ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 3.

УДК 517.957 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-164-182

О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов

Исхоков Сулаймон Абунасрович — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент АН РТ, Зам. директора Института математики им. А. Джураева АН Республики Таджикистан.
e-mail: sulaimon@mail.ru
Якушев Илья Анатольевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики Политехнического института (филиала) Северо-Восточного федерального университета им. М. К. Аммосова в г. Мирном.
e-mail: Yakushevilya@mail.ru

Аннотация

В работе исследуется однозначная разрешимость вариационной задачи Дирихле, связанной с интегро-дифференциальной полуторалинейной формой

$$B[u,\, v] = \sum_{j\in J} B_j[u,\, v], \qquad (*)$$

где

$$B_j[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=j} \int_\Omega \rho(x)^{2\tau_j} b_{kl}(x) u^{(k)}(x)\, \overline{v^{(l)}(x)} dx,$$

Ω — ограниченная область в евклидовом пространстве R^n с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$, $\rho(x)$, $x \in \Omega$, — регуляризованное расстояние от точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$, k — мультииндекс, $u^{(k)}(x)$ — обобщенная производная мультииндекса k функции $u(x)$, $x \in \Omega$, $b_{kl}(x)$ — ограниченные в Ω комплекснозначные функции, $J \subset \{1,\, 2,\, \ldots,\, r\}$ и τ_j, $j \in J$, — вещественные числа. Предполагается, что $r \in J$. Вырождение коэффициентов дифференциального оператора, ассоциированного с формой (*), называется согласованным, если существует число α такое, что $\tau_j = \alpha + j - r$ при всех $j \in J$. В противном случае оно называется несогласованным.

Вариационная задача Дирихле, связанная с формой (*), в случае согласованного вырождения коэффициентов хорошо исследована во многих работах, где также предполагается, что форма (*) удовлетворяет условию коэрцитивности. Следует отметить, что случай несогласованного вырождения коэффициентов сопряжен с некоторыми техническими сложностями и рассмотрен лишь в некоторых отдельных работах. В этом случае с помощью теорем вложения пространств дифференцируемых функций со степенными весами выделяются старшие формы $B_j[u,\, v]$, $j \in J_2 \subset J$ и доказывается, что разрешимость вариационной задачи Дирихле в основном зависит от старших форм.

В работе рассматривается случай несогласованного вырождения коэффициентов исследуемого оператора и, в отличие от ранее опубликованных работ по этому направлению, допускается случай, когда основная форма (*) может не удовлетворять условию коэрцитивности.

Ключевые слова: Вариационная задача Дирихле, эллиптический оператор, несогласованное вырождение, некоэрцитивная форма.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
С. А. Исхоков, И. А. Якушев. О разрешимости вариационной задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических операторов // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 164–182.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 3.

UDC 517.957 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-164-182

On solvability of variational Dirichlet problem for a class of degenerate elliptic operators

Iskhokov Sulaimon Abuzarovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, corresponding member of the Academy of Sciences RT, deputy director of the Dzhuraev Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan.
e-mail: sulaimon@mail.ru
Yakushev Ilya Anatolyevich — kandidat of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of fundamental and applied mathematics, Mirny Polytechnic Institute, the branch of Ammosov North-Eastern Federal University.
e-mail: Yakushevilya@mail.ru

Abstract

The paper is devoted to investigation of unique solvability of the Dirichlet variational problem associated with integro-differential sesquilinear form

$$B[u,\,v]=\sum_{j\in J}B_j[u,\,v], \qquad (*)$$

where

$$B_j[u,\,v]=\sum_{|k|=|l|=j}\int_{\Omega}\rho(x)^{2\tau_j}b_{kl}(x)u^{(k)}(x)\,\overline{v^{(l)}(x)}dx,$$

Ω — a bounded domain in the euclidian space R^n with a closed $(n-1)$-dimensional boundary $\partial\Omega$, $\rho(x)$, $x\in\Omega$, — a regularized distance from a point $x\in\Omega$ to $\partial\Omega$, k — a multi-index, $u^{(k)}(x)$ — a generalized derivative of multi-index k of a function $u(x)$, $x\in\Omega$, $b_{kl}(x)$ — bounded in Ω complex-valued functions, $J\subset\{1,\,2,\,\ldots,\,r\}$ and τ_j, $j\in J$, — real numbers. It is assumed that $r\in J$. A degeneracy of coefficients of the differential operator associated with the form (*), is said to be coordinated if there exist a number α such that $\tau_j=\alpha+j-r$ for all $j\in J$. Otherwise it is called uncoordinated.

The variational Dirichlet problem associated with the form (*) in the case of coordinated degeneracy of coefficients is well studied in many papers, where it is also assumed that the form (*) satisfies a coercivness condition. It should be mentioned that the case of uncoordinated degeneracy of the coefficients is fraught with some technical complexities and it was only considered in some separate papers. In this case with the aid of embedding theorems for spaces of differentiable functions with power weights leading forms $B_j[u,\,v]$, $j\in J_2\subset J$, are separated and it is proved that solvability of the variational Dirichlet problem is generally depends on the leading forms.

We consider the case of uncoordinated degeneracy of coefficients of the operator under investigation and, in contrast to previously published works on this direction, it is allowed that the main form (*) does not obey coerciveness condition.

Keywords: Variational Dirichlet problem, elliptic operator, uncoordinated degeneration, noncoercive form

Bibliography: 16 titles.

For citation:

S. A. Iskhokov, I. A. Yakushev. 2018, "On solvability of variational Dirichlet problem for a class of degenerate elliptic operators" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 164–182.

1. Введение

Работа посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле с однородными граничными условиями для эллиптических операторов в ограниченной области со степенным вырождением на границе области.

Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и Ω — ограниченная область в R^n с замкнутой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Omega$. Символом $\rho(x)$ обозначим положительную функцию класса $C^\infty(\Omega)$ со следующими свойствами

$$\rho(x) \le \mathrm{dist}\{x,\, \partial\Omega\} \le M\rho(x), \quad |\rho^{(k)}(x)| \le M_k \rho^{1-|k|}(x),$$

для любого $x \in \Omega$ и любого мультииндекса $k = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$; M, M_k — некоторые положительные постоянные и $|k| = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ — длина мультииндекса k.

Пусть r — натуральное число и J — некоторое подмножество множества $\{0,\, 1, \ldots, r\}$, причем $r \in J$. Пусть τ_j, $j \in J$, — вещественные числа. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L[u] = \sum_{|k|=|l|=j\in J} (-1)^j \left(\rho(x)^{2\tau_j} b_{kl}(x) u^{(k)}(x)\right)^{(l)}, \tag{1}$$

который понимается в смысле теории распределений на Ω. Предполагается, что коэффициенты $b_{kl}(x)$, $x \in \Omega$, являются ограниченными комплекснозначными функциями.

Определение 1. Вырождение коэффициентов оператора (1) называется **согласованным**, если существует число α такое, что $\tau_j = \alpha + j - r$ при всех $j \in J$. В противном случае оно называется **несогласованным**.

Вариационная задача Дирихле для оператора (1) в случае согласованного вырождения коэффициентов хорошо исследована в работах [1] - [13]. Случай несогласованного вырождения коэффициентов рассмотрен только в работе [14].

При этом только в работах [9, 10, 11, 12] рассмотрен случай, когда связанная с оператором (1) интегро-дифференциальная полуторалинейная форма

$$B[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int_\Omega \rho(x)^{2\tau_j} b_{kl}(x) u^{(k)}(x)\, \overline{v^{(l)}(x)} dx \tag{2}$$

не является коэрцитивной. Здесь и далее понятие коэрцитивности формы понимается в смысле определения 2.0.1 работы [7]: если H_0 — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_0$ и нормой $\|\cdot\|_0$, H_+ — другое гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_+$, плотно вложенное в H_0, то определенная в H_+ полуторалинейная форма $P[u,\, v]$ называется H_+-коэрцитивной относительно H_0, если найдутся числа $\mu_0 \in R$, $\delta_0 > 0$ такие, что

$$\mathrm{Re}\, P[u,\, u] + \mu_0 \|u\|_0^2 \ge \delta_0 \|u\|_+^2$$

для всех $u \in H_+$.

В настоящей работе исследуется разрешимость вариационной задачи Дирихле, связанной с оператором (1) в случае несогласованности вырождения его коэффициентов и некоэрцитивности формы (2).

