

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 2

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-527-530

Об одном варианте теоремы Мертенса

Гияси Азар — кандидат физико-математических наук, Университет Алламеха Табатабаи, Школа математических наук и компьютеров, математический факультет; Иран, Тегеран.
e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

Аннотация

Доказана теорема о сходимости произведения абсолютно и условно сходящихся рядов, которое определяется через дискретный интеграл в смысле Н.В.Бугаева. Даны теоретико-числовые примеры, иллюстрирующие эту теорему.

Ключевые слова: абсолютно и условно сходящиеся ряды, теорема Мертенса о произведении рядов, многочлены Бернулли, дзета-функция Римана.

Библиография: 3 названия.

Для цитирования:

А. Гияси. Об одном варианте теоремы Мертенса // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 527–530.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 2

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-527-530

On a version of Mertens's theorem

Ghyasi Azar — candidate of physical and mathematical sciences, Allameh Tabataba'i University, School of Mathematical Sciences and Computer, the Department of Mathematics; Iran, Tehran.
e-mail: azarghyasi@atu.ac.ir

Abstract

The theorem on the convergence of a product absolutely and conditionally convergent series, which is defined through the discrete integral in the N.V.Bugaev's sense, was proved. Number-theoretical examples, which illustrate this theorem, are given.

Keywords: absolutely and conditionally convergent series, the Mertens's theorem on a product of series, Bernoulli's polynomials, Riemann's zeta-function.

Bibliography: 3 titles.

For citation:

A. Ghyasi, 2018, "On a version of Mertens's theorem", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 527–530.

1. Введение

Настоящая статья посвящена исследованию сходимости произведения рядов. Занумеруем каким-либо образом множество пар (m, n) натуральных чисел, т.е. каждой паре (m, n) поставим в соответствие её номер k и обозначим эту пару через $(m(k), n(k))$. Пусть даны два числовых ряда $\sum_m a_m$ и $\sum_n b_n$. Тогда ряд $\sum_k h_k, h_k = a_{m(k)} b_{n(k)}$, называют их произведением, отвечающим данной нумерации. Общеизвестно, что если оба ряда $\sum_m a_m$ и $\sum_n b_n$ абсолютно сходятся, то ряд $\sum_k h_k$ также абсолютно сходится и его сумма равна произведению сумм рядов $\sum_m a_m$ и $\sum_n b_n$. Это утверждение допускает различные обобщения. В частности имеет место теорема Мертенса.

Теорема М. Пусть ряд $\sum_{m=0}^{\infty} a_m$ сходится абсолютно и его сумма равна A , а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ сходится условно к сумме B . Тогда формальное произведение этих рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k, \quad h_k = \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l},$$

сходится к AB .

2. Произведение рядов и интеграл от арифметических функций

Рассмотрим два числовых ряда $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Определим их произведение следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_k, \quad h_k = \sum_{d|k} a_d b_{k/d}.$$

Следуя Н.В.Бугаеву арифметическую функцию h_k будем называть дискретным интегралом.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть ряд $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ сходится абсолютно и его сумма равна A , а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится условно к сумме B . Тогда произведение этих рядов сходится к числу AB .

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму $H_n = \sum_{k \leq n} h_k$ ряда $\sum_k h_k$. Пусть для любого натурального n и вещественного $x > 1$ определены функции

$$\alpha_n = \sum_{m > n} a_m, \quad \beta_x = \sum_{m > x} b_m.$$

Тогда, преобразуя H_n , получим

$$\begin{aligned} H_n &= \sum_{k \leq n} h_k = \sum_{k \leq n} \sum_{d|k} a_d b_{k/d} = \\ &= \sum_{d \leq n} a_d \sum_{\substack{k \leq n \\ k \equiv 0 \pmod{d}}} b_{k/d} = \sum_{d \leq n} a_d \sum_{m \leq n/d} b_m = \\ &= \sum_{d \leq n} a_d (B - \beta_{n/d}) = AB - B\alpha_n - \sum_{d \leq n} a_d \beta_{n/d}. \end{aligned}$$

