ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 511.43 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-499-520

Подстановки и множества ограниченного остатка[1]

Шутов Антон Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук.
e-mail: a1981@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена многомерной проблеме распределения дробных долей линейной функции. Подмножество многомерного тора называется множеством ограниченного остатка, если остаточный член многомерной проблемы распределения дробных долей линейной функции на этом множестве ограничен абсолютной константой. Интерес представляют не только отдельные множества ограниченного остатка, но и разбиения тора на такие множества.

В работе введен новый класс разбиений d-мерного тора на множества $(d+1)$ типа – обобщенные перекладывающиеся разбиения, описанный в комбинаторно-геометрических терминах. Показано, что все разбиения из этого класса состоят из множеств ограниченного остатка. Соответствующая оценка остаточного члена является эффективной. Также найдены условия, при которых оценка остаточного члена для последовательности обобщенных перекладывающихся разбиений тора не зависит от конкретного разбиения в последовательности.

На основе теории геометрических подстановок Арно-Ито введен новый класс обобщенных перекладывающихся разбиений многомерных торов на множества ограниченного остатка с эффективной оценкой остаточного члена. Ранее аналогичные результаты были получены в двумерном случае для одной конкретной подстановки - геометрического варианта хорошо известной подстановки Рози. При помощи предельного перехода построен еще один класс обобщенных перекладывающихся разбиений тора на множества ограниченного остатка с фрактальными границами (так называемые обобщенные фракталы Рози).

Ключевые слова: равномерное распределение, множества ограниченного остатка, разбиения тора, унимодулярные подстановки Пизо, геометрические подстановки.

Библиография: 38 названий.

Для цитирования:
А. В. Шутов. Подстановки и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 499–520.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00433).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 511.43 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-499-520

Substitutions and bounded remainder sets

Shutov Anton Vladimirovich — Candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
e-mail: a1981@mail.ru

Abstract

The paper is devoted to the multidimensional problem of distribution of fractional parts of a linear function. A subset of a multidimensional torus is called a bounded remainder set if the remainder term of the multidimensional problem of the distribution of the fractional parts of a linear function on this set is bounded by an absolute constant. We are interested not only in the individual bounded remainder sets but also in toric tilings into such sets.

A new class of tilings of a d-dimensional torus into sets of $(d+1)$ types is introduced. These tilings are defined in combinatorics and geometric terms and are called generalized exchanged tilings. It is proved that all generalized exchanged toric tilings consist of bounded remainder sets. Corresponding estimate of the remainder term is effective. We also find conditions that ensure that the estimate of the remainder term for the sequence of generalized exchanged toric tilings does not depend on the concrete tiling in the sequence.

Using the Arnoux-Ito theory of geometric substitutions we introduce a new class of generalized exchanged tilings of multidimensional tori into bounded remainder sets with an effective estimate of the remainder term. Earlier similar results were obtained in the two-dimensional case for one specific substitution - a geometric version of well-known Rauzy substitution. With the help of the passage to the limit, another class of generalized exchanged toric tilings into bounded remainder sets with fractal boundaries is constructed (so-called generalized Rauzy fractals).

Keywords: uniform distribution, bounded remainder sets, toric tilings, unimodular Pisot substitutions, geometric substitutions.

Bibliography: 38 titles.

For citation:
A. V. Shutov, 2018, "Substitutions and bounded remainder sets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 499–520.

1. Введение

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ таково, что $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$. Определим отображение сдвига

$$S_\alpha : x \to x + \alpha \pmod{\mathbb{Z}^d}.$$

Отображение S_α переводит d-мерный тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ в себя. Пусть теперь $X \in \mathbb{T}^d$ – множество с интегрируемой по Риману характеристической функцией. Множество X называется множеством ограниченного остатка или BR-множеством относительно сдвига S_α, если для всех a имеет место асимптотика

$$\sharp\{k : 0 \le k \le n-1, S_\alpha^k(a) \in X\} = n|X| + O(1). \tag{1}$$

Иногда также рассматриваются множества ограниченного остатка для конкретных a. Впервые данные множества были введены Гекке [1]. Из многочисленных работ, посвященных множествам ограниченного остатка отметим [2]–[9].

