ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-531-539

К истории влияния теоремы Милютина на исследования в геометрии пространств Банаха

Манохин Евгений Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой «Математика и информатика», Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение высшего образования «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» (Финансовый университет, Тульский филиал).
e-mail: emanfinun@mail.ru

Аннотация

Обозначим через $E(T)$ (E — банахово пространство; T — метрический компакт) пространство всех непрерывных отображений компакта T в E с sup-нормой.

Тогда $E(T)$ — банахово пространство. Если E есть вещественная ось, то будем $E(T)$ обозначать через $C(T)$. А. А. Милютиным доказана следующая теорема.

Если $K1$ и $K2$ — метрические компакты континуальной мощности, E — банахово пространство, то $E(K1)$ изоморфно $E(K2)$.

А. А. Милютин, не зная об этом, в 1951 году решил знаменитую проблему Банаха: будут ли изоморфны пространства непрерывных функций на отрезке и на квадрате.

Среди работ, по духу близких исследованиям А. А. Милютина, можно назвать работы М. И. Кадеца, доказавшего топологическую эквивалентность всех бесконечномерных сепарабельных банаховых пространств. Одно из важных направлений функционального анализа — геометрия банаховых пространств. «Метод эквивалентных норм» заключается в возможности введения в банаховом пространстве эквивалентной нормы, обладающей тем или иным «хорошим» свойством. Теория эквивалентных норм для банаховых пространств $C(K)$ непрерывных функций на метрических компактах есть следствие теоремы Милютина и теории сепарабельных пространств Банаха. Для случая неметризуемых компактов теория далека от завершения.

Общей теории этих компактов нет и мало что известно о пространствах $C(K)$ для неметризуемых компактов с первой аксиомой счетности. Теорема Милютина повлияла на исследования в этом направлении. Основной же целью работы является анализ влияния теоремы Милютина на развитие теории пространств Банаха, особенно в одном из важных направлений функционального анализа – теории эквивалентных норм в геометрии банаховых пространств. В статье приводятся результаты, полученные учениками М. И. Кадеца для неметризуемых компактов с первой аксиомой счетности, в том числе результаты полученные автором и другими математиками.

Ключевые слова: история математики, теорема Милютина, геометрия пространств Банаха, теория эквивалентных норм, математики Харькова.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
Е. В. Манохин К истории влияния теоремы Милютина на исследования в геометрии пространств Банаха // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 531–539.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 51(091) DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-531-539

To history of influence of the theorem of Milyutin on researches in geometry of Banach spaces

Manokhin Evgeny Viktorovich — Candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, head of the Department of Mathematics and Informatics . The Federal State-Funded Educational Institution of Higher Education "Financial University under the Government of the Russian Federation"(Financial University, Tula Branch).
e-mail: emanfinun@mail.ru

Abstract

Let's designate through $E(T)$ (E — a Banach space; T — a metric compact set) space of all continuous maps of compact set T in E with sup-norm.

Then $E(T)$ — a Banach space. If E is a real axis we there be $E(T)$ to designate through $C(T)$. A. A. Milyutin proved the following theorem.

If $K1$ and $K2$ — metric compact sets of continuum cardinality, E — a Banach space, then $E(K1)$ it is isomorphic $E(K2)$.

A. A. Milyutin, without knowing about it, in 1951 solved the well-known problem of Banah: whether spaces of continuous functions on a segment and on quadrate are isomorphic. Among works, close to A. A. Milyutin's researches, it is possible to works of M. I. Kadets who has proved topological equivalence of all infinite-dimensional separable Banach spaces works. One of important directions of a functional analysis is geometry of Banach spaces. «The method of equivalent norms» consists in an introduction possibility in a Banach space of the equivalent norm possessing that or other "good"property. The theory of equivalent norms for Banach spaces $C(K)$ continuous functions on metric compact sets is a consequence of the theorem of Milyutin and the theory of separable spaces of Banah. For the case of nonmetrizable compact sets the theory is far from end.

The general theory of these compact sets is not present and a little that is known about spaces $C(K)$ for nonmetrizable compact sets with the first countability axiom. Milyutin's theorem has affected researches in this direction. The basic purpose of work is the analysis of influence of the theorem of Milyutin on development of the theory of Banah spaces, especially in one of important directions of a functional analysis — theories of equivalent norms in geometry of Banach spaces. The article presents the results for nonmetrizable compact sets with the first countability axiom, including outcomes received by the author and other mathematicians.

