ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 511.35, 517.15 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-521-526

Об оценке среднего значения остатка в асимптотической формуле для суммы значений арифметической функции на последовательности Битти

Бегунц Александр Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: ab@rector.msu.ru
Горяшин Дмитрий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: goryashin@mech.math.msu.su

Аннотация

Заметка посвящена оценке среднего значения величин $\Delta(\alpha, N) = \Delta(\alpha, 0, N)$ и $\Delta(\alpha, \beta, N)$ относительно $\alpha > 1$ и $0 < \beta < \alpha$ соответственно, где $\Delta(\alpha, \beta, N)$ — остаточный член в формуле вида

$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n+\beta]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N+\beta} f(m) + \Delta(\alpha, \beta, N),$$

для произвольной арифметической функции $f(n)$.

Ключевые слова: последовательность Битти, антье-последовательность, среднее значение арифметической функции.

Библиография: 5 названия.

Для цитирования:
А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин. Об оценке среднего значения остатка в асимптотической формуле для суммы значений арифметической функции на последовательности Битти // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 521–526.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 511.35, 517.15 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-521-526

Estimation of the mean value of the remainder term in the asymptotic formula for the sum of values of an arithmetical function on a Beatty sequence

Begunts Alexander Vladimirovich — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Mathematics and Mechanics of Lomonosov Moscow State University.
e-mail: ab@rector.msu.ru
Goryashin Dmitry Viktorovich — Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Mathematics and Mechanics of Lomonosov Moscow State University.
e-mail: goryashin@mech.math.msu.su

Abstract

The paper is concerned with the estimation of average values of $\Delta(\alpha, N) = \Delta(\alpha, 0, N)$ and $\Delta(\alpha, \beta, N)$ with respect to $\alpha > 1$ and $0 < \beta < \alpha$ respectively, where $\Delta(\alpha, \beta, N)$ denotes the remainder term in the formula of the form

$$\sum_{n\leq N} f([\alpha n + \beta]) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m\leq\alpha N+\beta} f(m) + \Delta(\alpha, \beta, N),$$

for an arbitrary number-theoretical fuction $f(n)$.

Keywords: Beatty sequences, integer sequence, mean value of a number-theoretic function.

Bibliography: 5 titles.

For citation:
A. V. Begunts, D. V. Goryashin, 2018, "Estimation of the mean value of the remainder term in the asymptotic formula for the sum of values of an arithmetical function on a Beatty sequence", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 521–526.

В последнее время интерес многих авторов привлекают задачи, связаннные с распределением значений различных арифметических функций на последовательностях Битти, т. е. последовательностях вида $[\alpha n + \beta]$, где число α иррационально (см. обзорную статью [4]). Во многих случаях результаты связаны с получением верхних верхних оценок остаточного члена в формуле вида

$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n]) = \frac{1}{\alpha} \sum_{m\leqslant\alpha N} f(m) + \Delta(\alpha, N),$$

которые, как правило, зависят от арифметических свойств числа α, а также с получением таких оценок для почти всех α (в смысле меры Лебега).

В 2009 году А. Аберкромби, У. Бэнкс и И. Шпарлинский [1] для почти всех α доказали следующую оценку сверху для $\Delta(\alpha, N)$, которая зависит только от порядка роста функции f:

$$|\Delta(\alpha, N)| \ll N^{\frac{2}{3}+\varepsilon} M(f, N), \quad \text{где} \quad M(f, N) = 1 + \max_{n\leqslant N} |f(n)|.$$

Настоящая заметка посвящена оценке среднего значения величины $\Delta(\alpha, N)$. Сначала рассмотрим среднее значение относительно $\alpha > 1$. Основным результатом является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f(n)$ — произвольная арифметическая функция и пусть*

$$\Delta(\alpha, N) = \sum_{n\leqslant N} f([\alpha n]) - \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N} f(m).$$

Тогда для любого $A > 1$ имеет место оценка

$$\frac{1}{A}\left|\int\limits_1^A \Delta(\alpha, N)\, d\alpha\right| \leqslant \frac{A}{4}\sum_{m\leqslant AN}\frac{|f(n)|}{n}.$$

Доказательство. Заметим, что равенство $m = [\alpha n + \beta]$ верно тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $m \leqslant \alpha n < m+1$, или $\frac{m}{\alpha} \leqslant n < \frac{m+1}{\alpha}$ (можно считать, что α иррационально, так что, на самом деле, все неравенства строгие). Если $\{\frac{m+1}{\alpha}\} < \frac{1}{\alpha}$, то для каждого натурального m такое значение n существует и однозначно определяется значением m, так как $\alpha > 1$. Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n]) = \sum_{\substack{m\leqslant \alpha N\\ \{\frac{m+1}{\alpha}\}<\frac{1}{\alpha}}} f(m).$$

Lemma 1 (см. [2]). *Пусть $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ и $\varphi_{a,b}(x)$ — 1-периодическая функция, определённая на полуинтервале $(0;1]$ следующим образом:*

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } a < x < b; \\ \frac{1}{2}, & \text{if } x = a \text{ or } x = b; \\ 0, & \text{if } 0 < x < a \text{ or } b < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\varphi_{a,b}(x) = b - a + \rho(x-a) - \rho(x-b),$$

где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ при $x \notin \mathbb{Z}$, и $\rho(x) = 0$ при $x \in \mathbb{Z}$.