В последние годы возник также интерес к построению разбиений многомерных торов на множества ограниченного остатка. Первые примеры таких разбиений появились в работах [10], [11]. Общий подход к таким разбиениям был разработан в [12] в случае размерности 2 и в [13], [14] в случае произвольной размерности. Данный подход рассматривал разбиения d-мерного тора на $d+1$-множество, а ограниченность остатка описывалась в терминах действия сдвига S_α. Введенные разбиения были названы перекладывающимися разбиениями тора. Отметим, что интерес к подобным разбиениям обосновывается их связью с задачами комбинаторики слов [15], [16], теоретико-числовыми свойствами квазирешеток [17], [18] и физикой квазикристаллов [19]–[22]. Кроме того, для данных разбиений удается получать существенно более точные результаты об остаточном члене асимптотической формулы (1)[23], [24]. Отметим, что для ряда приложений таких как построение сбалансированных слов и изучения вложения решеток в квазирешетки важен не только сам факт существования перекладывающегося разбиения тора на множества оганиченного остатка, но и явная эффективная оценка остаточного члена на всех множествах.

В работе [25] было построенно семейство разбиений двумерного тора на множества ограниченного остатка, не являющихся перекладывающимися в смысле работ [13],[14] и тесно связанное со знаменитым фракталом Рози [10]. Другой подход к подобным двумерным разбиениям был предложен в [26]. В этой работе был введен новый класс разбиений двумерного тора на множества трех типов, названных обобщенными перекладывающимися разбиениями тора, а также было показано, что данные разбиения состоят из множеств ограниченного остатка. Также в данной работе была построена новая серия разбиений тора на множества ограниченного остатка. Ее построение было основано на использовании подстановки параллелограммов, являющейся геометрической версией так называемой подстановки Рози [27]. Также в работе было получено новое доказательство ограниченности остатка для разбиений из [25].

Обобщенные перекладывающиеся разбиения тора из работ [25], [26] значительно более сложны, чем разбиения из работ [10]-[14]. Более того, эти разбиения связаны с одним конкретным сдвигом двумерного тора на вектор (ζ^{-1}, ζ^{-2}), где ζ – вещественный корень уравнения $\zeta^3 - \zeta^2 - \zeta - 1 = 0$. Возникает естественный вопрос о возможности обобщения данных конструкций на случай других сдвигов, а также на случай более высокой размерности. Решению этого вопроса и посвящена данная работа.

В настоящей работе мы вводим понятие обобщенного перекладывающегося разбиения тора в случае произвольной размерности d. Данное разбиение состоит из множеств $d+1$ типа и задается в терминах действия сдвига S_α на разбиении. В теореме 2 нами доказано, что обобщенные перекладывающиеся разбиения тора состоят из множеств ограниченного остатка.

Далее мы рассматриваем общую теорию геометрических подстановок [26], [28] и показываем, что разбиения, полученные в результате итерации унимодулярной примитивной неприводимой геометрической подстановки, являются обобщенными перекладывающимися разбиениями тора.

Изначально теория геометрических подстановок создавалась для построения и изучения фракталов Рози. В §5 мы показываем, как применить данную теорию для построения разбиений Рози, обобщающих разбиения из [25] и являющихся обобщенными перекладывающимися разбиениями.

2. Перекладывающиеся разбиения

Многомерную задачу о множествах ограниченного остатка удобно переформулировать следующим образом.

Пусть L – некоторая решетка, v – иррациональный относительно решетки L вектор, то есть вектор, координаты которого в некотором базисе решетки L линейно независимы над $\mathbb{Z}$ вместе с единицей (очевидно, что данное определение не зависит от выбора базиса). Отображение сдвига

$$S : x \to x + v \pmod{L}$$

переводит тор $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/L$ в себя. Множество $X \in \mathbb{T}^d$ будем называть $BR(C)$-множеством, если для всех a выполняется неравенство

$$|r(v, a, n, X)| \le C,$$

где

$$r(v, a, n, X) = N(v, a, n, x) - n\frac{|X|}{\det L}$$

и

$$N(v, a, n, x) = \sharp\{i : 0 \le i \le n-1, S^i(a) \in X\}.$$

Множество T будем называть разверткой тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/L$, если оно является фундаментальной областью решетки L, то есть

1) Для любой точки $x \in \mathbb{R}^d$ существует точка $x' \in T$, такая, что $x \equiv x' \pmod{L}$.