2. Формулировка основных результатов

Пусть j — натуральное, α_j, p_j — вещественные числа и $1 \le p_j < \infty$. Символом $W^{j}_{p_j;\,\alpha_j}(\Omega)$ обозначим пространство функций $u(x)$, определенных на Ω, имеющих все обобщенные в смысле С.Л.Соболева производные $u^{(k)}(x)$ порядка j с конечной нормой

$$\|u; W^{j}_{p_j;\,\alpha_j}(\Omega)\| = \left\{ \sum_{|k|=j} \int_\Omega \rho^{p_j \alpha_j}(x) |u^{(k)}(x)|^{p_j} dx + \int_\Omega |u(x)|^{p_j} dx \right\}^{1/p_j}.$$

Полуторалинейную форму (2) представим в виде

$$B[u,\, v] = \sum_{j \in J} B_j[u,\, v], \quad B_j[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=j} \int_\Omega \rho(x)^{2\tau_j} b_{kl}(x) u^{(k)}(x)\, \overline{v^{(l)}(x)} dx.$$

Определение 2. Пусть i_0 — наименьший ненулевой элемент множества J. Если $\tau_{i_0} > i_0$, то через j_0 обозначим наибольшее число из множества J такое, что $j_0 - \tau_{j_0} > i_0 - \tau_{i_0}$. В случае $\tau_{i_0} \le i_0$ через j_0 обозначим наибольшее число из множества J такое, что $\tau_{i_0} > \tau_{j_0} i_0/j_0$. Если же такое число $j_0 \in J$ не существует, то обозначим i_0 через j_0. Пусть i_1 — наименьший ненулевой элемент множества $J \setminus \{i_0,\, j_0\}$. Если $\tau_{i_1} > i_1$, то через j_1 обозначим наибольшее число из множества J такое, что $j_1 - \tau_{j_1} > i_1 - \tau_{i_1}$. В случае $\tau_{i_1} \le i_1$ через j_1 обозначим наибольшее число из множества J такое, что $\tau_{i_1} > \tau_{j_1} i_1/j_1$. Если же такое число $j_1 \in J \setminus \{i_0,\, j_0\}$ не существует, то обозначим i_1 через j_1. Продолжая этот процесс до завершения, представим множество индексов J в виде $J = J_1 \cup J_2$, $J_1 \cap J_2 = \emptyset$, где $J_1 = \{i_0,\, i_1,\, \ldots,\, i_t\}$, $J_2 = \{j_0,\, j_1,\, \ldots,\, j_s\}$. Полуторалинейные формы $B_j[u,\, v]$ с индексами из множества J_2 назовем **старшими**.

Вводим пространство $\mathbb{H}_+$ комплекснозначных функций $u(x)$, $x \in \Omega$ с конечной нормой

$$\|u;\, \mathbb{H}_+\| = \left\{ \sum_{m=0}^{s} \left\| u;\, W^{j_m}_{2;\tau_{j_m}}(\Omega) \right\|^2 \right\}^{1/2}. \tag{3}$$

Символом $\mathbb{H}'_+$ обозначим замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в метрике пространства $\mathbb{H}_+$, а через $\mathbb{H}'_-$ обозначим пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на $\mathbb{H}'_+$ со следующей нормой

$$\left\|F;\, \mathbb{H}'_-\right\| = \sup \frac{|< F,\, u >|}{\|u;\, \mathbb{H}_+\|},$$

где верхняя грань берется по всем ненулевым функциям $u \in \mathbb{H}'_+$. Здесь и далее символом $< F,\, u >$ обозначено значение функционала F на функцию u.

Обозначим через $(\cdot,\, \cdot)_0$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Задача D_λ. Для заданного функционала $F \in \mathbb{H}'_-$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения

$$B[U,\, v] + \lambda(U,\, v)_0 =< F, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4}$$

принадлежащее пространству $\mathbb{H}'_+$.

Для каждого $m \in \{0,\, 1, \ldots,\, s\}$ вводим функцию

$$L_{j_m}(x,\, \zeta) = \sum_{|k|=|l|=j_m} a_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l},$$

где $x \in \Omega$ и $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=j_m}$ — набор комплексных чисел.

Далее будем считать, что функция $\arg z$ принимает значения на отрезке $(-\pi,\, \pi]$.

Теорема 1. *Пусть числа τ_j, $j \in J$, такие, что*

$$\tau_j \geq -1/2; \quad \max_{j \in J}(j - \tau_j) > 0. \tag{5}$$

Пусть $m \in \{0, 1, \ldots, s\}$ и найдутся числа $\varphi_m \in (0, \pi)$, $M > 0$ и отличная от нуля в $\overline{\Omega}$ функция $\gamma_m(x) \in C(\overline{\Omega})$ такие, что выполняются следующие неравенства

$$|\arg L_{j_m}(x, \zeta)| < \varphi_m, \tag{6}$$

$$\sum_{|k|=j_m} |\zeta_k|^2 \leq M \mathrm{Re}\,\{\gamma_m(x) L_{j_m}(x, \zeta)\} \tag{7}$$

для всех $x \in \Omega$ и любого набора комплексных чисел $\zeta = \{\zeta_k\}_{|k|=j_m}$.

Тогда найдется число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \mathbb{H}'_-$ существует единственное решение $U(x)$ задачи D_λ и при этом справедлива оценка

$$\|U; \mathbb{H}'_+\| \leq M_0 \left\|F; \mathbb{H}'_-\right\|, \tag{8}$$

где число M_0 не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от функционала F.

Решение задачи D_λ принадлежит пространству $\mathbb{H}'_+$, в котором плотно множество финитных функций. Поэтому, формально, можно считать, что решение задачи D_λ удовлетворяет однородным граничным условиям. Далее мы исследуем разрешимость следующей задачи с неоднородными граничными условиями.

Задача $\mathbb{D}_\lambda$. Для заданного функционала $F \in \mathbb{H}'_-$ и заданной функции $U_1(x) \in \mathbb{H}_+$ требуется найти решение $U(x)$ уравнения (4), принадлежащее пространству $\mathbb{H}_+$ и удовлетворяющее условию

$$U(x) - U_1(x) \in \mathbb{H}'_+. \tag{9}$$

Условие (9) означает, что решение $U(x)$ задачи $\mathbb{D}_\lambda$ принимает на границе $\partial\Omega$ области Ω те же значения, что и заданная функция $U_1(x)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда существует число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ для любого заданного функционала $F \in \mathbb{H}'_-$ и любой заданной функции $U_1(x) \in \mathbb{H}_+$ задачи $\mathbb{D}_\lambda$ имеет единственное решение $U(x)$. Это решение удовлетворяет оценке*

$$\|U; \mathbb{H}'_+\| \leq (M_1 + \lambda)\, \|U_1; \mathbb{H}_+\| + M_1 \left\|F; \mathbb{H}'_-\right\|, \tag{10}$$

где число M_1 не зависит от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$ и от выбора функционала F и функции $U_1(x)$.

3. Доказательство теоремы 1

Далее нам понадобится следующая вспомогательная лемма.

Лемма 1. *Пусть $p \in [1, \infty)$, $r_1 > r_2 \geq 0$, α_1, α_2 — действительные числа, больше (-1/p). Пусть $r_1 - \alpha_1 > r_2 - \alpha_2$ при $\alpha_2 > r_2$ и $\alpha_2 > \alpha_1 r_2/r_1$, $r_2 > 0$ при $\alpha_2 \leq r_2$. Тогда для любого числа ε найдется постоянная $C = C(\varepsilon)$ такая, что для всех $u \in W^{r_1}_{p;\alpha_1}(\Omega)$ справедлива оценка*

$$\|u; W^{r_2}_{p;\alpha_2}(\Omega)\| \leq \varepsilon \|u; W^{r_1}_{p;\alpha_1}(\Omega)\| + C(\varepsilon)\|u; L_p(\Omega)\|. \tag{11}$$

Доказательство. Если выполняется одно из следующих условий:

1) $r_1 - \alpha_1 > r_2 - \alpha_2$;

2) $\alpha_2 > \alpha_1 r_2/r_1$, $r_2 > 0$,

то неравенство (11) имеет место в силу [7, теорема 1.1.7]. Далее для доказательства леммы 1 достаточно заметить, что в случае $\alpha_2 > r_2$ условие 2) слабее условия 1), а в случае $\alpha_2 \le r_2$ условие 1) слабее условия 2).

Согласно определения 2 для любого индекса $i_n, n \in \{0, 1, \dots, t\}$ найдется индекс $j_m, m \in \{0, 1, \dots, s\}$ такой, что $j_m - \tau_{j_m} > i_n - \tau_{i_n}$ при $\tau_{i_n} > i_n$ или $\tau_{i_n} > \tau_{j_m} i_n / j_m$ при $\tau_{i_n} > i_n$. Поэтому применяя лемму 1, имеем

$$\left\| u;\, W^{i_n}_{2;\tau_{i_n}}(\Omega) \right\| \le \varepsilon \left\| u;\, W^{j_m}_{2;\tau_{j_m}}(\Omega) \right\| + C(\varepsilon) \left\| u;\, L_2(\Omega) \right\|. \tag{12}$$

Замечание 1. Не ограничивая общности, можно считать, что числа φ_m и функции $\gamma_m(x)$ в условиях (6), (7) не зависят от m. Поэтому далее будем считать, что

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \dots = \varphi_s = \varphi, \qquad \gamma_0(x) = \gamma_1(x) = \dots = \gamma_s(x) = \gamma(x),\, x \in \Omega.$$

Пусть ν — достаточно малое положительное число и пусть $\psi_r(x),\, \eta_r(x) \in C^\infty(\Omega)\, (r = \overline{1, N})$ такие, что:

а) $\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x) + \dots + \psi_N^2(x) \equiv 1 \quad (x \in \overline{\Omega})$;

б) функция $\eta_r(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp} \psi_r(x)$ и $0 \le \eta_r \le 1$ для всех $x \in \overline{\Omega}$;

в) $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \nu$ для всех $x,\, y \in \operatorname{supp} \eta_r\, (r = \overline{1, N})$.