Таким образом, находим

$$AB = H_n + R_n, \quad R_n = R'_n + R''_n, \quad R'_n = B\alpha_n, \quad R''_n = \sum_{d \leq n} a_d \beta_{n/d}.$$

Так как при $n \rightarrow \infty$ имеем $\alpha_n \rightarrow 0$, то $R'_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Оценим

$$|R''_n| \leq \sum_{d=1}^n |a_d| \cdot |\beta_{n/d}| = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{d \leq \sqrt{n}} |a_d| \cdot |\beta_{n/d}|, \quad \Sigma_2 = \sum_{\sqrt{n} < d \leq n} |a_d| \cdot |\beta_{n/d}|.$$

Из сходимости ряда $\sum_m b_m$ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого натурального $d \leq \sqrt{n}$ найдётся номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > n_0$ справедливо неравенство $|\beta_{n/d}| < \varepsilon$. Кроме того, из абсолютной сходимости ряда $\sum_n a_n$ получим, что $\sum_n |a_n| = A'$. Следовательно,

$$|\Sigma_1| \leq \sum_{d \leq \sqrt{n}} |a_d| \cdot |\beta_{n/d}| < A'\varepsilon.$$

Далее, при $\sqrt{n} < d \leq n$ из сходимости ряда $\sum_m b_m$ найдётся $C > 0$ такое, что $|\beta_{n/d}| \leq C$. Наконец, из критерия Коши существует $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > n_1$ имеем

$$\sum_{\sqrt{n} < d \leq n} |a_d| < \varepsilon.$$

Следовательно, $|\Sigma_2| < C\varepsilon$. Отсюда получим, что $H_n \rightarrow AB$. Теорема доказана.

3. Ряды, содержащие арифметические функции

Приведём примеры, иллюстрирующие доказанную теорему.

1. Пусть

$$\rho_0(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m t}{m} = \begin{cases} 0,5 - \{t\}, & \text{если } t \notin \mathbf{Z}, \\ 0, & \text{если } t \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

и пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = A$, абсолютно сходится. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{k}, \quad A_k = A_k(t) = \sum_{d|k} a_d \sin \left(2\pi \frac{k}{d} t \right),$$

сходится к функции $\pi A \rho_0(t)$.

В частности, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{k}, \quad A_k = \sum_{d|k} \frac{1}{d} \sin \left(\frac{\pi k}{2d} \right),$$

равен $\pi^3/24 = \pi\zeta(2)\rho_0(1/4)$.

2. Пусть

$$\ln(2 \sin \pi t) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi m t)}{m},$$

и пусть A сумма абсолютно сходящегося сходящегося ряда из примера 1. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k}, \quad B_k = B_k(t) = \sum_{d|k} a_d \cos\left(2\pi \frac{k}{d} t\right),$$

сходится к функции $A \ln(2 \sin \pi t)$.

4. Заключение

Поводом для написания этой статьи послужила, с одной стороны, теорема Мертенса о формальном произведении абсолютно и условно сходящихся рядов (см., например, [2], с.358, теорема 23), а с другой стороны, формальное тождество вида [1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \rho_0(n\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n} \sin(2\pi n\theta),$$

где

$$A_n = \sum_{d|n} a_d.$$

Автор приносит глубокую благодарность за постановку задачи профессору В. Н. Чубарикову.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davenport H. On some infinite series involving arithmetical functions // J. London Math. Soc. 11(1936), p. 8–14.
2. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. Изд. 6-ое. — М.: Дрофа. 1987.
3. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis. — Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39). 2004.

REFERENCES

1. Davenport H. 1936, "On some infinite series involving arithmetical functions", *J. London Math. Soc.* 11, p. 8–14.
2. Arkhipov G. I., Sadovnichij V. A., Chubarikov V. N. 1987, *Lekcii po matematicheskomu analizu*. Izd. 6-oe. — M.: Drofa.
3. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 2004 *Trigonometric Sums in Number Theory and Analysis*. Berlin–New York: Walter de Gruyter (de Gruyter Expositions in Mathematics 39).

Получено 06.07.2018

Принято в печать 17.08.2018