$$

Положив

$$y_1 = \max\biggl(0, \frac{V-v}{x}\biggr), \quad y_2 = \min\biggl(Y, \frac{V_2-v}{x}\biggr), \quad h = 2[V+1]+1,$$

будем иметь: $0 \leqslant y_1 < y_2 \leqslant Y < h$, $V_2 \leqslant V_1 < h$. Следовательно, сумма по y принимает вид

$$\sum_{y_1<y\leqslant y_2} e_q\biggl(\frac{a\overline{u}}{v+xy+b\overline{u}}\biggr) = \\ = \sum_{y=1}^{Y}\biggl(\frac{1}{h}\sum_{|c|\leqslant h/2}\sum_{y_1<\xi\leqslant y_2} e_h(c(y-\xi))\biggr)e_q\biggl(\frac{a\overline{u}}{v+xy+b\overline{u}}\biggr) = \\ = \sum_{|c|\leqslant h/2}\frac{1}{h}\biggl(\sum_{y_1<\xi\leqslant y_2} e_h(-c\xi)\biggr)\sum_{y=1}^{Y} e_h(cy)e_q\biggl(\frac{a\overline{u}}{v+xy+b\overline{u}}\biggr) = \\ = \sum_{|c|\leqslant h/2}\frac{f(c;u,v,x)}{|c|+1}\sum_{y=1}^{Y} e_h(cy)e_q\biggl(\frac{a\overline{u}}{v+xy+b\overline{u}}\biggr),$$

где

$$f(c;u,v,x) = \frac{|c|+1}{h}\sum_{y_1<\xi\leqslant y_2} e_h(-c\xi).$$

Несложно проверить, что $|f(c;u,v,x)| \leqslant 1$ для всех рассматриваемых c, u, v и x. Действительно, если $c = 0$, то

$$f(c;u,v,x) = \frac{[y_2]-[y_1]}{h} \leqslant \frac{Y}{h} \leqslant \frac{Y}{2V} \leqslant \frac{1}{4X} < 1.$$

Если же $0 < |c| \leqslant 0.5h$, то

$$|f(c;u,v,x)| = \frac{|c|+1}{h}\cdot\biggl|\frac{e_h(-c[y_2])-e_h(-c[y_1])}{e_h(-c)-1}\biggr| \leqslant \frac{|c|+1}{h}\biggl|\sin\frac{\pi c}{h}\biggr|^{-1} \leqslant \frac{|c|+1}{h}\cdot\frac{h}{2|c|} \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$S(U,V) = (XY)^{-1}\sum_{|c|\leqslant h/2}\frac{S_c(U,V)}{|c|+1},$$

где

$$S_c(U,V) = \sum_{U<u\leqslant U_1}\ \sum_{V-XY<v\leqslant V_2-1}\ \sum_{x=1}^{X} f(c;u,v,x)\sum_{y=1}^{Y} e_h(cy)e_q\biggl(\frac{a\overline{u}}{v+xy+b\overline{u}}\biggr).$$

Замечая, что $V-XY\geqslant 0.5V$, $V_2\leqslant V_1$, переходя к оценкам, будем иметь:

$$|S_c(U,V)| \leqslant \sum_{U<u\leqslant U_1}\ \sum_{0.5V<v\leqslant V_1}\ \sum_{x=1}^{X}\biggl|\sum_{y=1}^{Y} e_h(cy)e_q\biggl(\frac{a\overline{x}\overline{u}}{y+\overline{x}(b\overline{u}+v)}\biggr)\biggr| =$$

$$= \sum_{z=1}^{q}\sum_{t\in T}\mu(z;t)\biggl|\sum_{y=1}^{Y} e_h(cy)e_q\biggl(\frac{z}{y+t}\biggr)\biggr|,$$

где $\mu(z;t)$ — количество решений системы сравнений

$$\begin{cases} a\overline{x}\overline{u} \equiv z \pmod q,\\ \overline{x}(b\overline{u}+v) \equiv t \pmod q\end{cases}$$

с неизвестными u,v,x, удовлетворяющими условиям $1\leqslant x\leqslant X$, $U<u\leqslant U_1$, $0.5V<v\leqslant V_1$. Здесь через T обозначено множество значений, которые принимает по модулю q величина $\overline{x}(b\overline{u}+v)$ в случае, когда переменные u,v,x независимо друг от друга пробегают указанные промежутки (очевидно, $|T|\leqslant 2XUV$).