Keywords: mathematics history, Milyutin's theorem, geometry of spaces of Banaha, the theory of equivalent norms, mathematics of Kharkov.

Bibliography: 25 titles.

For citation:
E. V. Manohin, 2018, "To history of influence of the theorem of Milyutin on researches in geometry of Banach spaces" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 531–539.

1. Введение

В 1992 году в Харьковском государственном университете под руководством профессора М. И. Кадеца автор защитил кандидатскую диссертацию. Тогда же за 6 лет до этого от М. И. Кадеца автор услышал о теореме Милютина, которая (как тогда говорили) настолько поразила математиков Харькова, что они (В. И. Гурарий и др.), опубликовали от имени А. А. Милютина статью, ей посвященную [1]. Дело в том, что А. А. Милютин, не зная об этом, в 1951 году решил знаменитую проблему Банаха: будут ли изоморфны пространства непрерывных функций на отрезке и на квадрате. В 1966 году об этом случайно узнал А. Пелчинский и издал книгу [2], содержащую также и этот результат.

2. Метод эквивалентных норм в геометрии банаховых пространств

Одно из важных направлений функционального анализа — геометрия банаховых пространств. Линейно — топологические свойства банахова пространства зависят от его топологии, то есть от совокупности всех ограниченных выпуклых тел. При исследовании этих свойств возникает возможность замены исходной нормы эквивалентной, которая обладает теми или иными «хорошими» свойствами. Пусть E — векторное пространство над полем вещественных чисел R, $||\cdot||$ и $|||\cdot|||$ — две нормы на E. Будем говорить, что нормы $||\cdot||$ и $|||\cdot|||$ эквивалентны, если они определяют в E одну и ту же топологию.

Для того, чтобы две нормы $||\cdot||$ и $|||\cdot|||$ на векторном пространстве E были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие 2 константы $a > 0$ и $b > 0$, что

$$a||x|| \leqslant |||x||| \leqslant b||x||.$$

Одним из серьезных технических инструментов теории пространств Банаха является «метод эквивалентных норм», который заключается в возможности введения в банаховом пространстве эквивалентной нормы, обладающей тем или иным «хорошим» свойством. Например, М. И. Кадец доказал топологическую эквивалентность всех бесконечномерных сепарабельных банаховых пространств, используя этот метод ([3], [4]). Следовательно, актуальными становятся исследования о возможности или невозможности введения в данном банаховом пространстве эквивалентных норм, обладающих разными «хорошими» свойствами.

Известный результат такого характера впервые получил Дж. А. Кларксон [5] в 1936 г., он ввел понятие строгой нормированности и доказал, что любое сепарабельное банахово пространство изоморфно строго нормированному. Потом возник ряд других подобных понятий, как, например, гладкость, равномерная выпуклость, локальная равномерная выпуклость, H–свойство, $H(\Gamma)$–свойство и другие подобные понятия.

Локально равномерно выпуклые (LUR) пространства были введены в 1965 г. А. Р. Ловалья [6]. Затем эти пространства исследовались многими авторами. В работе М. И. Кадеца [7] было доказано, что каждое сепарабельное банахово пространство допускает эквивалентную локально равномерно выпуклую норму. Линденштраус [8] и независимо Троянски [9] показали, что несепарабельное банахово пространство l_∞ не становится локально равномерно выпуклым ни в какой эквивалентной норме.

Обратимся теперь к H–свойству.

Единичная сфера гильбертова пространства H обладает следующим легко обнаруживаемым свойством: на ней совпадает слабая и сильная сходимости последовательных элементов.

Говорят, что банахово пространство X обладает H–свойством, если на его единичной сфере $S(X)$ совпадают слабая и сильная сходимости последовательностей:

$$x_0 \in X, (x_n)_0^\infty \subset X, ||x_n|| = 1, x_n \xrightarrow{w} x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||x_n - x_0|| = 0.$$

Известно, что H–свойством обладает каждое локально равномерно выпуклое (LUR) банахово пространство. Напомним соответствующее определение локальной равномерной выпуклости:

$$x_0 \in X, (x_n)_0^\infty \subset X, ||x_n|| = 1, ||x_n + x_0|| \to 2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} ||x_n - x_0|| = 0.$$

Обратное, вообще говоря, неверно: в пространстве l_1 совпадают слабая и сильная сходимости (свойство Шура), но оно не LUR и даже не строго нормированное.