Пользуясь этой леммой при $a = 0$ и $b = \frac{1}{\alpha}$, получаем

$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n]) = \sum_{m\leqslant \alpha N} f(m)\varphi_{0,\frac{1}{\alpha}}\Big(\frac{m+1}{\alpha}\Big) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N} f(m) + \Delta(\alpha, N),$$

где

$$\Delta(\alpha, N) = \sum_{m\leqslant \alpha N} f(m)\left(\rho\Big(\frac{m+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)\right).$$

Если $\frac{s}{N} < \alpha < \frac{s+1}{N}$, где $N \leqslant s \leqslant [AN]-1$, то получаем

$$\Delta(\alpha, N) = \sum_{m\leqslant s} f(m)\left(\rho\Big(\frac{m+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)\right).$$

Следовательно, интеграл по отрезку $[1;A]$ от этой величины равен

$$\int\limits_1^A \Delta(\alpha, N)\, d\alpha = \sum_{s=N}^{[AN]-1}\sum_{m\leqslant s} f(m)\int\limits_{\frac{s}{N}}^{\frac{s+1}{N}}\left(\rho\Big(\frac{m+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)\right) d\alpha +$$

$$+ \sum_{m\leqslant AN} f(m)\int\limits_{\frac{[AN]}{N}}^{A}\left(\rho\Big(\frac{m+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)\right) d\alpha.$$

Объединим интегралы, отвечающие значениям $m \leqslant N$ и $m = s$ при $s = N+1, \ldots, [AN]-1$. Получим

$$\int\limits_1^A \Delta(\alpha, N)\, d\alpha = \sum_{s=N+1}^{[AN]-1} f(s) \int\limits_{\frac{s}{N}}^{A} \left(\rho\Big(\frac{m+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)\right) d\alpha +$$
$$+ \sum_{m\leqslant N} f(m) \int\limits_1^A \left(\rho\Big(\frac{m+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)\right) d\alpha = \tag{1}$$
$$= \sum_{m\leqslant AN} f(m) \int\limits_{\max(1,\frac{m}{N})}^{A} \left(\rho\Big(\frac{m+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)\right) d\alpha.$$

Lemma 2. *Для любых $m \in \mathbb{N}$ and $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$, имеет место неравенство*

$$\left|\int\limits_a^b \rho\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)\, d\alpha\right| \leqslant \frac{b^2}{8m}.$$

Утверждение этой леммы легко следует из второй теоремы о среднем после замены переменной $t = \frac{m}{\alpha}$. Действительно,

$$\int\limits_a^b \rho\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)\, d\alpha = m \int\limits_{m/b}^{m/a} \frac{\rho(t)}{t^2}\, dt = \frac{m}{(m/b)^2} \int\limits_{m/b}^{c} \rho(t)\, dt$$

для некоторого $c \in (m/b; m/a)$, и поскольку $\left|\int\limits_x^y \rho(t)\, dt\right| \leqslant \frac{1}{8}$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$, получаем требуемое.

Наконец, из (1), применяя лемму 2, находим

$$\left|\int\limits_1^A \Delta(\alpha, N)\, d\alpha\right| \leqslant \sum_{m\leqslant AN} |f(m)| \left(\left|\int\limits_{\min(1,\frac{m}{N})}^{A} \rho\Big(\frac{m+1}{\alpha}\Big)\, d\alpha\right| + \left|\int\limits_{\min(1,\frac{m}{N})}^{A} \rho\Big(\frac{m}{\alpha}\Big)\, d\alpha\right| \right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m\leqslant AN} |f(m)| \left(\frac{A^2}{8(m+1)} + \frac{A^2}{8m}\right) \leqslant \frac{A^2}{4} \sum_{m\leqslant AN} \frac{|f(m)|}{m},$$

чем и завершается доказательство теоремы 1. □

Следствие 1. *Если $f(n) = \tau(n)$ — количество натуральных делителей числа n, то для любых $A > 1$ и $\varepsilon > 0$ имеем*

$$\frac{1}{A}\left|\int\limits_1^A \Delta(\alpha, N)\, d\alpha\right| \ll_\varepsilon \min(A \ln^2 N, (AN)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Оценка, соотвестствующая первому аргументу минимума, следует из доказанной теоремы, а вторая — из результатов статьи [3]. Отметим, что при $A \ll N^{1+\varepsilon'}$, $\varepsilon' > 0$, первая из них точнее, чем вторая.