Зададимся целым числом $k\geqslant 14$, зависящим лишь от ε (точное значение k будет выбрано ниже). Дважды применяя к сумме $S_c(U,V)$ неравенство Гёльдера, получим:

$$|S_c(U,V)| \leqslant \Sigma_1^{2k-2}\Sigma_2\Sigma_3,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{z=1}^{q}\sum_{t\in T}\mu(z;t),\quad \Sigma_2 = \sum_{z=1}^{q}\sum_{t\in T}\mu^2(z;t),\quad \Sigma_3 = \sum_{z=1}^{q}\sum_{t\in T}\biggl|\sum_{y=1}^{Y} e_h(cy)e_q\biggl(\frac{z}{y+t}\biggr)\biggr|^{2k}.$$

Поскольку Σ_1 совпадает с числом всех возможных троек u,v,x, то $|\Sigma_1|\leqslant|T|\leqslant 2XUV$. Далее, Σ_2 совпадает с числом решений системы сравнений

$$\begin{cases} a\overline{x}_1\overline{u}_1 \equiv a\overline{x}_2\overline{u}_2 \pmod q,\\ \overline{x}_1(b\overline{u}_1+v_2) \equiv \overline{x}_2(b\overline{u}_2+v_1) \pmod q,\\ 1\leqslant x_1,x_2\leqslant X,\ U<u_1,u_2\leqslant U_1,\ 0.5V<v_1,v_2\leqslant V_1,\end{cases}$$

или, что то же, системы

$$\begin{cases} x_1u_1 \equiv x_2u_2 \pmod q,\\ x_1v_1 \equiv x_2v_2 \pmod q\end{cases}$$

с теми же ограничениями на переменные. В силу леммы, $\Sigma_2\leqslant 12XUV\ln q$.

Далее,

$$\Sigma_3 = \sum_{z=1}^{q}\sum_{t\in T}\sum_{\mathbf{y}} e_h(c(y_1+\ldots+y_k-y_{k+1}-\ldots-y_{2k}))\times$$

$$\times\, e_q\biggl(z\biggl(\frac{1}{t+y_1}+\ldots+\frac{1}{t+y_k}-\frac{1}{t+y_{k+1}}-\ldots-\frac{1}{t+y_{2k}}\biggr)\biggr) \leqslant q\sum_{\mathbf{y}} N_q(\mathbf{y}),$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_{2k})$ пробегает все целочисленные наборы с условием $1 \leqslant y_1, \ldots, y_{2k} \leqslant Y$, а $N_q(\mathbf{y})$ обозначает количество решений сравнения

$$\frac{1}{t+y_1} + \ldots + \frac{1}{t+y_k} \equiv \frac{1}{t+y_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{t+y_{2k}} \pmod q$$

в числах $t \in T$. Согласно лемме 1 из [43],

$$\Sigma_3 \leqslant q(k!Y^k|T| + 2kY^{2k}) < 2qk^k(Y^kXUV + Y^{2k}) = 2(kY^2)^kXUV\left(\frac{q}{Y^k} + \frac{q}{XUV}\right).$$

Возвращаясь к оценке $S_c(U,V)$, будем иметь:

$$|S_c(U,V)|^{2k} \leqslant 6(\ln q)(2XUV)^{2k}(kY^2)^k\left(\frac{q}{Y^k} + \frac{q}{XUV}\right),$$

откуда

$$|S_c(U,V)| \leqslant 2\sqrt{k}(6\ln q)^{1/(2k)}XYUV\left(\frac{q}{Y^k} + \frac{q}{XUV}\right)^{1/(2k)}.$$

Положим теперь $Y = \left[q^{2/k}\right] + 1$, так что $Y \leqslant q^{1/7} + 1 < U < V$. Тогда $qY^{-k} \leqslant q^{-1}$. Далее, пусть $X = \left[0.5VY^{-1}\right]$, тогда

$$2XY \leqslant V, \quad X \geqslant 0.5VY^{-1} - 1 \geqslant 0,5V(q^{2/k}+1)^{-1} \geqslant 0.25Vq^{-2/k} > 0.25q^{1/6-1/7} > 1$$