Банахово пространство X обладает H–свойством относительно множества $\Gamma \in X^*$ (или иначе говоря $H(\Gamma)$–свойством), если для любой последовательности $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ и любого элемента $x_0 \in X$ условия $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x_0)$, для всех $f \in \Gamma$ и $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n|| = ||x_0||$ влекут сильную сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x_0|| = 0$.

Заметим, что $H(\Gamma)$–свойство тем «сильнее», чем «меньше» Γ: если $\Gamma_1 \subset X$, то

$$H(\Gamma_1) \Rightarrow H(\Gamma).$$

Подпространство $\Gamma, \Gamma \subset X^*$ назовем нормирующим, если его характеристика Диксмье $r(\Gamma)$ положительна:

$$r(\Gamma) = \inf_{x\in S(X)} \sup\{|f(x)| : f \in \Gamma, \|f\| \leqslant 1\} > 0.$$

Сформулируем известную теорему М. И. Кадеца [10] о связи между сильной и слабой сходимостью на единичной сфере сепарабельного банахова пространства.

Теорема 1 (М. И. Кадец). *Пусть X — сеперабельное банахово пространство, Γ — нормирующее множество в X^*. Тогда X допускает эквивалентную норму, относительно которой X обладает $H(\Gamma)$–свойством. Более того можно добиться, чтобы эта норма была локально равномерно выпуклой [4].*

Приведем необходимые определения (см. [11] и [12]).

Определение 1. *Банахово пространство X называется слабо локально равномерно выпуклым (обозначается $X \in WLUR$), если из условий*

$$x, x_n \in X, ||x|| = ||x_n|| = 1, \quad \lim_{n\to\infty} ||x + x_n|| = 2$$

следует слабая сходимость последовательности x_n к элементу x.

Определение 2. *Сопряженное банахово пространство X^* называется слабо* локально равномерно выпуклым (обозначается $X^* \in W^*LUR$), если из условий*

$$y, y_n \in X^*, ||y|| = ||y_n|| = 1, \quad \lim_{n\to\infty} ||y + y_n|| = 2$$

следует слабая сходимость последовательности y_n к элементу y.*

Определение 3. *Банахово пространство X называется гладким в точке x_0 если существует единственный функционал $f \in S(X^*)$, такой, что $f(x_0) = 1$. Если X гладкое в каждой точке $S(X)$, то говорят, что X гладкое.*

Определение 4. *Банахово пространство X называется строго нормированным или строго выпуклым (обозначается $X \in R$), если $S(X)$ не содержит нетривиальных линейных сегментов.*

В работе [13] автором вводится свойство $WLUR(\Gamma)$, являющееся обобщением свойств $WLUR$ и W^*LUR.

Пусть $\Gamma \in x^*$, $x, x_n \in X$. Будем говорить, что последовательность x_n г-слабо сходится к x, если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x), f \in \Gamma$.

Например, слабая сходимость x_n к x, где $x_n, x \in X$ является X^*–слабой сходимостью x_n к x. Соответственно *–слабая сходимость f_n к f, где $f_n, f \in X^*$ является X–слабой сходимостью f_n к f, так как X естественно вкладывается в X^{**}.

Определение 5. *Пусть $\Gamma \subset X^*$. Пространство X назовем Γ–слабо локально равномерно выпуклым (обозначается $X \in WLUR(\Gamma)$), если из условий*

$$x, x_n \in X, ||x|| = ||x_n|| = 1, \quad \lim_{n\to\infty} ||x + x_n|| = 2$$

следует г-слабая сходимость последовательности x_n к x.

Аналогично определяется г–слабо локально равномерная выпуклость пространства X^*. Отметим, что допустимо говорить о г–слабо локально равномерной выпуклости X^* не только в случае $\Gamma \subset X^{**}$, но и в случае $\Gamma \subset X$, так как X естественно вкладывается в X^{**}.

Очевидно при $\Gamma = X^*$ и $X \in WLUR(\Gamma)$ получим обычное $WLUR$–свойство пространства X. При $\Gamma = X$ и $X^* \in WLUR(\Gamma)$ получим $X^* \in W^*LUR$. Очевидно, что если $\Gamma \supset \Gamma_1$, то из $X \in WLUR(\Gamma)$ следует, что $X \in WLUR(\Gamma_1)$.

В случае сепарабельных пространств Γ вопрос о наличии эквивалентной нормы, относительно которой X обладает $WLUR(\Gamma)$ свойством решается следующим утверждением, которое представляет собой аналог теоремы Кадеца [10] и которое в другой формулировке доказано в работе [14].