2) Любые две точки x, $x' \in T$ не сравнимы по модулю решетки: $x \not\equiv x' \pmod{L}$.

Очевидно, что существует естественное взаимно-однозначное отображение $\iota : T \to \mathbb{T}^d$ между разверткой T и тором $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/L$.

Рассмотрим теперь разбиение

$$\mathbb{T}^d = \mathbb{T}_1 \sqcup \mathbb{T}_2 \sqcup \ldots \sqcup \mathbb{T}_{d+1} \tag{2}$$

d-мерного тора на непересекающиеся множества и порожденное им разбиение

$$T = T_1 \sqcup T_2 \sqcup \ldots \sqcup T_{d+1},$$

где $T_j = \iota^{-1}(\mathbb{T}_j)$.

Разбиение (2) будем называть перекладывающимся, если существуют векторы $v_0, v_1, \ldots, v_d$ такие, что отображение $S^* : x \to x + v_j$, где $x \in T_j$, переводит множество T в себя и его действие на множестве T совпадает с действием, индуцированным сдвигом S, то есть диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{S^*} & T \\ \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ \mathbb{T}^d & \xrightarrow{S} & \mathbb{T}^d \end{array} \tag{3}$$

коммутативна.

Справедлива следующая теорема [14], [17]

Теорема 1. *Множества $\mathbb{T}_j$, где $j = 1, 2, \ldots, d+1$, являются $BR(C)$-множествами относительно сдвига S с эффективно вычислимой константой C.*

Более того, в данном случае можно найти точные границы остаточных членов $r(v, a, n, X)$ (соответствующие формулы имеются в [14], а обзор результатов по вычислению — в [23]) и даже описать их функции распределения [24].

В работе [26] в случае $d = 2$ было введен более общий класс обобщенных перекладывающихся разбиений тора, представляющих собой разбиения двумерного тора на множество трех типов, удовлетворяющие некоторым геометрическим условиям. Было доказано, что данные разбиения также порождают множества ограниченного остатка. Здесь мы доказываем аналогичный результат в случае произвольной размерности d.

Пусть имеется разбиение d-мерного тора $\mathbb{T}^d$:

$$\mathbb{T}^d = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{i=0}^{\sharp E_j - 1} \mathbb{E}_j(i) \tag{4}$$

на непересекающиеся множества $d+1$ типа. Здесь $\sharp E_j$ – количество множеств типа E_j.

Разбиение (4) порождает разбиение развертки

$$T = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{i=0}^{\sharp E_j - 1} E_j(i)$$

в котором $E_j(i) = \iota^{-1}(\mathbb{E}_j(i))$.

Пусть теперь отображение S^* таково, что диаграмма (3) коммутативна. Разбиение (4) будем называть обобщенным перекладывающимся разбиением тора относительно сдвига S, если выполняются три условия.

1) $S^*(E_j(i)) = E_j(i+1)$ для всех допустимых значений i, j.

2) Справедливо равенство

$$\coprod_{j=1}^{d+1} E_j(0) = \coprod_{j=1}^{d+1} S^*(E_j(\sharp E_j - 1))$$

и существуют векторы

$$w_j = (w_j^1, \ldots, w_j^d)$$

такие, что

$$S^*(E_j(\sharp E_j - 1)) - w_j = E_j(0).$$

3) Множество $E = \coprod_{j=1}^{d+1} E_j(0)$ является разверткой некоторого тора.

Теорема 2. *Обобщенное перекладывающееся разбиение тора является его разбиением на $BR(C)$-множества относительно сдвига S с эффективно вычислимой константой C.*

Доказательство. Вначале докажем теорему при выполнении дополнительного условия

$$\begin{vmatrix} \sharp E_1 & \ldots & \sharp E_{d+1} \\ w_1^1 & \ldots & w_1^d \\ & \ldots & \\ w_{d+1}^1 & \ldots & w_{d+1}^d \end{vmatrix} \neq 0 \tag{5}$$

Очевидно, достаточно доказать, что все множества $E_j(i)$ являются $BR(C)$-множествами относительно отображения S^*.