и, кроме того,

$$\frac{q}{XUV} \leqslant \frac{3qY}{UV^2}.$$

Поскольку $UV \geqslant Nq^{-\delta}$, $V \geqslant \sqrt{UV} \geqslant \sqrt{N}q^{-\delta/2}$, то

$$\frac{q}{XUV} \leqslant \frac{3qY}{UV^2} \leqslant \frac{3q^{1+1.5\delta}Y}{N^{3/2}} \leqslant \frac{4q^{1+1.5\delta+2/k}}{q^{1+1.5\varepsilon}} \leqslant 4q^{-0.75\varepsilon+2/k}.$$

Беря $k = \left[4\varepsilon^{-1}\right] + 1$, получим: $-0.75\varepsilon + 2/k \leqslant -0.25\varepsilon$, так что

$$\begin{aligned}
&\frac{q}{Y^k} + \frac{q}{XUV} \leqslant q^{-1} + 4q^{-0.25\varepsilon} < 5q^{-0.25\varepsilon},\\
&|S_c(U,V)| \leqslant \frac{5}{\sqrt{\varepsilon}}(30\ln q)^{1/(2k)}XYUVq^{-\varepsilon/(8k)} < XYUVq^{-\varepsilon^2/33},\\
&|S(U,V)| < UVq^{-\varepsilon^2/33}(\ln q + 1) < Nq^{-\varepsilon^2/33}(\ln q + 1).
\end{aligned}$$

Суммарный вклад в S_1 от всех таких пар U, V не превосходит по порядку

$$Nq^{-\varepsilon^2/33}(\ln q)^3.$$

Окончательно находим:

$$|S_1| \ll Nq^{-\varepsilon^2/33}(\ln q)^3 + Nq^{-\varepsilon/2}(\ln q)^2 < Nq^{-\varepsilon^2/35}.$$

Рассмотрим теперь сумму S_2. Замечая, что

$$r(n) = 4\sum_{u|n}\chi_4(u), \quad \text{где} \quad \chi_4(u) = \begin{cases} 1, & u \equiv 1 \pmod 4,\\ -1, & u \equiv 3 \pmod 4,\\ 0, & u \equiv 0 \pmod 2\end{cases}$$

— неглавный характер по модулю 4, находим:

$$S_2 \,=\, 4\sum_{1\leqslant uv\leqslant N}\chi(u)e_q\biggl(\frac{a}{uv+b}\biggr) \,=\, 4\sum_{U,V}S(U,V),$$

где

$$S(U,V) \,=\, \sum_{U<u\leqslant U_1}\;\sum_{V<v\leqslant V_1}\chi(u)e_q\biggl(\frac{a}{uv+b}\biggr)$$

(все обозначения сохраняют тот же смысл, что и выше). Достаточно оценить сумму $S(U,V)$ при условии $Nq^{-\delta} < UV \leqslant N$, $\min{(U,V)} > q^{1/6}$. Если $U\leqslant V$, то искомая оценка получается дословным повторением приведённых выше рассуждений. Пусть $q^{1/6} < V < U$; имеем тогда: $S(U,V) = S^{(1)}(U,V) - S^{(3)}(U,V)$, где

$$S^{(j)}(U,V) \,=\, \sum_{V<v\leqslant V_1}\;\sum_{\substack{U<u\leqslant U_1\\ u\equiv j \pmod 4}} e_q\biggl(\frac{a}{uv+b}\biggr).$$

Полагая $u = 4w+j$, будем иметь:

$$S^{(j)}(U,V) \,=\, \sum_{V<v\leqslant V_1}\;\sum_{W<w\leqslant W_2} e_q\biggl(\frac{a\overline{v}}{4w+j+b\overline{v}}\biggr) \,=\, \sum_{V<v\leqslant V_1}\;\sum_{W<w\leqslant W_2} e_q\biggl(\frac{\overline{4}a\overline{v}}{w+\overline{4}(j+b\overline{v})}\biggr),$$

где $W = (U-j)/4$, $W_1 = (U_1-j)/4$, $W_2 = \min{(W_1, Nv^{-1})}$. Задавшись целыми X и Y с условиями $2XV < q$, $2XY < W$, $X,Y\geqslant 1$ и преобразуя сумму по w с помощью замены $w\mapsto w+xy$, где $1\leqslant x\leqslant X$, $1\leqslant y\leqslant Y$, получим:

$$|S^{(j)}(U,V)| \,\leqslant\, \sum_{|c|\leqslant h/2}\frac{|S_c^{(j)}(W,V)|}{|c|+1},$$

$$S^{(j)}(U,V) \,=\, \sum_{V<v\leqslant V_1}\;\sum_{W-XY<w\leqslant W_2-1}\;\sum_{x=1}^{X}f(c;v,w,x)\sum_{y=1}^{Y}e_h(cy)e_q\biggl(\frac{\overline{4}a\overline{v}}{w+xy+\overline{4}(j+b\overline{v})}\biggr),$$