Рассмотрим полуторалинейную форму

$$B_r^{(0)}[u,v] = \sum_{j \in J} B_{r;j}^{(0)}[u,v], \quad B_{r;j}^{(0)}[u,v] = \sum_{|k|=|l|=j} \int_\Omega \rho^{2\tau_j}(x) b_{klr}^{(0)}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{13}$$

где

$$b_{klr}^{(0)}(x) = (1 - \eta_r(x)) \gamma(x_r) b_{kl}(x_r) + \eta_r(x) \gamma(x) b_{kl}(x). \tag{14}$$

Учитывая ограниченность коэффициентов $b_{kl}(x)$, $|k| = |l| = j \in J$, $x \in \Omega$, и применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\left| B_r^{(0)}[u,v] \right| \le$$

$$\le M_2 \sum_{m=0}^{s} \|u; W^{j_m}_{2;\tau_{j_m}}(\Omega)\| \cdot \|v; W^{j_m}_{2;\tau_{j_m}}(\Omega)\| + M_2 \sum_{m=0}^{t} \|u; W^{i_m}_{2;\tau_{i_m}}(\Omega)\| \cdot \|v; W^{i_m}_{2;\tau_{i_m}}(\Omega)\|$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда в силу неравенства (12) и определения пространства $\mathbb{H}'_+$ (см. (3)) следует, что

$$\left| B_r^{(0)}[u,v] \right| \le M_3 \left\| u;\, \mathbb{H}_+ \right\| \left\| v;\, \mathbb{H}_+ \right\| \tag{15}$$

для всех $u, v \in \mathbb{H}'_+$.

Из условия (7) (см. замечание 1) следует, что

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma(x_r) \sum_{|k|=|l|=j_m} b_{kl}(x_r) \zeta_k \overline{\zeta_l} \right\} \ge c \sum_{|k|=j_m} |\zeta_k|^2,$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma(x) \sum_{|k|=|l|=j_m} b_{kl}(x) \zeta_k \overline{\zeta_l} \right\} \ge c \sum_{|k|=j_m} |\zeta_k|^2,$$

для всех $r=\overline{1,N}$, $x\in\Omega$ и любого набора комплексных чисел $\{\zeta_k\}_{|k|=j_m}$. Умножая эти неравенства на $(1-\eta_r(x))$ и $\eta_r(x)$, соответственно, и подставляя $\zeta_k=\rho^{\tau_{j_m}}(x)u^{(k)}(x)$, где $u\in C_0^\infty(\Omega)$, после интегрирования по $x\in\Omega$ имеем

$$\mathrm{Re}B^{(0)}_{r,\,j_m}[u,u]\geq c_{j_m}\left\|u;\,L_2^{j_m}(\Omega)\right\|^2. \tag{16}$$

Здесь c_{j_m} — некоторое положительное число,

$$\left\|u;\,L_2^{j_m}(\Omega)\right\|=\left\{\sum_{|k|=j_m}\int_\Omega|u^{(k)}(x)|^2dx\right\}^{1/2}. \tag{17}$$

Далее учитывая ограниченность коэффициентов формы (13), в силу неравенства (16) получим

$$\mathrm{Re}B^{(0)}_r[u,u]\geq \mathrm{Re}\sum_{m=0}^{s}B^{(0)}_{r,\,j_m}[u,u]-\sum_{m=0}^{t}\left|B^{(0)}_{r,\,i_m}[u,u]\right|\geq$$
$$\sum_{m=0}^{s}c_{j_m}\left\|u;\,L_2^{j_m}(\Omega)\right\|^2-\sum_{m=0}^{t}M_{i_m}\left\|u;\,L_2^{i_m}(\Omega)\right\|^2\quad(u\in C_0^\infty(\Omega))\,. \tag{18}$$

Неравенство (12) можно записать в виде

$$\left\|u;\,L^{i_n}_{2;\,\tau_{i_n}}(\Omega)\right\|^2\leq\varepsilon\left\|u;\,L^{j_m}_{2;\,\tau_{j_m}}(\Omega)\right\|^2+C(\varepsilon)\left\|u;\,L_2(\Omega)\right\|^2.$$

В силу этого неравенства из (18) следует, что

$$\mathrm{Re}B^{(0)}_r[u,\,u]\geq\sum_{m=0}^{s}\left(c_{j_m}-M'_{j_m}\varepsilon\right)\left\|u;\,L_2^{j_m}(\Omega)\right\|^2-C(\varepsilon)\left\|u;\,L_2(\Omega)\right\|^2.$$

Подбирая в этом неравенстве число $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим

$$\mathrm{Re}B^{(0)}_r[u,u]+\lambda_0\left\|u;\,L_2(\Omega)\right\|^2\geq\sum_{m=0}^{s}\delta_{j_m}\left\|u;\,W_2^{j_m}(\Omega)\right\|^2\geq\varkappa_0\left\|u;\,\mathbb{H}_+\right\|^2, \tag{19}$$

где λ_0, $\varkappa_0$ — некоторые положительные числа.

Теперь рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}^{(0)}_r[u,v]=\sum_{|k|=|l|=j\in J}\int_\Omega\rho^{2\tau_j}(x)\widehat{b}_{klr}(x)u^{(k)}(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx,$$

где $\widehat{b}_{klr}(x)=[(1-\eta_r(x))b_{kl}(x_r)+\eta_r(x)b_{kl}(x)]\gamma(x_r)$.

Так как $b^{(0)}_{klr}(x)-\widehat{b}_{klr}(x)=\eta_r(x)(\gamma(x)-\gamma(x_r))b_{kl}(x)$ и коэффициенты $b_{kl}(x)$ ограничены, то, действуя так же как в доказательстве неравенства (15), с помощью неравенства Коши-Буняков-ского получим

$$|B^{(0)}_r[u,\,v]-\mathcal{B}^{(0)}_r[u,\,v]|\leq M_4\,\Lambda\,\|u;\,\mathbb{H}_+\|\,\|v;\,\mathbb{H}_+\|$$

для всех $u,v\in\mathbb{H}'_+$. Здесь $\Lambda=\sup|\eta_r(x)(\gamma_r(x)-\gamma(x_r))|$, где супремум берется по всем $x\in\Omega$ и всем $r=\overline{1,N}$. В силу этого неравенства из (19) следует, что

$$\varkappa_0\left\|u;\,\mathbb{H}_+\right\|^2\leq\mathrm{Re}\mathcal{B}^{(0)}_r[u,\,u]+\lambda_0\left\|u;\,L_2(\Omega)\right\|^2+\Lambda\left\|u;\,\mathbb{H}_+\right\|^2.$$

Так как $|\eta_r(x)(\gamma(x)-\gamma(x_r))| < \nu \qquad \forall r \in \{1, 2, \ldots, N\}$ и ν — достаточно малое положительное число, то, фиксируя некоторое значение ν, имеем

$$\mathrm{Re}\mathcal{B}_r^{(0)}[u,\, u] + \lambda_0 \|u;\, L_2(\Omega)\|^2 \geq \varkappa_1 \|u;\, \mathbb{H}_+\|^2 \tag{20}$$

для всех $u \in \mathbb{H}'_+$; $\varkappa_1$ — некоторое положительное число.

Вводим следующую полуторалинейную форму

$$\mathcal{B}_r[u,\, v] = \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int_\Omega \rho^{2\tau_j}(x) b_{klr}(x) u^{(k)}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{21}$$

где $b_{klr}(x) = (1-\eta_r(x))b_{kl}(x_r) + \eta_r(x)b_{kl}(x)$.

Заметим, что $\mathcal{B}_r^{(0)}[u,\, v] = \gamma(x_r)\mathcal{B}_r[u, v]$. Поэтому из неравенства (20) следует, что

$$\mathrm{Re}\,\{\gamma(x_r)\mathcal{B}_r[u,\, u]\} + \lambda_0 \|u;\, L_2(\Omega)\|^2 \geq \varkappa_1 \|u;\, \mathbb{H}_+\|^2 \tag{22}$$

для всех $u \in \mathbb{H}'_+$.

Не нарушая общности, можно считать, что число $\varphi = \varphi_m$ (см. замечание 1) в условии (6) такое, что $\varphi > \pi/2$.

В силу (6) неравенство (7) будет выполняться также и в том случае, если $\gamma(x) = \gamma_m(x)$ (см. замечание 1) заменить на $\exp(i\theta(x))$, где $\theta(x) = \min\{\varphi - \pi/2,\, |\arg\gamma(x)|\}\,(\mathrm{sign}\,\arg\ \gamma(x))$. Поэтому из неравенства (22) следует, что

$$\mathrm{Re}\,\{\exp(i\theta_r)\mathcal{B}_r[u,\, u]\} + \lambda_0 \|u;\, L_2(\Omega)\|^2 \geq \varkappa_2 \|u;\, \mathbb{H}_+\|^2 \tag{23}$$

для всех $u \in \mathbb{H}'_+$; $\varkappa_2$ — некоторое положительное число.

Здесь и далее $\theta_r = \theta(x_r)$, $r \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

Поступая также, как в доказательстве неравенства (15), ввиду ограниченности коэффициентов b_{klr} доказывается неравенство

$$|\mathcal{B}_r[u,\, v]| \leq M_5 \|u;\, \mathbb{H}_+\| \, \|v;\, \mathbb{H}_+\|$$

для всех $u, v \in \mathbb{H}'_+$. Так как

$$|(u,\, v)_0| \leq \|u;\, L_2(\Omega)\| \, \|v;\, L_2(\Omega)\| \leq \|u;\, \mathbb{H}_+\| \, \|v;\, \mathbb{H}_+\|\,,$$

то отсюда следует, что

$$|\mathcal{B}_r[u,\, v] + \lambda_0(u,\, v)_0| \leq (M_5 + \lambda_0) \|u;\, \mathbb{H}_+\| \, \|v;\, \mathbb{H}_+\| \tag{24}$$

для всех $u, v \in \mathbb{H}'_+$; M_5 — некоторое положительное число.