Заметим, что из условия 1 в определении обобщенного перекладывающегося разбиения вытекает, что для любых допустимых j, i_1 и i_2 выполняется неравенство

$$|N(v,a,n,E_j(i_1)) - N(v,a,n,E_j(i_2))| \le 1.$$

Поскольку из условия 1 также вытекает, что $|E_j(i_1)| = |E_j(i_2)|$, выбирая $i_1 = 0$ и переходя к остаточным членам, находим

$$|r(v,a,n,E_j(0)) - r(v,a,n,E_j(i_2))| \le 1. \tag{6}$$

Таким образом, достаточно доказать, что $BR(C)$-множествами являются множества $E_j(0)$.

Далее, поскольку множества $E_i(j)$ дают разбиение T на непересекающиеся множества, имеем

$$\sum_{j=1}^{d+1} \sum_{i=0}^{\sharp E_j - 1} N(v,a,n,E_j(i)) = n.$$

Переходя к остаткам, находим

$$\sum_{j=1}^{d+1} \sum_{i=0}^{\sharp E_j - 1} r(v,a,n,E_j(i)) = 0. \tag{7}$$

Из (6) и (7) получаем неравенство

$$|\sum_{j=1}^{d+1} \sharp E_j r(v,a,n,E_j(0))| \le \sum_{j=1}^{d+1} \sharp E_j - d. \tag{8}$$

Определим отображение первого возвращения для S^* на множестве E формулой

$$d_E S^*(x) = (S^*)^{n_E}(x),$$

где

$$n_E(x) = \min\{k > 0 : (S^*)^k(x) \in E\}.$$

Из условий 1 и 2 определения обобщенного перекладывающегося разбиения вытекает, что $d_E S^*(x) = x + w_j$, если $x \in E_j(0)$. Поскольку отображение $d_E S^*$ переводит множество E в себя, вектор

$$\sum_{j=1}^{d+1} N(v,a,n,E_j(0)) w_j$$

принадлежит множеству E. Переходя к остаточным членам, получим

$$\sum_{j=1}^{d+1} r(v,a,n,E_j(0)) w_j + n \sum_{j=1}^{d+1} |E_j(0)| w_j \in E. \tag{9}$$

Докажем, что вектор

$$U = \sum_{j=1}^{d+1} |E_j(0)| w_j = 0.$$

Пусть

$$U_1(n) = \sum_{j=1}^{d+1} r(v, a, n, E_j(0))w_j.$$

Так как вектор v иррационален относительно решетки L, из теоремы Вейля о равномерном распределении вытекает, что

$$r(v, a, n, E_j(i)) = o(n)$$

для всех допустимых i, j. Поэтому $|U_1(n)| = o(n)$. С другой стороны, используя (9) и учитывая ограниченность множества E, получаем, что $U_1(n) = Un + O(1)$, что возможно лишь при условии $U = 0$. Таким образом, (8) может быть переписано в виде

$$\sum_{j=1}^{d+1} r(v, a, n, E_j(0))w_j \in E. \tag{10}$$

Обозначим через K_l наибольшую по модулю проекцию точек из E на l-ую координатную ось. Тогда (10) порождает d неравенств вида

$$|\sum_{j=1}^{d+1} r(v, a, n, E_j(0))w_j^l| \le K_l \tag{11}$$

В силу (5), неравенство (8) в сочетании с d неравенствами (11) определяют эффективно вычислимый параллелепипед Π в $d+1$-мерном пространстве с коодинатами $(r(v, a, n, E_0(0)), \ldots, r(v, a, n, E_d(0)))$. Отсюда и вытекает, что все $E_j(0)$ являются $BR(C)$-множествами, причем в качестве C можно взять радиус $(d+1)$-мерной сферы с центром в начале координат, содержащей Π. В силу эффективной вычислимости Π, постоянная C также эффективно вычислима.