где $h = 2[W+1]+1$, и $|f(c;v,w,x)|\leqslant 1$ для всех рассматриваемых c,v,w и x. Переходя к оценкам, будем иметь:

$$|S^{(j)}(U,V)| \,\leqslant\, \sum_{V<v\leqslant V_1}\;\sum_{0.5W<w\leqslant W_1}\;\sum_{x=1}^{X}\biggl|\sum_{y=1}^{Y}e_h(cy)e_q\biggl(\frac{\overline{4}a\overline{v}\overline{x}}{y+\overline{x}(w+\overline{4}(j+b\overline{v}))}\biggr)\biggr| \,=$$

$$= \sum_{z=1}^{q}\sum_{t\in T}\mu(z;t)\biggl|\sum_{y=1}^{Y}e_h(cy)e_q\biggl(\frac{z}{y+t}\biggr)\biggr|,$$

где $\mu(z;t)$ — число решений системы

$$\begin{cases}\overline{4}a\overline{v}\overline{x} \,\equiv\, z \pmod q,\\ \overline{x}(w+\overline{4}(j+b\overline{v})) \,\equiv\, t \pmod q,\\ 1\leqslant x\leqslant X,\ 0.5W<w\leqslant W_1,\ V<v\leqslant V_1,\end{cases}$$

а T — множество значений, которые принимает по модулю q величина $\overline{x}(w+\overline{4}(j+b\overline{v}))$ в случае, когда переменные v,w и x независимо друг от друга пробегают указанные промежутки (очевидно, $|T| \leqslant XUV$). Задавшись целым $k \geqslant 14$ и применяя неравенство Гёльдера, получим: $|S^{(j)}(U,V)|^{2k} \leqslant \Sigma_1^{2k-2}\Sigma_2\Sigma_3$, где Σ_1, Σ_2 и Σ_3 определяются как и выше.

Сумма Σ_2 совпадает с числом решений системы

$$\begin{cases} \overline{4}a\overline{v}_1\overline{x}_1 \equiv \overline{4}a\overline{v_2}\overline{x}_2 \pmod q, \\ \overline{x}_1(w_2 + \overline{4}(j + b\overline{v}_1)) \equiv \overline{x}_2(w_1 + \overline{4}(j + b\overline{v}_2)) \pmod q \end{cases}$$

с неизвестными $1 \leqslant x_1, x_2 \leqslant X$, $0.5W < w_1, w_2 \leqslant W_1$, $V < v_1, v_2 \leqslant V_1$, или, что то же, системы

$$\begin{cases} x_1v_1 \equiv x_2v_2 \pmod q, \\ x_1(w_1 + \overline{4}j) \equiv x_2(w_2 + \overline{4}j) \pmod q \end{cases}$$

с теми же ограничениями. Положив $u_r = 4w_r + j$, придём к системе рассмотренного выше вида, число решений которой оценивается с помощью леммы. Так получим:

$$\Sigma_2 < 3XUV\ln q.$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с приведёнными выше. Теорема доказана. □

4. Следствия основной теоремы

Полученные выше оценки тригонометрических сумм позволяют сделать ряд заключений о поведении дробных долей функций вида

$$\left\{\frac{a}{uv+b}\right\}, \quad \left\{\frac{a}{u^2+v^2+b}\right\}$$

в случаях, когда целочисленные переменные u, v меняются в гиперболической ($uv \leqslant N$, $u, v \geqslant 1$) или круговой ($u^2 + v^2 \leqslant N$) областях. В частности, имеют место следующие утверждения.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\sum_{n\leqslant N}\tau(n)\left\{\frac{a(n+c)^*}{q}\right\} = \sum_{1\leqslant uv\leqslant N}\left\{\frac{a(uv+c)^*}{q}\right\} = \frac{1}{2}N(\ln N + 2\gamma - 1) + O\bigl(Nq^{-(\varepsilon/6)^2}\bigr),$$

$$\sum_{n\leqslant N}r(n)\left\{\frac{a(n+c)^*}{q}\right\} = \sum_{1\leqslant u^2+v^2\leqslant N}\left\{\frac{a(u^2+v^2+c)^*}{q}\right\} = \pi N + O\bigl(Nq^{-(\varepsilon/6)^2}\bigr),$$

где γ — постоянная Эйлера.