Неравенства (23), (24) позволяют нам применить теорему Лакса-Мильграма [7, теорема 2.0.1]. Согласно этой теореме существует оператор $\mathcal{R}_r(\lambda) : \mathbb{H}'_- \to \mathbb{H}'_+$ такой, что:

$$\exp(i\theta_r)\mathcal{B}_r[\mathcal{R}_r(\lambda)F, v] + (\mathcal{R}_r(\lambda)F, v)_0 = \langle F, v\rangle \tag{25}$$

для всех $F \in \mathbb{H}'_-$ и всех $v \in \mathbb{H}'_+$;

$$\|\mathcal{R}_r(\lambda)F; \mathbb{H}'_+\| \leq M_6 \left\|F; \mathbb{H}'_-\right\| \tag{26}$$

для всех $F \in \mathbb{H}'_-$. Здесь $\lambda \geq \lambda_0$ и число M_6 не зависит от F и от λ.

Символом Ψ_r обозначим оператор умножения на функцию $\psi_r(x)$ и введем оператор

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{r=1}^{N} \exp(i\theta_r)\Psi_r\mathcal{R}_r(\lambda)\Psi_r. \tag{27}$$

Из (26) следует, что $\mathcal{R}(\lambda)$ является ограниченным оператором, действующим из $\mathbb{H}'_-$ в $\mathbb{H}'_+$.

Аналогично неравенству (15) доказывается, что

$$|B[u,\,v]| \leq M_7 \sum_{j\in J} \left\| u;\, W^j_{2;\,\tau_j}(\Omega)\right\| \left\| v;\, W^j_{2;\,\tau_j}(\Omega)\right\| \leq M_8 \left\| u;\, \mathbb{H}_+\right\| \left\| v;\, \mathbb{H}_+\right\|.$$

Отсюда и из ограниченности оператора $\mathcal{R}(\lambda) : \mathbb{H}'_- \to \mathbb{H}'_+$ следует, что оператор $\mathbb{R}(\lambda)$, $\lambda \geq \lambda_0$, определенный равенством

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle = B[\mathcal{R}(\lambda)F,\, v] + \lambda \left(\mathcal{R}(\lambda)F,\, v\right)_0 \quad (\forall v \in \mathbb{H}'_+), \tag{28}$$

есть ограниченный оператор, действующий из $\mathbb{H}'_-$ в $\mathbb{H}'_-$.

Согласно нашим построениям функции $\psi_r^2(x)$, $r = \overline{1, N}$, образуют разбиение единицы области Ω. Поэтому для всех $F \in L_2(\Omega)$ и всех $v \in \mathbb{H}'_+$ выполняются следующие равенства

$$\langle F,\, v\rangle = (F,\, v)_0 = \int_\Omega F(x)\overline{v(x)}dx = \sum_{r=1}^N \int_\Omega \psi_r^2(x)F(x)\overline{v(x)}dx = \sum_{r=1}^N (\psi_r F,\, \psi_r)_0. \tag{29}$$

Так как $b_{klr}(x) = (1 - \eta_j(x))b_{kl}(x_r) + \eta_r(x)b_{kl}(x)$ и функция $\eta_r(x)$ обращается в единицу в некоторой окрестности множества $\operatorname{supp}\psi_r$, то функции $b_{klr}(x)$ и $b_{kl}(x)$ на множестве $\operatorname{supp}\psi_r$ совпадают. Поэтому из (2), (27) и (28) следует, что

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle &= \\ &= \sum_{r=1}^N \exp(i\theta_r) \left\{ \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int_\Omega \rho^{2\tau_j}(x) b_{klr}(x) D^k(\psi_r \mathcal{R}_r(\lambda)\Psi_r F)(x)\overline{v^{(l)}(x)}dx \right. \\ &\qquad \left. + \lambda \int_\Omega (\mathcal{R}_r(\lambda)\Psi_r F)(x)\overline{\psi_r(x)v(x)}dx \right\}\end{aligned} \tag{30}$$

Здесь и далее символ D^k обозначает дифференцирование мультииндекса k.

Пусть $F \in L_2(\Omega)$. В равенстве (25) заменим F на $\psi_r F$, а v — на $\psi_r v$:

$$\exp(i\theta_r)\mathcal{B}_r[\mathcal{R}_r(\lambda)\Psi_r F, \psi_r v] + \lambda \left(\mathcal{R}_r(\lambda)\Psi_r F, \psi_r v\right)_0 = (\psi_r F, \psi_r v)_0.$$

Отсюда в силу равенства (18) следует, что

$$\begin{aligned}(\psi_r F, \psi_r v)_0 &= \\ &= \exp(i\theta_r) \left\{ \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int_\Omega \rho^{2\tau_j}(x) b_{klr}(x) D^k(\mathcal{R}_r(\lambda)\Psi_r F)(x)\overline{D^l(\psi_r(x)v(x))}dx + \right. \\ &\qquad \left. + \lambda \int_\Omega (\mathcal{R}_r(\lambda)\Psi_r F)(x)\overline{\psi_r(x)v(x)}dx \right\}.\end{aligned}$$

Суммируя это равенство по r от 1 до N и применяя равенство (29) имеем

$$\begin{aligned}\langle F,\, v\rangle = (F,\, v)_0 &= \\ &= \sum_{r=1}^N \exp(i\theta_r) \left\{ \sum_{|k|=|l|=j\in J} \int_\Omega \rho^{2\tau_j}(x) b_{klr}(x) D^k(\mathcal{R}_r(\lambda)\Psi_r F)(x)\overline{D^l(\psi_r(x)v(x))}dx + \right. \\ &\qquad \left. + \lambda \int_\Omega (\mathcal{R}_r(\lambda)\Psi_r F)(x)\overline{\psi_r(x)v(x)}dx \right\}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (30) следует, что

$$\langle \mathbb{R}(\lambda)F, v\rangle - \langle F,\, v\rangle = \mathbb{S}_\lambda[F,\, v] + \mathbb{T}_\lambda[F,\, v], \tag{31}$$

где

$$\mathbb{S}_\lambda[F,\, v] = \sum_{j\in J}\sum_{r=1}^{N} \exp(i\theta_r) \sum\nolimits_j^{(1)} C_{k'}^{k''} \int_\Omega \rho^{2\tau_j}(x) b_{klr}(x) \psi_r^{(k')}(x) U_{r,\lambda}^{(k'')}(x) \overline{v^{(l)}(x)} dx, \tag{32}$$

$$\mathbb{T}_\lambda[F,\, v] = \sum_{j\in J}\sum_{r=1}^{N} \exp(i\theta_r) \sum\nolimits_j^{(2)} C_{l'}^{l''} \int_\Omega \rho^{2\tau_j}(x) b_{klr}(x) U_{r,\lambda}^{(k)}(x) \overline{\psi_r^{(l')}(x) v^{(l'')}(x)} dx, \tag{33}$$

$$U_{r,\lambda}(x) = (\mathcal{R}_r(\lambda)\Psi_r F)(x), \quad r \in \{1, 2, \dots,\, N\}.$$

Здесь символ $\sum_j^{(1)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k,\, l,\, k',\, k''$ таким, что $k = k' + k''$, $k' \neq 0$, $|k| = |l| = j$, а символ $\sum_j^{(2)}$ обозначает суммирование по мультииндексам $k,\, l,\, l',\, l''$ таким, что $l = l' + l''$, $l' \neq 0$, $|k| = |l| = j$.

Ниже доказывается, что при $\lambda \geq \lambda_0$, где λ_0 — некоторое большое число, для всех $F \in L_2(\Omega)$, $v \in \mathbb{H}'_+$ выполняются следующие неравенства

$$|\mathbb{S}_\lambda[F,\, v]| \leq \delta_1(\lambda) \left\|F;\, \mathbb{H}'_-\right\| \|v;\, \mathbb{H}_+\|\,, \tag{34}$$

$$|\mathbb{T}_\lambda[F,\, v]| \leq \delta_2(\lambda) \left\|F;\, \mathbb{H}'_-\right\| \|v;\, \mathbb{H}_+\|\,, \tag{35}$$

где положительные функции $\delta_i(\lambda)$, $i = 1,\, 2$, такие, что $\delta_i(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$.