Теорема 2. *Пусть X — банахово пространство, если Γ — сепарабельное подпространство X^*, то X допускает эквивалентную Γ–слабо локально равномерно выпуклую норму.*

3. Эквивалентные нормы в банаховых пространств $C(K)$ для случая неметризуемых компактов

Теория эквивалентных норм для банаховых пространств $C(K)$ непрерывных функций на метрических компактах есть следствие теоремы Милютина и теории сепарабельных пространств Банаха (пространство $C(K)$ сепарабельно в том и только том случае, если K — метрический компакт, сопряженное пространство к $C(K)$ сепарабельно в том и только том случае, если K — счетный метрический компакт [10]). Приведем формулировку теоремы Милютина.

Обозначим через $E(T)$ (E — банахово пространство; T — метрический компакт) пространство всех непрерывных отображений F компакта T в E с нормой

$$\|F\| = \max_{x\in T} |F(x)|$$

(легко видеть, что $E(T)$ — банахово пространство); если E есть вещественная ось, то будем $E(T)$ обозначать через $C(T)$.

Теорема 3 (А. А. Милютин). *Если $K1$ и $K2$ — метрические компакты континуальной мощности, E — банахово пространство, то $E(K1)$ изоморфно $E(K2)$.*

Таким образом, установлен факт существования эквивалентных строго выпуклых и локально равномерно выпуклых норм на всех пространствах непрерывных функций, определенных на метрических компактах. Для случая неметризуемых компактов теория далека от завершения.

Среди всех компактов естественно выделяется класс компактов с первой аксиомой счетности. Он включает класс метрических компактов, но не совпадает с ним. Примеры неметризуемых компактов с первой аксиомой счетности: две стрелки, лексикографический квадрат, компакт Хелли и другие хорошо известны и приводятся в учебниках топологии [15].

Общей теории этих компактов нет и мало что известно о пространствах $C(K)$ для неметризуемых компактов с первой аксиомой счетности. Теорема Милютина повлияла на исследования в этом направлении.

Если ограничится теорией эквивалентных норм, то можно назвать, например, результаты ученика М. И. Кадеца болгарина Г. А. Александрова из его кандидатской диссертации 1980 года о пространстве $C(D)$, где D — компакт две стрелки [16], автора о пространстве $C(Q)$, где Q — компакт Хелли [17], М. С. Кобылиной о пространстве $C(S)$, где S — лексикографический квадрат [18]. Приведем результаты автора [17]. Эти результаты не были опубликован автором в журнальных статьях.

Теорема 4 (17). *Пусть X — банахово пространство, A — несчетное сепарабельное метрическое пространство, $(x_\lambda)_{\lambda\in A} \subset X$ — множество элементов с таким свойством:*

$$\|x_\lambda - x_\mu\| \geqslant \alpha > 0, \quad \lambda, \mu \in A, \quad \lambda \neq \mu.$$

Пусть далее Γ — подпространство сопряженного пространства X^* и $\varphi : \Gamma \times A \to R$ — отображение, определенное формулой $\varphi(f, \lambda) = f(x_\lambda)$. Если отображение φ непрерывно, то X не допускает эквивалентную норму, относительно которой X обладает $H(\Gamma)$–свойством.

Компактом Хелли Q называется множество всех неубывающих отображений $x = x(t)$ отрезка $[0; 1] = I$ в себя, наделенное топологией поточечной сходимости. В этой топологии компакт Хелли Q-неметризуемое сепарабельное топологическое компактное пространство с первой аксиомой счетности.

Каждый элемент компакта Хелли — функция на $[0; 1] = I$, непрерывная во всех точках кроме, может быть, счетного множества.

Подмножество Q, образованное всеми непрерывными элементами, обозначим через Q_c. Из теоремы 4 получается

Следствие 1. *Пусть Q — компакт Хелли. Тогда сопряженное к пространству непрерывных функций на нем $[C(Q)]^*$ не обладает $H(\Gamma)$–свойством ни в какой эквивалентной норме, если $\Gamma = C(Q)$.*

Доказательство. В качестве A возьмем Q_c — несчетное сепарабельное метризуемое подпространство Q и воспользуемся теоремой 4. Что и требовалось доказать. □

Через ξ_x обозначим меру Дирака сосредоточенную в точке x из Q, $\xi_x(f) = f(x)$. Автором доказана

Теорема 5. *Пространство непрерывных функций на компакте Хелли $C(Q)$ не обладает $H(\Gamma)$–свойством ни в какой эквивалентной норме, где $\Gamma = \overline{sp}\{\xi_x\}_{x\in Q_c}$, $Q_c = Q \cap C[0; 1]$.*

4. Заключение

В заключение отметим, что исследования по направлениям, зародившимся более полувека назад и связанным, в том числе с именами А. А. Милютина, М. И. Кадеца и других выдающихся математиков, продолжаются (см. например[19], [20]). Для случая неметризуемых компактов теория далека от завершения и рассмотрение различных ее аспектов успешно продолжаются.