Теорема 3. *Пусть $0 \leqslant \alpha < \beta < 1$. Тогда, в условиях теоремы 1, для величин $K_j = K_j(\alpha,\beta;q,N;a,c)$, $j = 1,2$, обозначающих, соответственно, количества решений неравенств*

$$\alpha < \left\{\frac{a(uv+c)^*}{q}\right\} \leqslant \beta, \quad \alpha < \left\{\frac{a(u^2+v^2+c)^*}{q}\right\} \leqslant \beta$$

в целых числах u и v с условиями $uv \leqslant N$, $u,v \geqslant 1$ и $u^2+v^2 \leqslant N$, справедливы следующие формулы:

$$K_1 = (\beta-\alpha)N(\ln N + 2\gamma - 1) + O\bigl(Nq^{-(\varepsilon/6)^2}\bigr), \quad K_2 = (\beta-\alpha)\pi N + O\bigl(Nq^{-(\varepsilon/6)^2}\bigr).$$

Теорема 4. *Пусть ξ – произвольное вещественное число, $0 \leqslant \xi < 1$. Тогда, в условиях теоремы 1, имеют место следующие неравенства:*

$$\min_{\substack{1\leqslant uv\leqslant N\\ u,v\geqslant 1}}\left\|\xi-\frac{a(uv+c)^*}{q}\right\|\ll q^{-(\varepsilon/6)^2},\quad \min_{1\leqslant u^2+v^2\leqslant N}\left\|\xi-\frac{a(u^2+v^2+c)^*}{q}\right\|\ll q^{-(\varepsilon/6)^2},$$

где $\|z\| = \min\left(\{z\}, 1-\{z\}\right)$ *– расстояние от z до ближайшего целого числа.*

Доказательство.

Доказательства теорем 2 и 3 получаются применением стандартной техники (см., например, [49, гл. I]); теорема 4 есть прямое следствие формул теоремы 3.

5. Заключительные замечания

Приведённые выше рассуждения практически без изменений переносятся на случай сумм

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\tau(n)e_q\biggl(\frac{a}{(n+b)^r}\biggr),\quad \sum_{1\leqslant n\leqslant N}r(n)\;e_q\biggl(\frac{a}{(n+b)^r}\biggr),$$

где $r \geqslant 2$ — произвольное фиксированное число. Кроме того, оценки, подобные оценкам теоремы 1, могут быть получены и для сумм вида

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\tau(n)e_q\biggl(\frac{a}{n+b}+cn\biggr),\quad \sum_{1\leqslant n\leqslant N}r(n)\;e_q\biggl(\frac{a}{n+b}+cn\biggr),$$

где $(c, q) = 1$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Heath-Brown D. R. Arithmetic applications of Kloosterman sums // *Nieuw Archief voor Wiskunde. Serie 5*, **4** (2000), 380–384.

2. Sarnak P. Kloosterman, qudratic forms and modular forms // *Nieuw Archief voor Wiskunde. Serie 5*, **4** (2000), 385–389.

3. Устинов А. В. Приложения сумм Клоостермана к арифметике и геометрии. Алгоритм Евклида, цепные дроби, решетки и числа Фробениуса. LAMBERT Academic Publishing, 2011.

4. Иванец Х., Ковальский Э. Аналитическая теория чисел. М., Изд-во МЦНМО, 2014.

5. Hajela D., Pollington A., Smith B. On Kloosterman sums with oscillating coefficients // *Canad. Math. Bull.*, **31**:1 (1988), 32–36.

6. Wang G., Zheng Z. Kloosterman sums with oscillating coefficients // *Chinese Ann. Math.*, **19** (1998), 237–242 (кит.); англ. пер.: *Chinese J. Contemp. Math.* **19** (1998), 185–191.

7. Deng P. On Kloosterman sums with oscillating coefficients // *Canad. Math. Bull.* **42**:3 (1999), 285–290.

8. Gong K., Jia C. Kloosterman sums with multiplicative coefficients // `arXiv:1401.4556v4 [math.NT]`.

9. Королёв М. А. Короткие суммы Клоостермана с весами // *Матем. заметки*, **88**:3 (2010), 415–427.