Перейдем теперь к доказательству условия (5). Предположим противное, то есть

$$\begin{vmatrix} \sharp E_1 & \ldots & \sharp E_{d+1} \\ w_1^1 & \ldots & w_1^d \\ & \ldots & \\ w_{d+1}^1 & \ldots & w_{d+1}^d \end{vmatrix} = 0$$

В этом случае столбцы определителя линейно зависимы, то есть существуют числа $k_1, \ldots, k_{d+1}$, не равные одновременно нулю и такие, что

$$\sum_{j=1}^{d+1} k_j \sharp E_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{d+1} k_j w_j^l = 0, l = 1, \ldots, d.$$

Последнее условие переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^{d+1} k_j w_j = 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $k_{d+1} \neq 0$ и, следовательно,

$$\sharp E_{d+1} = \sum_{j=1}^{d} k'_j \sharp E_j,$$

$$w_{d+1} = \sum_{j=1}^{d} k'_j w_j.$$

Так как все числа $\sharp E_j$ – целые, отсюда вытекает, что вектор w_{d+1} не является иррациональным в решетке L_w, порожденной векторами $w_1, \ldots, w_d$.

С другой стороны, с учетом условия 3, отображение первого возвращения $d_E S^*$ изоморфно некоторому сдвигу тора $\mathbb{R}^d/L_w$. При этом из иррациональности сдвига S вытекает, что орбита отображения S^* всюду плотна на множестве T, а следовательно и на множестве E. Поэтому орбита отображения $d_E S^*$ также всюду плотна на E. Поскольку данное отображение изоморфно сдвигу тора, соответствующий сдвиг обязан быть иррациональным, то есть вектор w_{d+1} иррационален в решетке L_w. Полученное противоречие и доказывает требуемый результат. □

В работе [29] был получен аналог теоремы 2 с другими условиями 2 и 3, представляющими большую сложность для проверки. Кроме того, в работе [30] приведен пример разбиения двумерного тора, удовлетворяющего условию 1 и не содержащего BR-множеств.

Примеры обобщенных перекладывающихся разбиений тора в случае $d = 1$ можно найти например в [31], [32], а в случае $d = 2$ в [25], [26]. При этом в каждой из этих работ построена бесконечная последовательность обобщенных перекладывающихся разбиений, соответствующих одному и тому же сдвигу S. Более того, примеры из [25], [26] и [31] обладали тем свойством, что получаемая в них граница для остатка была одинакова для всех разбиений в последовательности. Докажем общий результат о таких последовательностях разбиений.

Теорема 3. *Пусть дана последовательность $\{Til_k\}$ обобщенных перекладывающихся разбиений d-мерного тора $\mathbb{T}^d$ относительно сдвигов S_k:*

$$Til_k : \mathbb{T}^d = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{i=0}^{\sharp E_{kj}-1} \mathbb{E}_{kj}(i).$$

Пусть выполнены два условия:

1) Существуют постоянные $\lambda > 1$, c_j, $i = 1, \ldots, d+1$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место асимптотические равенства

$$\sharp E_{kj} \sim c_j \lambda^k. \tag{12}$$

2) Множества $E_{kj}(0)$ и векторы w_{kj} не зависят от k.

Тогда все множества $E_{kj}(i)$ являются $BR(C)$-множествами с константой C, не зависящей от k, i, j.

Доказательство. С учетом теоремы 2, достаточно доказать, что неравенства (8), (11), определяющие параллелепипед Π, могут быть приведены к виду, не зависящему от k. В силу условия 2 доказываемой теоремы достаточно сделать это с неравенством (8). Используя асимптотику (12), перепишем (8) в виде

$$|\sum_{j=1}^{d+1} c_j \lambda^k (1 + o(1)) r(v_k, a, n, E_{kj}(0))| \le \sum_{j=1}^{d+1} c_j \lambda^k + O(1). \tag{13}$$

Поделив на $\lambda^k(1 + o(1))$, получаем

$$|\sum_{j=1}^{d+1} c_i r(v_k, a, n, E_{kj}(0))| = O(1)$$

с не зависящей от k и n постоянной в $O(1)$, что и доказывает требуемый результат.□