Доказательство неравенства (34). Далее нам понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть $B_{\lambda r}$ — самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\Omega)$, порожденный симметричной формой*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda r}}[u, v] =& \frac{1}{2}\left\{\exp(i\theta_r)\mathcal{B}_r[u, v] + \exp(-i\theta_r)\overline{\mathcal{B}_r[v, u]}\right\} + \lambda\cos\theta_r\,(u,\, v)_0, \\ & D(\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda r}}) = \mathbb{H}'_+.\end{aligned} \tag{36}$$

Тогда при $\lambda \geq \lambda_0$, где λ_0 — некоторое положительное число, для любого мультииндекса k такого, что $|k| = j \in J$, и любого $r = \overline{1, N}$ оператор $\rho^{\tau_j} D^k B_{\lambda r}^{-1/2}$ является ограниченным оператором в $L_2(\Omega)$, а если мультииндекс $\widetilde{k}$ такой, что $|\widetilde{k}| < j \in J$, то существует положительная функция $q(\lambda)$ такая, что $q(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$ и

$$\left\|\rho^{\tau_j} D^{\widetilde{k}} u;\, L_2(\Omega)\right\| \leq q(\lambda) \|B_{\lambda r}^{1/2} u; L_2(\Omega)\| \tag{37}$$

для всех $u \in \mathbb{H}'_+$

Доказательство. По определению оператора $B_{\lambda r}$ для всех $u, v \in \mathbb{H}'_+$ выполняется равенство

$$\left(B_{\lambda r}^{1/2} u, B_{\lambda r}^{1/2} v\right)_0 = \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda r}[u, v]. \tag{38}$$

Следовательно,

$$\|B_{\lambda r}^{1/2} u; L_2(\Omega)\|^2 = Re\left\{\exp(i\theta_r)\mathcal{B}_r[u, u]\right\} + \lambda \|u; L_2(\Omega)\|^2 \tag{39}$$

и в силу неравенства (23)

$$\|B_{\lambda r}^{1/2} u; L_2(\Omega)\| \geq c_0 \|u; \mathbb{H}_+\| \qquad (\lambda \geq \lambda_0) \tag{40}$$

для всех $u \in \mathbb{H}'_+$. Отсюда следует, что

$$\left\|\rho_j^{\tau} D^k u;\, L_2(\Omega)\right\| \leq M_9 \|B_{\lambda r}^{1/2} u; L_2(\Omega)\|, (|k| = j, \quad r = \overline{1, N},\ u \in \mathbb{H}'_+).$$

Отсюда следует ограниченность оператора $\rho^{\tau_j} D^k B_{\lambda r}^{-1/2}$.

Рассмотрим случай $|\widetilde{k}| < j \in J$. Применяя лемму 1 имеем

$$\left\|\rho^{\tau_j} D^{\widetilde{k}} u;\, L_2(\Omega)\right\| \le \varepsilon \|u; W^j_{2;\tau_j}(\Omega)\| + C(\varepsilon)\, \|u;\, L_2(\Omega)\|\,,$$

где ε — произвольное положительное число и величина $C(\varepsilon)$ неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$. Поэтому в силу (40) для всех $u \in \mathbb{H}'_+$ имеет место неравенство

$$\left\|\rho^{\tau_j} D^{\widetilde{k}} u;\, L_2(\Omega)\right\| \le \varepsilon \|B^{1/2}_{\lambda r} u; L_2(\Omega)\| + C(\varepsilon)\, \|u;\, L_2(\Omega)\|\,.$$

Применяя равенство (39) имеем

$$\left\|\rho^{\tau_j} D^{\widetilde{k}} u;\, L_2(\Omega)\right\|^2 \le \varepsilon^2 Re\, \{\exp(i\theta_r)\mathcal{B}_r[u,u]\} + (\lambda^2 + C_1(\varepsilon))\|u; L_2(\Omega)\|^2.$$

Отсюда и из (21) при $\lambda = 1/\varepsilon$ следует, что

$$\left\|\rho^{\tau_j} D^{\widetilde{k}} u;\, L_2(\Omega)\right\|^2 \le$$
$$\le \varepsilon^2 Re \left\{ \exp(i\theta_r) \left(\sum_{|k|=|l|=j\in J} \int_\Omega \rho^{2\tau_j}(x) b_{klr}(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx \right) \right\} +$$
$$+ p(\varepsilon) \int_\Omega |u(x)|^2 dx,$$

где непрерывная положительная функция $p(\varepsilon)$ такова, что $p(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Обратную относительно $p(\varepsilon)$ функцию обозначим через q, и положив $\varepsilon = q(\lambda)$ в последнем неравенстве, получим

$$\left\|\rho^{\tau_j} D^{\widetilde{k}} u;\, L_2(\Omega)\right\|^2 \le$$
$$\le q(\lambda)^2 Re \left\{ \exp(i\theta_r) \left(\sum_{|k|=|l|=j\in J} \int_\Omega \rho^{2\tau_j}(x) b_{klr}(x) u^{(k)}(x) \overline{u^{(l)}(x)} dx \right) \right\} +$$
$$+ \lambda \int_\Omega |u(x)|^2 dx,$$

где непрерывная положительная функция $q(\lambda)$ такая, что $q(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Отсюда в силу равенства (39) следует (37).

Лемма 2 доказана.

При $\lambda \ge \lambda_0$ билинейная форма $\exp(i\theta_r)\mathcal{B}_r[u,v]$ удовлетворяет неравенствам (см. (23), (24)):

$$\varkappa_3 \|u; \mathbb{H}_+\|^2 \le \mathrm{Re}\, \{\exp(i\theta_j)\mathcal{B}_r[u,u]\} + \lambda\, \|u;\, L_2(\Omega)\| \tag{41}$$

для всех $u \in \mathbb{H}'_+$;

$$|\mathcal{B}_r[u,v] + \lambda(u,v)_0| \le (M_3 + |\lambda|)\|u;\, \mathbb{H}_+\| \cdot \|v;\, \mathbb{H}_+\| \tag{42}$$

для всех $u,\, v \in \mathbb{H}'_+$. Числа $\varkappa_2,\, M_3 > 0$ в этих неравенствах не зависят от $u(x),\ \ v(x)$.

Согласно неравенствам (41), (42) билинейная форма $\exp(i\theta_r)\mathcal{B}_r[u,v] + \lambda(u,v)_0$ замкнута и секториальна. Поэтому в силу [15, гл. 6, теорема 2.1] существует такой m - секториальный оператор $A_r(\lambda)$, что

$$\exp(i\theta_r)\mathcal{B}_r[u,v] + \lambda(u,v)_0 = (A_r(\lambda)u, v) \quad \left(\forall u \in D(A_r(\lambda)) \subset \mathbb{H}'_+,\ \ \forall v \in \mathbb{H}'_+\right). \tag{43}$$

Пусть $f \in L_2(\Omega)$. Тогда $\mathcal{R}_r(\lambda) f \in \mathbb{H}'_+$ и согласно равенству (25)

$$\exp(i\theta_r)\mathcal{B}_r[\mathcal{R}_r(\lambda)f, v] + \lambda\left(\mathcal{R}_r(\lambda)f, v\right)_0 = \langle f, v\rangle$$

для всех $v \in \mathbb{H}'_+$. Отсюда и из (43) в силу [15, гл. 6, теорема 2.1] следует, что $A_r(\lambda)\mathcal{R}_r(\lambda)f = f$, $\forall f \in L_2(\Omega)$, то есть

$$\mathcal{R}_r(\lambda)f = A_r(\lambda)^{-1} f \tag{44}$$

для всех $f \in L_2(\Omega)$.

Используя равенство (38) при $u(x) = v(x)$ с учетом равенства (36) получим

$$\left\| B_{\lambda r}^{1/2} u; L_2(\Omega)\right\|^2 = \mathrm{Re}\big\{\exp(i\theta_r)\mathcal{B}_r[u, u]\big\} + \lambda \left\|u;\, L_2(\Omega)\right\| \quad (\lambda \geq \lambda_0 > 0).$$

Отсюда в силу неравенства (23) следует, что

$$\left\| B_{\lambda r}^{1/2} u; L_2(\Omega)\right\| \geq \varkappa_2 \left\|u; \mathbb{H}_+\right\| \;\; (\lambda \geq \lambda_0 > 0)$$

для всех $u \in \mathbb{H}'_+$. Отсюда следует обратимость оператора $B_{\lambda r}^{1/2}$ при $\lambda \geq \lambda_0 > 0$. Применяя [15, гл. 6, теорема 3.2], получим представление

$$A_r(\lambda)^{-1} = B_{\lambda r}^{-1/2} X_r(\lambda) B_{\lambda r}^{-1/2} \;\; (\lambda \geq \lambda_0 > 0), \tag{45}$$

где $X_r(\lambda) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — некоторый ограниченный оператор и его норма $\|X_r(\lambda)\|$ не превосходит числа $M_1 > 0$, не зависящего от $\lambda \in [\lambda_0, \infty)$.

Переходим к доказательству оценки (34). С этой целью равенство (32) перепишем в виде

$$\mathbb{S}_\lambda[F,\, v] = \sum_{j \in J}\sum_{r=1}^{N} \exp(i\theta_r) \sum\nolimits_j^{(1)} C_{k'}^{k''}\left(\rho^{\tau_j} b_{klr}\psi_r^{(k')} U_{r,\lambda}^{(k'')},\, \rho^{\tau_j} v^{(l)}\right)_0, \tag{46}$$

где $U_{r,\lambda}(x) = (\mathcal{R}_r(\lambda)\Psi_r F)(x), \quad r \in \{1, 2, \ldots,\, N\}$. Пусть $F \in L_2(\Omega)$. Используя равенства (43) - (46), имеем

$$\mathbb{S}_\lambda[F, v] = \sum_{j \in J}\sum_{r=1}^{N}\sum\nolimits_j^{(1)} \exp(i\theta_r) C_{k'}^{k''}(\rho^{\tau_j} b_{klr}\psi_r^{(k')} D^{k''} A_r(\lambda)^{-1}\Psi_r F, \rho^{\tau_j} v^{(l)})_0 =$$

$$= \sum_{j \in J}\sum_{r=1}^{N}\sum\nolimits_j^{(1)} \exp(i\theta_r) C_{k'}^{k''}(\rho^{\tau_j} b_{klr}\psi_r^{(k')} D^{k''} B_{\lambda r}^{-1/2} X_r(\lambda) B_{\lambda r}^{-1/2}\Psi_r F, \rho^{\tau_j} v^{(l)})_0.$$