10. Королёв М. А. Суммы Клоостермана с мультипликативными коэффициентами // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:4 (2018) (в печати).

11. van der Corput I. G. Verschärfung der Abshchätzungen beim Teilerproblem // *Math. Ann.*, **87** (1922), ss. 39-65.

12. van der Corput I. G. Neue zahlentheoretische Abshchätzungen // *Math. Ann.*, **89** (1923), ss. 215–254.

13. van der Corput I. G. Neue zahlentheoretische Abshchätzungen // *Math. Zeitschr.*, **29** (1928), ss. 397–426.

14. Vinogradow I. On Weyl's sums // *Матем. сб.*, **42**:5 (1935), 521–530.

15. Vinogradow I. On asymptotic formula in Warings problem // *Матем. сб.*, **1(43)**:2 (1936), 169–174.

16. Виноградов И. М. Новый метод в аналитической теории чисел // *Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова*, **10**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1937, 5–122.

17. Виноградов И. М. Некоторые общие леммы и их применение к оценке тригонометрических сумм // *Матем. сб.*, **3(45)**:3 (1938), 435–471.

18. Виноградов И. М. Две теоремы из аналитической теории чисел // *Труды Тбилисск. матем. ин-та*, **5** (1938), 153–180.

19. Виноградов И. М. Улучшение оценок тригонометрических сумм // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **6**:1-2 (1942), 33–40.

20. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // *Тр. МИАН СССР*, **23**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947, 3–109.

21. Виноградов И. М. Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15**:2 (1951), 109–130.

22. Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$ // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:2 (1958), 161–164.

23. Виноградов И.М. Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30**:3 (1966), 481–496.

24. Карацуба А. А. Тригонометрические суммы специального вида и их приложения // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:1 (1964), 237–248.

25. Карацуба А. А. О системах сравнений // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:4 (1965), 935–944.

26. Карацуба А. А. Суммы характеров и первообразные корни в конечных полях // *Докл. АН СССР*, **180** (1968), 1287–1289.

27. Карацуба А. А. Об оценках сумм характеров // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:1 (1970), 20–30.

28. Карацуба А. А. Суммы характеров с простыми числами // *Докл. АН СССР*, **190** (1970), 517–518.

29. Карацуба А. А. Оценки тригонометрических сумм методом И.М. Виноградова и их применения // *Тр. МИАН СССР*, **112**, 1971, 241–255.

30. Карацуба А. А. Суммы характеров по последовательности сдвинутых простых чисел и их применения // *Матем. заметки*, **17**:1 (1975), 155–159.

31. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Верхняя граница модуля кратной тригонометрической суммы // *Тр. МИАН СССР*, **143**, 1977, 3–31.

32. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Точная оценка числа решений одной системы диофантовых уравнений // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:6 (1978), 1187–1226.

33. Карацуба А. А. Суммы символов Лежандра от многочленов второй степени с простыми числами // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:2 (1978), 315–324.

34. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы и их приложения // *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:4 (1980), 3–125.

35. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы // *Тр. МИАН СССР*, **151**, 1980, 3–128.

36. Burgess D. A. The distribution of quardratic residues and non-residues // *Mathematika*, **4** (1957), 106–112.

37. Burgess D. A. On character sums and L-series. II // Proc. London Math. Soc., **(3)13**:1 (1963), 524–536.

38. Fouvry E., Michel P. Sur certaines sommes d'exponentielles sur les nombres premiers // *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 31:1 (1998), 93–130.

39. Bourgain J. More on the sum-product phenomenon in prime fields and its applications // *Int. J. Number Theory*, **1** (2005), 1–32.

40. Weil A. On some exponential sums, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **34** (1948), 204–207.

41. Baker R. C. Kloosterman sums with prime variable // *Acta Arith.*, **152**:4 (2012), 351–372.

42. Бургейн Ж., Гараев М. З. Сумма множеств, образованных обратными элементами в полях простого порядка, и полилинейные суммы Клоостермана // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:4 (2014), 19–72.

43. Королёв М. А. О нелинейной сумме Клоостермана // *Чебышевский сб.*, **17**:1 (2016), 140–147.