Например, получены результаты, характеризующие пространства непрерывных функций $C(K)$ на дереве K, которые дали возможность Хейдону привести большое количество контрпримеров при применении метода эквивалентных норм (см. например [21], [22], [23], [24], [25]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Милютин А.А. Изоморфность пространств непрерывных функций над компактами континуальной мощности. // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1966. Вып 2. С. 150-156.

2. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения. М.: Мир, 1979. 145 с.

3. Кадец М.И. Топологическая эквивалентность всех сепарабельных банаховых пространств. // ДАН СССР. 1966, Том 167. С. 23-25.

4. Кадец М.И. Доказательство топологической эквивалентности всех сепарабельных бесконечномерных пространств Банаха. // Функц. Анализ. 1967. Том 1. № 1. С. 61-70.

5. Clarkson J.A. Uniformly convex spaces. // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. v. 40. 3. P. 396-414.

6. Lovaglia A.R. Locally uniformly convex Banach spaces. // Trans. Amer. Math. Soc. 1955. v. 78 1. P. 225-238.

7. Кадец М.И. О пространствах изоморфных локально равномерно выпуклым пространствам // Изв. вузов. Математика. 1959. Т. 6. С. 51-57.

8. Lindenstrauss J. Weakly compacts sets-their topological properties and Banach spaces they generate. // Ann. Math. Studies. 1972. v. 69. P. 235-273.

9. Троянски С.Л. Об эквивалентных нормах и минимальных системах в несепарабельных пространствах Банаха. // Теория функций, функц. анализ и их приложения. 1972. т. 43. с. 125-138.

10. Кадец М.И. О связи между слабой и сильной сходимостью. // ДАН УССР. 1959. № 9. с. 949-952.

11. Beazamy B. Introduction to Banach Spaces and their Geometry. Oxford. 1985. s. 334.

12. Deville R., Godefroy G., Zizler V. Smoothness and renorming in Banach spaces. Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics . Math. 64, Longman scientific and technical, Longman house, Burnt mill. Harrow. 1993.

13. Манохин Е.В. Г- слабо локально равномерная выпуклость в пространствах Банаха. // Известия Вузов. Математика. 1998. № 1. с. 51-54.

14. Манохин Е.В. О К-локально равномерно выпуклых пространствах. // Известия Вузов. Математика. 1991. № 5. с. 32-34.

15. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. Москва: Изд-во Наука, 1977. 370 с.

16. Jayne J.E., Namioka I. and Rogers C.A. σ-fragmentable Banach spaces // Mathematika. 1992. Vol. 39. P. 166–188.

17. Манохин Е.В. О геометрических и линейно-топологических свойствах некоторых пространств Банаха. Автореф. дис. канд. ф.-м. наук. Харьковский гос. университет, Харьков. 1992.

18. Кобылина М.С. Локально равномерно выпуклая норма на $C(K)$,где K — лексикографический квадрат. // Вестник Томского государственного университета. 2004. № 4.С. 24-27.

19. Zizler V. Non-separable banach spaces. In book "Handbook of the Geometry of Banach spaces"//Elsevier, Amsterdam 2003. Vol. 2. P. 1743-1816.

20. Кобылина М.С. ШК нормы на пространствах непрерывных функций на псевдодеревьях // Вестник Томского государственного университета. 2007. № 297. С. 146-150.

21. Haydon R.G. Trees in renorming theory. // Proc. London Math. Soc. 1999. Vol. 78. P. 541-584.

22. Haydon R.G., Zizler V. A new spaces with no locally uniformly rotund renorming. // Can. Math. Bull. 1989. Vol. 32(1). P. 122-128.

23. Haydon R.G., Hajek Petr. Smooth norms and approximation in Banach spaces of the type $C(K)$. // The Quarterly Journal of Mathematics. 2007. Vol. 58. P. 221-228.