3. Геометрические подстановки

Ранее примеры обобщенных перекладывающихся разбиений тора были построены только для размерностей $d = 2$. В настоящей работе мы хотим построить примеры таких разбиений в случае произвольной размерности. В работе [26] была обнаружена связь между известной теорией геометрических подстановок и обобщенными перекладывающимися разбиениями тора. Точнее, было показано, что геометрическая подстановка, соответствующая хорошо известной подстановке Рози над трехсимвольным алфавитом, порождает обобщенные перекладывающиеся разбиения в размерности 2. Здесь мы хотим получить аналогичные результаты, справедливые для широкого класса геометрических подстановок в произвольной размерности.

Для этого изложим необходимые сведения из теории геометрических подстановок [27]. Доказательство всех фактов, приведенных в данном параграфе, можно найти в [28].

Пусть $A = \{1, 2, \ldots, d+1\}$ – алфавит. Элементы множества $A^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} A^k$ будем называть словами над алфавитом A. Зададим отображение $\sigma : A \to {}^{\backprime}A^*$ такое, что все слова $\sigma(i)$, $i \in A$ непусты. Отображение σ может быть продолжено до отображения $\sigma : A^* \to A^*$ следующим образом. Слово $a \in A^*$ может быть записано в виде $a = a_1 a_2 \ldots a_n$, где все $a_i \in A$. Положим по определению $\sigma(a) = \sigma(a_1)\sigma(a_2)\ldots\sigma(a_n)$. Определенное таким образом отображение σ называют подстановкой над алфавитом A.

Матрицей подстановки σ называют матрицу $M_\sigma = (m_{ij})_{i,j=1}^{d}$, где m_{ij} равно числу вхождений символа i в слово j. Многие свойства подстановки σ могут быть описаны в терминах ее матрицы [27].

Подстановка σ называется примитивной, если существует k такое, что для любых i, j символ i входит в слово $\sigma(j)$.

Лемма 1. *Подстановка σ примитивна тогда и только тогда, когда наибольшее собственное значение λ_σ матрицы M_σ вещественно, положительно и имеет кратность 1.*

Подстановка σ называется неприводимой, если характеристический многочлен матрицы M_σ неприводим. Отметим, что из неприводимости подстановки вытекает иррациональность собственного значения λ_σ.

Подстановка σ называется унимодулярной, если $\det M_\sigma = \pm 1$.

Пусть $B = \{e_1, \ldots, e_{d+1}\}$ – некоторый базис в $\mathbb{R}^{d+1}$, L – множество целочисленных линейных комбинаций векторов из B. Определим базисные множества

$$(0, i^*) = \{\sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{d+1} \mu_l e_l : 0 \leq \mu_l < 1\},$$

$$(x, i^*) = x + (0, i^*)$$

для $x \in L$. Точку x будем называть отмеченной точкой базисного множества (x, i^*). Пусть Λ – совокупность всех базисных множеств.

Определим геометрическую подстановку Θ_σ, соответствующую примитивной унимодулярной подстановке σ следующим образом. Для любого слова w определим $d+1$-мерный вектор-столбец $ab(w)$, компоненты которого равны числам вхождений символов алфавита A в слово w. Далее для образов $\sigma(j)$, $j \in A$ рассмотрим всевозможные представления вида $\sigma(j) = YiW$, где $i \in A$, а Y и W – некоторые слова над алфавитом A. Положим

$$\Theta_\sigma(0, i^*) = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{\substack{W \\ \sigma(j)=YiW}} (M_\sigma^{-1} ab(W), j^*) \tag{14}$$

Далее отображение Θ_σ продолжается на все множество Λ:

$$\Theta_\sigma(x, i^*) = M_\sigma^{-1} x + \Theta_\sigma(0, i^*)$$

и на множество комбинаций базисных множеств:

$$\Theta_\sigma\left(\coprod_{\lambda\in\Lambda} \lambda\right) = \coprod_{\lambda\in\Lambda} \Theta_\sigma(\lambda).$$

Пусть теперь

$$D_k^{(j)} = \Theta_\sigma^k(0, j^*),$$

$$D_k = \coprod_{j=1}^{d+1} D_k^{(j)}.$$

Пусть v_σ, v_σ^* – правый и левый собственные векторы матрицы M_σ, соответствующие ее наибольшему собственному значению λ_σ. Обозначим через P_σ d-мерное подпространство, ортогональное вектору v_σ^*. Отметим, что подпространство P_σ инвариантно относительно отображения M_σ. Пусть π – проекция на P_σ вдоль вектора v_σ. Отметим, что отбражения M_σ и π коммутируют.