44. Королёв М. А. Обобщенная сумма Клоостермана с простыми числами // *Тр. МИАН*, **296**, МАИК, М., 2017, 163–180.

45. Королёв М. А. Элементарное доказательство оценки суммы Клоостермана с простыми числами // *Матем. заметки*, **103**:5 (2018), 720–729.

46. Карацуба А. А. Суммы характеров с весами // *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:2 (2000), 29–42.

47. Карацуба А. А. Об одной арифметической сумме // *ДАН СССР*, **199**:4 (1971), 770–772.

48. Ayyad A., Cochrane N., Zheng Z. The congruence $x_1x_2 \equiv x_3x_4 (\mathrm{mod}\, p)$, the equation $x_1x_2 = x_3x_4$, and mean value of character sums // *J. Number Theory.* **59** (1996), pp. 398–413.

49. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М., Наука, 1983.

REFERENCES

1. Heath-Brown D. R. 2000, “Arithmetic applications of Kloosterman sums”, *Nieuw Archief voor Wiskunde. Serie 5*, vol. 4, pp. 380–384.

2. Sarnak P. 2000, “Kloosterman, qudratic forms and modular forms”, *Nieuw Archief voor Wiskunde. Serie 5*, vol. 4, pp. 385–389.

3. Ustinov A. V. 2011, Applications of Kloosterman Sums in Arithmetic and Geometry, LAMBERT Academic Publishing.

4. Iwaniec H., Kowalski E. 2004, Analytic Number Theory. Colloquium Publications, vol. 53. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island.

5. Hajela D., Pollington A., Smith B. 1988, “On Kloosterman sums with oscillating coefficients”, *Canad. Math. Bull.*, vol. 31, no. 1, pp. 32–36.

6. Wang G., Zheng Z. 1998, “Kloosterman sums with oscillating coefficients”, *Chinese Ann. Math.*, vol. 19, pp. 237–242 (chinese); engl. transl.: *Chinese J. Contemp. Math.*, vol. 19, pp. 185–191.

7. Deng P. 1999, “On Kloosterman sums with oscillating coefficients”, *Canad. Math. Bull.*, vol. 42, no. 3, pp. 285–290.

8. Gong K., Jia C. 2014, “Kloosterman sums with multiplicative coefficients”,
`arXiv:1401.4556v4 [math.NT]`.

9. Korolev M. A. 2010, “Short Kloosterman Sums with Weights”, *Math. Notes*, vol. 88, no. 3, pp. 374–385.

10. Korolev M. A. 2018, “On Kloosterman sums with multiplicative coefficients”, *Izv. Math.* (to appear).

11. van der Corput I. G. 1922, “Verschärfung der Abshchätzungen beim Teilerproblem”, *Math. Ann.*, vol. 87, pp. 39-65.

12. van der Corput I. G. 1923, “Neue zahlentheoretische Abshchätzungen”, *Math. Ann.*, vol. 89, pp. 215–254.

13. van der Corput I. G. 1928, “Neue zahlentheoretische Abshchätzungen”, *Math. Zeitschr.*, vol. 29, pp. 397–426.

14. Vinogradow I. 1935, “On Weyl’s sums”, *Recueil Mathém. Nouv. sér.*, vol. 42, no. 5, pp. 521–530.

15. Vinogradow I. 1936, “On asymptotic formula in Warings problem”, *Recueil Mathém. Nouv. sér.*, vol. 1(43), no. 2, pp. 169–174.

16. Vinogradov I. M. 1937, “A new method in analytic number theory”, *Travaux Inst. Math. Stekloff*, vol. 10, Acad. Sci. USSR, Moscow–Leningrad.

17. Vinogradow I. 1938, “Some general lemmas and their application to the estimation of trigonometrical sums”, *Recueil Mathém. Nouv. sér.*, vol. 3(45), no. 3, pp. 435–471.

18. Vinogradoff I. 1938, “Zwei Sätze aus der Analytischen Zahlentheorie”, *Acad. Sci. URSS, Fil. Géorgienne, Trav. Inst. math. Tbilissi*, vol. 5, pp. 153–180.

19. Vinogradow I. 1942, “An improvement of the estimation of trigonometrical sums”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 6, no. 1-2, pp. 33–40.

20. Vinogradov I. M. 1947, “The method of trigonometrical sums in the theory of numbers”, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 23, Acad. Sci. USSR, Moscow–Leningrad.