24. Haydon R.G., Locally uniformly convex norms in Banach spaces and their duals.// J. Funct. Anal. 2008. Vol. 254(8). P. 2023-2039.

25. Haydon R.G., Argyros S.A. A hereditarily indecomposable L-infinity-space that solves the scalar-plus-compact problem. // ACTA MATHEMATICA. 2011. Vol. 206(1). P. 1-54.

REFERENCES

1. Milyutin A.A., 1966, “Isomorphism of spaces of continuous functions over compact sets of continuum cardinality”, The Function theory, a functional analysis and their applications, vol 2, pp. 150-156. (Russian)

2. Pelchinsky A., 1979, “Linear prolongations, linear averages and their applications”, World, Moscow

3. Kadets M. I., 1966, “Topological equivalence of all separable Banach spaces”, Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol.167, pp.23-25. (Russian)

4. Kadets M. I., 1967, “Proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces”,. Funktsional. Anal. i Prilozhen, vol. 1 №1, pp.61-70. (Russian)

5. Clarkson J.A., 1936, “Uniformly convex spaces”,Trans. Amer. Math. Soc.,vol.40. 3., pp.396-414.

6. Lovaglia A.R., 1955, “Locally uniformly convex Banach spaces”, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 78 (1), pp.225-238.

7. Kadets M. I., 1959, “Spaces isomorphic to a locally uniformly convex space”, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., vol.6, pp.51-57. (Russian)

8. Lindenstrauss J., 1972, “Weakly compacts sets-their topological properties and Banach spaces they generate”, Ann. Math. Studies, vol.69, pp.235-273.

9. Trojanski S.L., 1972, “About equivalent norms and the minimum systems in nonseparable Banach spaces”, The Function theory, Funkts. analysis and their applications, vol.43, pp.125-138. (Russian)

10. Kadets M. I., 1959, “About connection between weak and a strong convergence”, DAN UkrSSR,№9, pp.949-952. (Russian)

11. Beazamy B., 1985, “Introduction to Banach Spaces and their Geometry”, Oxford.

12. Deville R., Godefroy G., Zizler V., 1993, “Smoothness and renorming in Banach spaces”, Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics . Math. 64, Longman scientific and technical, Longman house, Burnt mill, Harrow.

13. Manokhin E.V., 1998, “Γ - weakly locally uniform convexity in Banach spaces”, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., № 1, pp. 51-54. (Russian)

14. Manokhin E.V., 1991, “On K-locally uniformly convex spaces”, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat, №5, pp.32-34. (Russian)

15. Aleksandrov P. S., 1977, “Introduction in the theory of sets and the general topology”, The Science , Moscow.

16. Jayne J.E., Namioka I. and Rogers C.A., 1992, “σ-fragmentable Banach spaces”, Mathematika, vol. 39, pp. 166–188.

17. Manokhin E.V., 1992, “About geometrical and linearly-topological properties of some Banach spaces.” The author’s PHD-abstract. Kharkov State University, Kharkov.

18. Kobylina M.S., 2004, “Locally uniformly rotund norm on $C(K)$,where K is lexicographic square”, Vestnic Tomsk State University, №4, pp. 24-27. (Russian)

19. Zizler V., 2003, “Non-separable banach spaces”, In book "Handbook of the Geometry of Banach spaces Elsevier, Amsterdam, vol 2, pp. 1743-1816.

20. Kobylina M. S., 2007, “ШК- norms on spaces of continuous functions on pseudo-trees”, Bulletin of Tomsk State University, № 297, pp. 146-150. (Russian)

21. Haydon R.G., 1999, “Trees in renorming theory”, Proc. London Math. Soc., vol. 78, pp. 541-584.

22. Haydon R.G., Zizler V., 1989, “A new spaces with no locally uniformly rotund renorming”, Can. Math. Bull., vol. 32(1), pp. 122-128.

23. Haydon R.G., Petr Hajek., 2007, “Smooth norms and approximation in Banach spaces of the type $C(K)$”,The Quarterly Journal of Mathematics, vol. 58, pp. 221-228.

24. Haydon R.G., 2008, “Locally uniformly convex norms in Banach spaces and their duals”, J. Funct. Anal., vol. 254(8), pp. 2023-2039.

25. Haydon R.G., Argyros S.A., 2011, “A hereditarily indecomposable L-infinity-space that solves the scalar-plus-compact problem”, ACTA MATHEMATICA, vol. 206(1), pp. 1-54.

Получено 10.06.2018
Принято в печать 17.08.2018