Лемма 2. *Ограничение отображения π на множество D_k является взаимно-однозначным отображением при любом k.*

Далее рассмотрим d-мерные множества $T_k = \pi(D_k)$ и $T_k^{(j)} = \pi(D_k^{(j)})$. Определим на множестве T_k отображение S_k^* по правилу

$$S_k^*(x) = x + \pi(f_j^{(k)}), \text{ если } x \in T_k^{(j)}.$$

Здесь $f_i^{(k)}$ – i-ый вектор столбец матрицы M_σ^{-k}.

Лемма 3. *Отображение S_k^* является взаимно-однозначным отображением множества T_k в себя.*

Рассмотрим решетки

$$L_0 = \{\sum_{k=1}^{d} k_i(e_i - e_{d+1}) : k_i \in \mathbb{Z}\},$$

$$L_k = M_\sigma^{-k}(L_0).$$

Теорема 4. *Пусть σ – примитивная унимодулярная подстановка. Тогда множество T_k представляет собой фундаментальную область решетки $\pi(L_k)$. Кроме того, существует сдвиг $S_k : x \to x + v_k \pmod{\pi(L_k)}$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\pi(L_k)$, действие которого на $\mathbb{R}^d/\pi(L_k)$ изоморфно действию S_k^* на T_k. При этом в качестве вектора v_k можно взять любой из векторов $\pi(f_j^{(k)})$. Если ι_k означает естественную проекцию $T_k \to \mathbb{R}^d/\pi(L_k)$, то диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} T_k & \xrightarrow{S_k^*} & T_k \\ \downarrow{\scriptstyle \iota_k} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_k} \\ \mathbb{R}^d/\pi(L_k) & \xrightarrow{S_k} & \mathbb{R}^d/\pi(L_k) \end{array}$$

коммутативна.

Наиболее известными примерами примитивных неприводимых унимодулярных подстановок на трехсимвольном алфавите являются подстановка Рози

$$\sigma_R : \begin{array}{ccc} 1 & \to & 12 \\ 2 & \to & 13 \\ 3 & \to & 1 \end{array}$$

и два семейства подстановок Якоби-Перрона

$$\sigma_{(a,0)} : \begin{array}{ccc} 1 & \to & \overbrace{11\ldots12}^{a \text{ раз}} \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 1 \end{array},$$

$$\sigma_{(a,1)} : \begin{array}{ccc} 1 & \to & \overbrace{11\ldots13}^{a \text{ раз}} \\ 2 & \to & 1 \\ 3 & \to & 2 \end{array}.$$

Соответствующие геометрические подстановки изображены на рисунках 3–3.

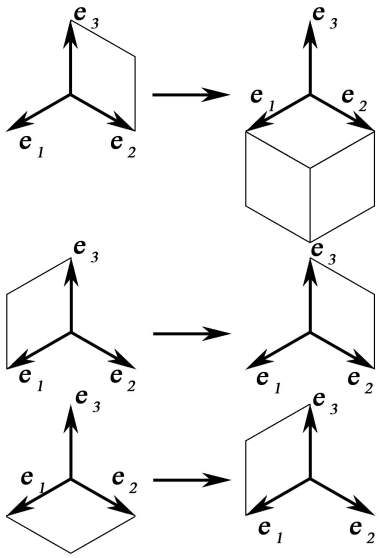

Рис. 1 Геометрическая подстановка, соответствующая подстановке σ_R.