Применяя неравенство Коши - Буняковского, получаем

$$|\mathbb{S}_\lambda[F, v]| \leq M_{10} \sum_{j \in J}\sum_{r=1}^{N}\sum\nolimits_j^{(1)} \left\|\mathbb{D}_{k'',r,j}(\lambda)\mathbb{F}_{r,\lambda}; L_2(\Omega)\right\| \cdot \left\|\mathbb{P}_{l,r,j} B_{\lambda_0 r}^{1/2} v; L_2(\Omega)\right\|, \tag{47}$$

где

$$\mathbb{D}_{k'',r,j}(\lambda) = \rho^{\tau_j} D^{k''} B_{\lambda r}^{-1/2}, \quad \mathbb{F}_{r,\lambda}(x) = X_r(\lambda) B_{\lambda r}^{-1/2}(\psi_r F)(x), \quad \mathbb{P}_{l,r,j} = \rho^{\tau_j} D^l B_{\lambda_0 r}^{-1/2}. \tag{48}$$

Докажем, что при $\lambda \geq \lambda_0$ справедливо неравенство

$$\left\|\mathbb{F}_{r,\lambda}; L_2(\Omega)\right\| \leq M_{11} \left\|F; \mathbb{H}'_-\right\|. \tag{49}$$

Пусть $\lambda \geq \lambda_0$. Тогда

$$\|\mathbb{F}_{r,\lambda}; L_2(\Omega)\| \leq M'_{12} \left\| B_{\lambda r}^{-1/2}(\psi_r F); L_2(\Omega) \right\| \leq M_{12} \left\| B_{\lambda_0 r}^{-1/2}(\psi_r F); L_2(\Omega) \right\|. \tag{50}$$

Норму в пространстве $L_2(\Omega)$ можно задавать с помощью равенства

$$\|f; L_2(\Omega)\| = \sup |(f, v)_0|, \tag{51}$$

где супремум берется по всем $v \in L_2(\Omega)$ таким, что $\|v; L_2(\Omega)\| = 1$. Так как $C_0^\infty(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то в равенстве (51) можно считать, что супремум берется по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$, таким, что $\|v; L_2(\Omega)\| = 1$.

При $\lambda = \lambda_0$ из равенство (38) имеем $\left(B_{\lambda_0 r}^{1/2} u, B_{\lambda_0 r}^{1/2} v\right)_0 = \widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0 r}[u, v]$.

С другой стороны

$$\mathrm{Re}\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0 r}[u, u] \geq \varkappa_4 \|u; \mathbb{H}_+\|^2,$$

$$\left|\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0 j}[u, v]\right| \leq (M_{13} + \lambda_0) \|u; \mathbb{H}_+\| \cdot \|v; \mathbb{H}_+\|$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ и согласно теореме Лакса - Мильграма, уравнение

$$\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0 r}[u, \widehat{v}] = (w, \widehat{v}) \quad \forall \widehat{v} \in C_0^\infty(\Omega)$$

имеет решение для любого $w \in L_2(\Omega)$. Поэтому из (51) следует, что

$$\|f; L_2(\Omega)\| = \sup \left| \left(B_{\lambda_0 r}^{1/2} f, B_{\lambda_0 r}^{1/2} w\right)_0 \right|,$$

где супремум берется по всем $w \in C_0^\infty(\Omega)$ таким, что $\left\| B_{\lambda_0 r}^{1/2} w; L_2(\Omega) \right\| = 1$. С другой стороны в классе $C_0^\infty(\Omega)$ нормы $\|v; \mathbb{H}_+\|$ и $\left\| B_{\lambda_0 j}^{1/2} v; L_2(\Omega) \right\|$ эквивалентны. Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| B_{\lambda_0 r}^{-1/2}(\psi_r F); L_2(\Omega) \right\| &= \sup \left| \left(\psi_r F, B_{\lambda_0 r}^{1/2} v\right)_0 \right| \leq \\ &\leq M_{14} \sup |(\psi_r F, v)| \leq M_{15} \left\| \psi_r F; \mathbb{H}'_- \right\| \leq M_{16} \left\| F; \mathbb{H}'_- \right\|, \end{aligned} \tag{52}$$

где первый супремум в этой цепочке берется по всем $v \in C_0^\infty(\Omega)$ таким, что $\left\| B_{\lambda_0 r}^{1/2} w; L_2(\Omega) \right\| = 1$, а второй супремум — по всем $v \in C_0^\infty(\Omega) : \|v; \mathbb{H}_+\| = 1$.

Из (50), (52) следует (49).

Согласно лемме 2 оператор (см. (48)) $\mathbb{P}_{l,r,j} = \rho^{\tau_j} D^l B_{\lambda_0 r}^{-1/2}$ является ограниченным, и из (24), (38) следует, что

$$\left\| B_{\lambda_0 r}^{1/2} v; L_2(\Omega) \right\|^2 = |\widetilde{\mathcal{B}}_{\lambda_0 r}[v, v]| \leq M_{17} \|v; \mathbb{H}_+\|^2$$

для всех $v \in \mathbb{H}_+$. Поэтому

$$\left\| \mathbb{P}_{l,r,j} B_{\lambda_0 r}^{1/2} v; L_2(\Omega) \right\| \leq \|v; \mathbb{H}_+\|. \tag{53}$$

Согласно второй части утверждения леммы 2 существует положительная функция $\varepsilon_1(\lambda)$ такая, что

$$\left\| \rho^{\tau_j} D^{k''} B_{\lambda r}^{-1/2} \right\| \leq \varepsilon_1(\lambda)$$

и $\varepsilon_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Следовательно, (см. (48)) $\lim_{\lambda \to \infty} \left\| \mathbb{D}_{k'' j}(\lambda) \right\| = 0$. Ввиду этого равенства из (47), (49), (53) получим оценку (34).

Доказательство неравенства (35). Для удобства записи интегралы составляющие форму $\mathbb{T}_\lambda[F,\, v]$ обозначим через $\mathbb{I}_{\lambda;j}[F,\, v]$[1].

Согласно равенствам (44), (45)

$$\mathcal{R}_r(\lambda) = A_r(\lambda)^{-1} = B_{\lambda r}^{-1/2} X_r(\lambda) B_{\lambda r}^{-1/2} \quad (\lambda \geq \lambda_0 > 0).$$

Поэтому

$$\mathbb{I}_{\lambda;j}[F,\, v] = \left(\rho^{\tau_j} b_{klr} D^k B_{\lambda r}^{-1/2} X_r(\lambda) B_{\lambda r}^{-1/2} \Psi_r F,\, \rho^{\tau_j} \psi_r^{(l')} D^{l''} v\right)_0.$$

Далее, используя обозначение (см. (48)) $\mathbb{F}_{r,\lambda}(x) = X_r(\lambda) B_{\lambda r}^{-1/2} \Psi_r F$ и равенство

$$D^{l''} v = D^{l''} B_{\lambda_0 j}^{-1/2} B_{\lambda_0 j}^{1/2} v,$$

получим

$$\mathbb{I}_{\lambda;j}[F,\, v] = \left(B_{\lambda_0 r}^{-1/2} D^{l''} \psi_r^{(l')} \rho^{\tau_j} b_{klr} \rho^{\tau_j} D^k B_{\lambda r}^{-1/2} \mathbb{F}_{r,\lambda},\, B_{\lambda_0 r}^{1/2} v\right)_0. \tag{54}$$

Обозначим

$$\mathbb{L}_{j,r,\lambda_0,l''} = b_{klr} \rho^{\tau_j} \psi_r^{(l')} D^{l''} B_{\lambda_0 r}^{-1/2}.$$

Тогда

$$\mathbb{L}^*{}_{j,r,\lambda_0,l''} = B_{\lambda_0 r}^{-1/2} D^{l''} \psi_r^{(l')} \rho^{\tau_j} b_{klr}$$

и равенство (54) примет следующий вид

$$\mathbb{I}_{\lambda;j}[F,\, v] = \left(\mathbb{L}^*{}_{j,r,\lambda_0,l''} \rho^{\tau_j} D^k B_{\lambda r}^{-1/2} \mathbb{F}_{r,\lambda},\, B_{\lambda_0 r}^{1/2} v\right)_0.$$

Вводя обозначение $\mathbb{G}_{j,r,\lambda_0,k} = \rho^{\tau_j} D^k B_{\lambda_0 r}^{-1/2}$, имеем

$$\mathbb{I}_{\lambda;j}[F,\, v] = \left(\mathbb{L}^*{}_{j,r,\lambda_0,l''} \mathbb{G}_{j,r,\lambda_0,k} B_{\lambda_0 r}^{1/2} B_{\lambda r}^{-1/2} \mathbb{F}_{r,\lambda},\, B_{\lambda_0 r}^{1/2} v\right)_0. \tag{55}$$

Так как $B_{\lambda r}$ — самосопряженный оператор, ассоциированный с формой $\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda r}}[u, v]$ (см. лемму 2), то

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(B_{\lambda_0 r}^{1/2} + (\lambda - \lambda_0)^{1/2} E\right) u;\, L_2(\Omega) \right\|^2 \leq \\
&\qquad \leq 2 \left\{ \left\| B_{\lambda_0 r}^{1/2} u;\, L_2(\Omega) \right\|^2 + (\lambda - \lambda_0) \left\| u;\, L_2(\Omega) \right\|^2 \right\} \leq \\
&\qquad \leq M_{18} \left\{ \left(B_{\lambda_0 r}^{1/2} u,\, B_{\lambda_0 r}^{1/2} u\right)_0 + \theta_r'(\lambda - \lambda_0)\,(u,\, u)_0 \right\} = \\
&\qquad = M_{18} \left[\widetilde{\mathcal{B}_{\lambda_0 r}}[u, u] + \theta_r'(\lambda - \lambda_0)\,(u,\, u)_0 \right] = \\
&\qquad = M_{18} \widetilde{\mathcal{B}_{\lambda r}}[u, u] = M_{18} \left(B_{\lambda r}^{1/2} u,\, B_{\lambda r}^{1/2} u\right)_0 = M_{18} \left\| B_{\lambda r}^{1/2} u;\, L_2(\Omega) \right\|^2,
\end{aligned}$$

где $\theta_r' = \operatorname{Re} \exp(i\theta_r)$. Следовательно, существует число $M_{18} > 0$ такое, что

$$\left\| \left(B_{\lambda_0 r}^{1/2} + (\lambda - \lambda_0)^{1/2} E\right) B_{\lambda r}^{-1/2} \right\| \leq M_{18} \quad (\lambda \geq \lambda_0).$$

---

[1] Зависимость $\mathbb{I}_{\lambda;j}[F,\, v]$ от r, k, l, l', l'' в данном контексте не существенны, поэтому в обозначении эти символы не используются.