21. Vinogradov I. M. 1951, “General theorems on the upper bound of the modulus of a trigonometric sum”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 15, no. 2, pp. 109–130.

22. Vinogradov I. M. 1958, “A new estimate of the function $\zeta(1+it)$”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 22, no. 2, pp. 161–164.

23. Vinogradov I. M. 1966, “An estimate for a certain sum extended over the primes of an arithmetic progression”, *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, vol. 30, pp. 481–496.

24. Karatsuba A. A. 1964, “Trigonometric sums of a special type and their applications”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 28, no. 1, pp. 237–248.

25. Karatsuba A. A. 1965, “On systems of congruences”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 29, no. 4, pp. 935–944.

26. Karatsuba A. A. 1968, “Character sums and primitive roots in finite fields”, *Sov. Math., Dokl.* vol. 9, pp. 755–757.

27. Karatsuba A. A. 1970, “Estimates of character sums”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 4, no. 1, pp. 19–29.

28. Karatsuba A. A. 1970, “On sums of characters with primes”, *Sov. Math., Dokl.* vol. 11, pp. 135–137.

29. Karatsuba A. A. 1971, “Estimates for trigonometric sams by Vinogradov’s method and some applications”, *Tr. Mat. Inst. Steklova*, vol. 112, pp. 241–255.

30. Karatsuba A. A. 1975, “Sums of characters in sequences of shifted prime numbers, with applications”, *Math. Notes*, vol. 17, no. 1, pp. 91–93.

31. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1980, “An upper bound of the modulus of a multiple trigonometric sum”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 143, pp. 1–31.

32. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1979, “A sharp estimate for the number of solutions of a system of Diophantine equations”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 13, no. 3, pp. 461–497.

33. Karatsuba A. A. 1978, “Sums of Legendre symbols of polynomials of second degree over prime numbers”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 12, no.2, pp. 299–308.

34. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1981, “Multiple trigonometric sums and their applications”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 17, no. 1, pp. 1–54.

35. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N. 1982, “Multiple trigonometric sums”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 151, no. 2, pp. 1–126.

36. Burgess D. A. 1957, "The distribution of quardratic residues and non-residues", *Mathematatika*, vol. 4, pp. 106–112.

37. Burgess D. A. 1963, "On character sums and L-series. II", *Proc. London Math. Soc.*, vol. (3)13, no. 1, pp. 524–536.

38. Fouvry E., Michel P. 1998, "Sur certaines sommes d'exponentielles sur les nombres premiers", *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, vol. 31, no. 1, pp. 93–130.

39. Bourgain J. 2005, "More on the sum -product phenomenon in prime fields and its applications", *Int. J. Number Theory*, vol. 1, pp. 1–32.

40. Weil A. 1948, "On some exponential sums", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 34, pp. 204–207.

41. Baker R. C. 2012, "Kloosterman sums with prime variable", *Acta Arith.*, vol. 152, no. 4, pp. 351–372.

42. Bourgain J., Garaev M. Z. 2014, "Sumsets of reciprocals in prime fields and multilinear Kloosterman sums", *Izv. RAN. Ser. Mat.*, vol. 78, no. 4, pp. 656–707.

43. Korolev M. A. 2016, "On non-linear Kloosterman sum", *Chebyshevskii Sb.*, vol. 17, no. 1, pp. 140–147.

44. Korolev M. A. 2017, "Generalized Kloosterman sum with primes", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 296, pp. 154–171.

45. Korolev M. A. 2018, "Elementary Proof of an Estimate for Kloosterman Sums with Primes", *Mat. Zametki*, vol. 103, no. 5, pp. 720–729.

46. Karatsuba A. A. 2000, "Weighted character sums", *Izv. Math.*, vol. 64, no. 2, pp. 249–263.

47. Karatsuba A. A. 1971, "A certain arithmetic sum", *Soviet Math. Dokl.*, vol. 12, pp. 1172–1174.

48. Ayyad A., Cochrane N., Zheng Z. 1996, "The congruence $x_1x_2 \equiv x_3x_4 (\bmod p)$, the equation $x_1x_2 = x_3x_4$, and mean value of character sums", *J. Number Theory.* vol. 59, pp. 398–413.

49. Karatsuba A. A. 1993, Basic Analytic Number Theory, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Получено 08.06.2018
Принято к печати 15.10.2018