Перейдём к рассмотрению среднего значения относительно β ($0 \leqslant \beta < \alpha$) остаточного члена в формуле
$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n+\beta]) = \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N+\beta} f(m) + \Delta(\alpha,\beta,N).$$

Теорема 2. *Пусть $f(n)$ — произвольная арифметическая функция и*
$$\Delta(\alpha,\beta,N) = \sum_{n\leqslant N} f([\alpha n+\beta]) - \frac{1}{\alpha}\sum_{m\leqslant \alpha N+\beta} f(m).$$
Тогда для любого $\alpha>1$ имеем
$$\frac{1}{\alpha}\left|\int\limits_0^\alpha \Delta(\alpha,\beta,N)\,d\beta\right| \leqslant 2\alpha \max_{\alpha N<m\leqslant \alpha(N+1)} |f(m)|.$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1 получаем
$$\sum_{n\leqslant N} f([\alpha n+\beta]) = \sum_{\substack{m\leqslant \alpha N\\ \{\frac{m-\beta+1}{\alpha}\}<\frac{1}{\alpha}}} f(m)$$
и
$$\Delta(\alpha,N) = \sum_{m\leqslant \alpha N+\beta} f(m)\left(\rho\Big(\frac{m-\beta+1}{\alpha}\Big) - \rho\Big(\frac{m-\beta}{\alpha}\Big)\right).$$
Имеем
$$\int\limits_0^\alpha \sum_{m\leqslant \alpha N+\beta} f(m)\rho\Big(\frac{m-\beta}{\alpha}\Big)\,d\beta = I_1+I_2,$$
где
$$I_1 = \int\limits_0^\alpha \sum_{m\leqslant \alpha N} f(m)\rho\Big(\frac{m-\beta}{\alpha}\Big)\,d\beta = \sum_{m\leqslant \alpha N} f(m)\int\limits_0^\alpha \rho\Big(\frac{m-\beta}{\alpha}\Big)\,d\beta = 0$$
так как интеграл от $\rho(x)$ по любому отрезку целочисленной длины равен нулю, и
$$|I_2| = \left|\int\limits_0^\alpha \sum_{\alpha N<m\leqslant \alpha N+\beta} f(m)\rho\Big(\frac{m-\beta}{\alpha}\Big)\,d\beta\right| \leqslant \int\limits_0^\alpha \sum_{\alpha N<m\leqslant \alpha(N+1)} |f(m)|\,d\beta \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^2 \max_{\alpha N<m\leqslant \alpha(N+1)} |f(m)|.$$
Оценка сверху для суммы с $\rho\big(\frac{m-\beta+1}{\alpha}\big)$ в точности такая же. □

Следствие 2. *Если $f(n)=\tau(n)$ — количество натуральных делителей числа n, то для любых $\alpha>1$ и $\varepsilon>0$ имеем*
$$\frac{1}{\alpha}\left|\int\limits_0^\alpha \Delta(\alpha,N)\,d\beta\right| \ll \alpha^{1+\varepsilon}N^\varepsilon.$$

Результаты данной работы и основные факты из обзорной статьи [4] докладывались авторами на XV Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённой столетию со дня рождения профессора Н. М. Коробова (Тула, 28—31 мая 2018 г.) [5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abercrombie A., Banks W. and Shparlinski I. Arithmetic functions on Beatty sequences // Acta Arith. Vol. 136. 2009. P. 81-89.

2. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2004.

3. Бегунц А. В. Об одном аналоге проблемы делителей Дирихле // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. №6. P. 52-56.

4. Бегунц А. В., Горяшин Д. В. Актуальные задачи, связанные с последовательностями Битти // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18. №4. С. 97-105.

5. Бегунц А. В., Горяшин Д. В. О последовательностях Битти // Тезисы XV Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвящённой столетию со дня рождения профессора Н. М. Коробова. Тула, 28—31 мая 2018 г. С. 206-208.

REFERENCES

1. Abercrombie A., Banks W. and Shparlinski I. 2009. “Arithmetic functions on Beatty sequences“, Acta Arith., vol. 136, pp. 81-89.

2. Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N. 2004. “Lectures on mathematical analysis“. Moscow, Drofa.

3. Begunts A. V. 2004, “An analogue of the Dirichlet divisor problem“, Moscow Univ. Math. Bull., vol. 59, no. 6, pp. 37–41.

4. Begunts A. V., Goryashin D. V. 2017. “Topical problems concerning Beatty sequences“, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, no. 4, pp. 97-105. (Russian)

5. Begunts A. V., Goryashin D. V. 2018. “On Beatty sequences“, Theses of XV International conference «Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications», dedicated to hundredth birthday of professor N. M. Korobov. Tula, 28—31 May 2018. P. 206-208. (Russian)

Получено 19.06.2018
Принято в печать 17.08.2018