В силу этого неравенства из (55) следует, что

$$|\mathbb{I}_{\lambda;j}[F,\,v]| \le M_{19}\left\|\mathbb{L}^*{}_{j,r,\lambda_0,l''}\mathbb{G}_{j,r,\lambda_0,k}B^{1/2}_{\lambda_0 r}\left(B^{1/2}_{\lambda_0 r}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\right)^{-1}\right\|\times$$
$$\times\left\|\mathbb{F}_{r,\lambda};\,L_2(\Omega)\right\|\cdot\left\|B^{1/2}_{\lambda_0 r}v;\,L_2(\Omega)\right\|. \quad (56)$$

Ниже докажем, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left\|\mathbb{L}^*{}_{j,r,\lambda_0,l''}\mathbb{G}_{j,r,\lambda_0,k}B^{1/2}_{\lambda_0 r}\left(B^{1/2}_{\lambda_0 r}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\right)^{-1}\right\| = 0. \quad (57)$$

Используя равенство

$$B^{1/2}_{\lambda_0 r}\left(B^{1/2}_{\lambda_0 r}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\right)^{-1} = \left(E+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}B^{-1/2}_{\lambda_0 r}\right)^{-1},$$

имеем

$$\mathbb{L}^*{}_{j,r,\lambda_0,l''}\mathbb{G}_{j,r,\lambda_0,k}B^{1/2}_{\lambda_0 r}\left(B^{1/2}_{\lambda_0 r}+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}E\right)^{-1} = \mathbb{A}\left(E+(\lambda-\lambda_0)^{1/2}H\right)^{-1}, \quad (58)$$

где

$$\mathbb{A} = \mathbb{T}^*{}_{j,r,\lambda_0,l''}\mathbb{G}_{j,r,\lambda_0,k}, \qquad H = B^{-1/2}_{\lambda_0 r}.$$

Так как $|l''| \le j-1$, то оператор $\mathbb{L}_{j,r,\lambda_0,l''}$ вполне непрерывен. Поэтому из ограниченности оператора $\mathbb{G}_{j,r,\lambda_0,k}$ следует вполне непрерывность оператора $\mathbb{A}$. Далее, применяя [16, гл. 5, лемма 7.1], из (58) получаем (57).

Из (56) в силу соотношения (57) следует, что

$$|\mathbb{I}_{\lambda;j}[F,\,v]| \le \delta_3(\lambda)\left\|\mathbb{F}_{r,\lambda};\,L_2(\Omega)\right\|\cdot\left\|B^{1/2}_{\lambda_0 r}v;\,L_2(\Omega)\right\|, \quad (59)$$

где $\delta_3(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to 0$.

Далее заметим, что (см. (42), (48))

$$\left\|\mathbb{F}_{r,\lambda};\,L_2(\Omega)\right\| \le \|X_r(\lambda)\|\left\|B^{-1/2}_{\lambda r}\Psi_r F;\,L_2(\Omega)\right\| \le M_{12}\left\|F;\,\mathbb{H}'_-\right\|,$$

$$\left\|B^{1/2}_{\lambda_0 r}v;\,L_2(\Omega)\right\| \le M_{20}\left\|v;\,\mathbb{H}_+\right\|.$$

В силу этих неравенств из (59) следует (35).

Теперь, используя доказанные выше неравенства (34), (35), продолжим доказательство теоремы 1. В силу этих неравенств из (31) следует, что

$$|\langle\mathbb{R}(\lambda)F,v\rangle-\langle F,\,v\rangle| \le (\delta_1(\lambda)+\delta_2(\lambda))\left\|F;\mathbb{H}'_-\right\|\cdot\|v;\mathbb{H}_+\|$$

для всех $F\in L_2(\Omega)$, $v\in\mathbb{H}_+$. Так как $\delta_1(\lambda)\to 0$, $\quad\delta_2(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$, то существует число $\lambda_0\ge 1$ такое, что

$$|\langle\mathbb{R}(\lambda)F,v\rangle-\langle F,\,v\rangle| \le \frac{1}{2}\left\|F;\mathbb{H}'_-\right\|\cdot\|v;\mathbb{H}_+\| \quad (60)$$

для любого $\lambda\ge\lambda_0$ и всех $F\in L_2(\Omega)$, $v\in\mathbb{H}_+$. Так как $L_2(\Omega)$ плотно в $\mathbb{H}'_-$, то оценка (60) верна для всех $F\in\mathbb{H}'_-$.

Из оценки (60) следует, что при $\lambda>\lambda_0$ оператор $\mathbb{R}(\lambda)$ представляется в виде $\mathbb{R}(\lambda) = E+\mathbb{P}(\lambda)$, где норма оператора $\mathbb{P}(\lambda):\mathbb{H}'_-\to\mathbb{H}'_-$ не превосходит $1/2$. Поэтому оператор $\mathbb{R}(\lambda):\mathbb{H}'_-\to\mathbb{H}'_-$ непрерывно обратим и $\mathbb{R}^{-1}(\lambda) = (E+\mathbb{P}(\lambda))^{-1}$.

Оператор $\mathcal{R}_j(\lambda)$, определенный равенством (25), действует из $\mathbb{H}'_-$ в $\mathbb{H}'_+$. Поэтому из (27) следует, что оператор $\mathcal{R}(\lambda)$ также действует из $\mathbb{H}'_-$ в $\mathbb{H}'_+$. Следовательно, для любого функционала $F \in \mathbb{H}'_-$ функция $U(x)$, определенная равенством

$$U = \mathcal{R}(\lambda)\mathbb{R}^{-1}(\lambda)F \quad (\lambda \geq \lambda_0), \tag{61}$$

принадлежит пространству $\mathbb{H}'_+$.

С помощью равенства (28) легко проверяется, что функция $U(x)$, определенная формулой (61), удовлетворяет уравнению $B[U,v] + \lambda(U,v)_0 = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$, то есть является решением задачи D_λ. Так как при $\lambda \geq \lambda_0$ оператор $\mathbb{R}^{-1}(\lambda)$ ограничен, то из (26) и (27) следует, что функция (61) удовлетворяет оценке (8).

Для доказательства единственности решения задачи D_λ рассмотрим сопряженную задачу: для заданного функционала $F \in \mathbb{H}'_-$ найти решение $U_1 \in \mathbb{H}'_+$ уравнения

$$\overline{B[v,U_1] + \lambda(v,U_1)_0} = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in \mathbb{H}'_+. \tag{62}$$

Поступая как выше, можно построить операторы $\mathcal{R}_*(\lambda)$, $\mathbb{R}_*(\lambda)$ такие, что функция $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F \quad (\lambda \in [\lambda_0^*, \infty))$ принадлежит пространству $\mathbb{H}'_+$ и удовлетворяет уравнению (62).

Пусть функция $u \in \mathbb{H}'_+$ такая, что

$$B[u,v] + \lambda(u,v)_0 = 0 \quad (\forall v \in \mathbb{H}'_+), \tag{63}$$

где $\lambda \geq \lambda'_0 = \max\{\lambda_0^*, \lambda_0\}$, и пусть F — произвольный элемент пространства $\mathbb{H}'_-$. Так как $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ принадлежит пространству $\mathbb{H}'_+$, то, полагая $v = U_1$ в (63), получаем $B[u,U_1] + \lambda(u,U_1)_0 = 0$, то есть $\overline{B[u,U_1] + \lambda(u,U_1)_0} = 0$.

С другой стороны, функция $U_1 = \mathcal{R}_*(\lambda)\mathbb{R}_*(\lambda)^{-1}F$ удовлетворяет (62). Поэтому $\langle F, u\rangle = 0$ для всех $F \in \mathbb{H}'_+$. Учитывая вложение $\mathbb{H}'_+ \to \mathbb{H}'_-$ и полагая $F = u$, имеем $\langle u, u\rangle = 0$, то есть $u = 0$. Единственность решения задачи D_λ доказана.

Теорема 1 доказана полностью.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть задана функция $U_1(x) \in \mathbb{H}_+$. Определим функционал G_λ, где λ — вещественный параметр,

$$< G_\lambda, v >= -B[U_1,\, v] - \lambda(U_1,\, v)_0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{64}$$

Учитывая ограниченность коэффициентов $b_{kl}(x)$, $|k| = |l| = j \in J$, $x \in \Omega$, и применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$|B[U_1,v]| \leq M_{21} \sum_{m=0}^{s} \|U_1; W_{2;\tau_{j_m}}^{j_m}(\Omega)\| \cdot \|v; W_{2;\tau_{j_m}}^{j_m}(\Omega)\| +$$
$$+ M_{21} \sum_{m=0}^{t} \|U_1; W_{2;\tau_{i_m}}^{i_m}(\Omega)\| \cdot \|v; W_{2;\tau_{i_m}}^{i_m}(\Omega)\|$$

для всех $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда в силу неравенства (12) и определения пространства $\mathbb{H}'_+$ (см. (3)) следует, что

$$|B[U_1,v]| \leq M_{22}\, \|U_1;\, \mathbb{H}_+\|\, \|v;\, \mathbb{H}_+\|$$

для всех $v \in \mathbb{H}'_+$. Так как (см. (3)) $\|u;\, L_2(\Omega)\| \leq \|u;\, \mathbb{H}_+\|$ для всех $u \in \mathbb{H}_+$, то

$$|(U_1,\, v)_0| \leq \|U_1;\, \mathbb{H}_+\|\, \|v;\, \mathbb{H}_+\|\,.$$

Из последних неравенств имеем

$$|< G_\lambda, v >| \leq (M_{22} + |\lambda|) \|U_1; \mathbb{H}_+\| \, \|v; \mathbb{H}_+\|$$

для всех $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Следовательно функционал G_λ по непрерывности продолжается на все пространство $\mathbb{H}'_+$, принадлежит пространству $\mathbb{H}'_-$ и его норма удовлетворяет неравенству

$$\left\|G_\lambda; \mathbb{H}'_-\right\| \leq (M_{22} + |\lambda|) \|U_1; \mathbb{H}_+\|, \tag{65}$$

где число M_{22} не зависит от выбора функции $U_1(x)$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: для заданного функционала $F \in \mathbb{H}'_-$ требуется найти решение U_* уравнения

$$B[U_*, v] + \lambda(U_*, v)_0 =< F + G_\lambda, v > \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega), \tag{66}$$

принадлежащее пространству $\mathbb{H}'_+$.

Согласно теореме 1 существует число $\lambda_0 \geq 0$ такое, что при $\lambda \geq \lambda_0$ вспомогательная задача имеет единственное решение $U_*(x)$ и при этом выполняется неравенство

$$\|U_*; \mathbb{H}_+\| \leq M_{23} \left\|F + G_\lambda; \mathbb{H}'_-\right\|. \tag{67}$$

Пусть $U_*(x)$ — решение вспомогательной задачи. Рассмотрим функцию

$$U(x) = U_*(x) + U_1(x). \tag{68}$$

Из (64), (66) следует, что функция $U(x)$ удовлетворяет уравнению (4).

Так как $U(x) - U_1(x) = U_*(x) \in \mathbb{H}'_+$, то она удовлетворяет также и условию (9). Следовательно, функция $U(x)$, определенная равенством (67), является решением задачи $\mathbb{D}_\lambda$. Из единственности решения вспомогательной задачи следует единственность решения задачи $\mathbb{D}_\lambda$.

Оценка (10) теоремы 2 следует из (65), (67), (68).

Теорема 2 доказана.

5. Заключение

Работа посвящена исследованию разрешимости вариационной задачи Дирихле для эллиптических операторов в ограниченной области с несогласованными вырождениями коэффициентов на границе. Интегро-дифференциальная полуторалинейная форма, ассоциированная с исследуемым оператором, представляется в виде конечного числа полуторалинейных форм и вводится понятие "старшая форма". Условия, обеспечивающие существование и единственность решения вариационной задачи Дирихле, ставятся только на коэффициенты старших форм.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский С. М. Вариационная проблема для уравнения эллиптического типа с вырождением на границе // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1979. Т. 150. С. 212–238.

2. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением. Вариационный метод // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1981. Т. 157. С. 90–118.

3. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1983. Т. 161. С. 157–183.

4. Байдельдинов Б. Л. Об аналоге первой краевой задачи для эллиптических уравнений с вырождением. Метод билинейных форм // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1984. Т. 170. С. 3–11.

5. Лизоркин П. И. К теории вырождающихся эллиптических уравнений // Труды Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 172. С. 235–271.

6. Мирошин Н. В. Вариационная задача Дирихле для вырождающегося на границе эллиптического оператора // Дифференциальные уравнения. 1988. Т. 24. № 6. С. 1099–1111.

7. Никольский С. М., Лизоркин П. И., Мирошин Н. В. Весовые функциональные пространства и их приложения к исследованию краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений // Известия Вузов. Математика. 1988. № 8. С. 4–30.

8. Исхоков С. А., Кужмуратов А. Я. О вариационной задаче Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов // Доклады Академии наук (Россия). – 2005. Т. 403. № 2. С. 165–168.

9. Бойматов К. Х. Обобщенная задача Дирихле для систем дифференциальных уравнений второго порядка // Доклады АН СССР. 1992. Т.327. № 1. С. 9–15.

10. Бойматов К. Х. Обобщенная задача Дирихле, порожденная некоэрцитивной формой // Доклады Академии наук (Россия). 1993. Т. 330. № 3. С. 285–290.

11. Исхоков С. А. О гладкости решений обобщенной задачи Дирихле и задачи на собственные значения для дифференциальных операторов, порожденных некоэрцитивными билинейными формами // Доклады Академии наук (Россия). 1995. Т. 342. № 1. С. 20–22.

12. Бойматов К. Х., Исхоков С. А. О разрешимости и спектральных свойствах вариационной задачи Дирихле, связанной с некоэрцитивной билинейной формой //Труды Математического института им. В. А. Стеклова РАН. 1997. Т. 214. С. 107–134.

13. Исхоков С. А., Гадоев М. Г., Константинова Т. П. Вариационная задача Дирихле для вырождающихся эллиптических операторов, порожденных некоэрцитивными формами // Доклады Академии наук (Россия). 2015. Т. 462. № 1. С. 7–10.

14. Мирошин Н. В. Обобщенная задача Дирихле для одного класса эллиптических дифференциальных операторов, вырождающихся на границе области. Некоторые спектральные свойства // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 6. С. 1099–1111.

15. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир. 1972.

16. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.

REFERENCES

1. Nikol'skii S. M. 1981, “A variational problem for an equation of elliptic type with degeneration on the boundary”, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, vol. 150, pp. 227–254.

2. Lizorkin P. I., Nikol'skii S. M. 1983, "Coercive properties of elliptic equations with degeneration. Variational method", vol. 157. pp. 95–125.

3. Lizorkin P. I., Nikol'skii S. M. 1984, "Coercive properties of an elliptic equation with degeneration and a generalized right-hand side", Proc. Steklov Inst. Math., vol. 161, pp. 171–198

4. Baidel'dinov B. L. 1987, "An analogue of the first boundary value problem for elliptic equations with degeneration. The method of bilinear forms", Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, vol. 170, pp. 1–10.

5. Lizorkin P. I. 1987, "On the theory of degenerate elliptic equations", Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, vol. 172, pp. 257–274.

6. Miroshin N. V. 1988, "The variational Dirichlet problem for an elliptic operator that is degenerate on the boundary", Differential Equations, vol. 24:3, pp. 323–329.

7. Nikolskii S. M., Lizorkin P. I., Miroshin N. V. 1988, "Weighted functional spaces and their application to investigation of boundary value problems for degenerate elliptic equations", Soviet Math. (Izv. VUZ), vol. 32, No. 8. pp. 1–40.

8. Iskhokov S. A., Kuzhmuratov A. Ya. 2005, "On the variational Dirichlet problem for degenerate elliptic operators" Doklady Mathematics, vol. 72, no. 1, pp. 512–515.

9. Boimatov K. Kh. 1993, "The generalized Dirichlet problem for systems of second-order differential equations" Russian Acad. Sci. Dokl. Math., vol. 46, no. 3, pp. 403–409.

10. Boimatov K. Kh. 1993, "The generalized Dirichlet problem associated with a noncoercive bilinear form", Russian Acad. Sci. Dokl. Math., vol. 47, no. 3, pp. 455–463.

11. Iskhokov S. A. 1995, "On the smoothness of a solutions of the generalized Dirichlet problem and the eigenvalue problem for differential operators generated by noncoercive bilinear forms", Doklady Mathematics, vol. 51, no. 3, pp. 323–325.

12. Boimatov K. Kh., Iskhokov S. A. 1996, "On the solvability and smoothness of a solution of the variational Dirichlet problem associated with a noncoercive bilinear form", Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, no. 3(214), pp. 101–127.

13. Iskhokov S. A., Gadoev M. G., Konstantinova T. P. 2015, "Variational Dirichlet problem for degenerate elliptic operators generated by noncoercive forms", Doklady Mathematics, vol. 91, no. 3, pp. 255–258. DOI: 10.1134/S1064562415030011.

14. Miroshin N. V. 1976, "A generalized Dirichlet problem for a certain class of elliptic differential operators that are degenerate on the boundary of the domain. Some spectral properties", Differ. Uravn., vol. 12:6, pp. 1099–1111.

15. Kato T. 1967, "Perturbation theory of linear operators", Springer-Verlag, 592 p.

16. Gokhberg I. Ts., Krein M.G. 1965, "Introduction to the theory of non-selfadgoint linear operators", Nauka: Moscow, 448 p.

Получено 22.04.2018
Принято к печати 10.10.2018