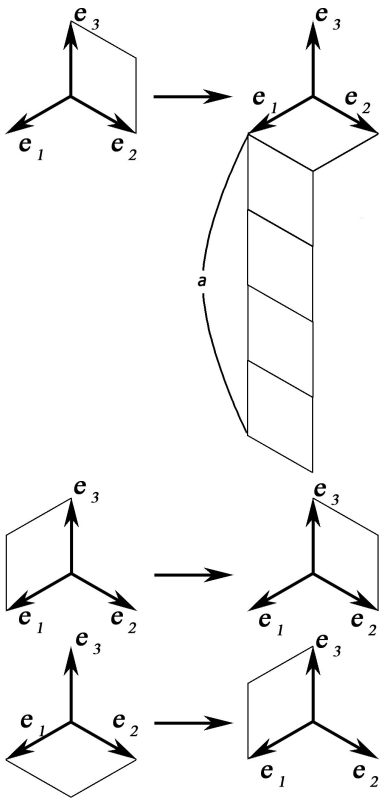

Рис. 2 Геометрическая подстановка, соответствующая подстановке $\sigma_{(a,0)}$.

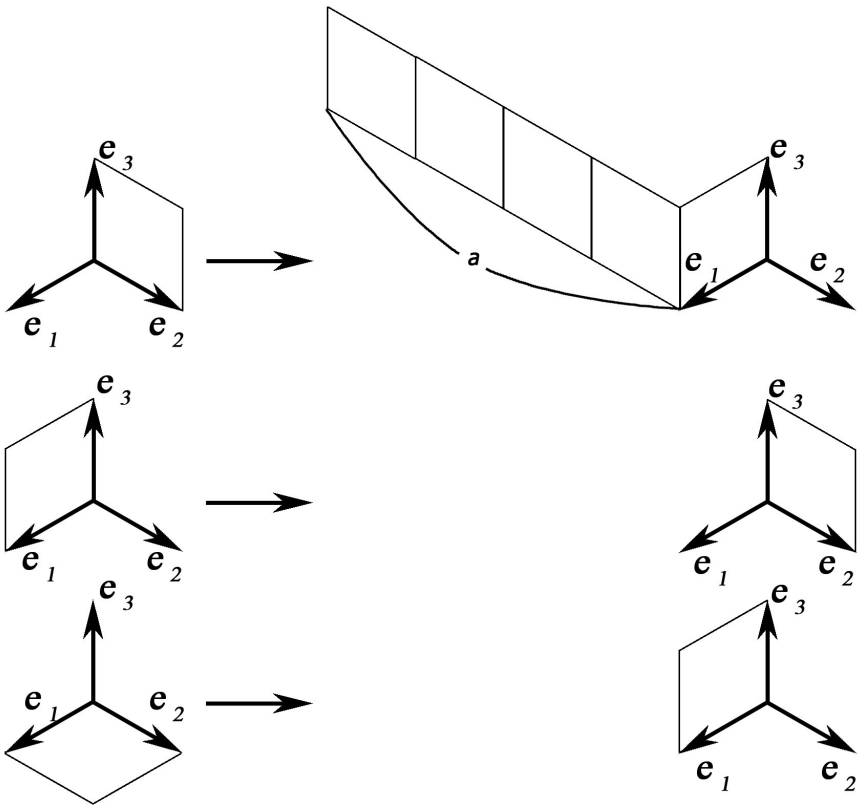

Рис. 3 Геометрическая подстановка, соответствующая подстановке $\sigma_{(a,1)}$.

Простейшим примером примитивной неприводимой унимодулярной подстановки над алфавитом из d символов является обобщенная подстановка Рози

$$\sigma_{R,n}: \begin{array}{lcl} 1 & \to & 12 \\ 2 & \to & 13 \\ & \cdots & \\ d-1 & \to & 1d \\ d & \to & 1 \end{array}.$$

Многочисленные другие примеры примитивных неприводимых унимодулярных подстановок можно найти, например, в [27].

4. Геометрические подстановки и обобщенные перекладывающиеся разбиения

Многократное применение геометрической подстановки Θ_σ к множеству

$$D_0 = \coprod_{j=1}^{d+1}(0, j^*)$$

порождает последовательность разбиений множеств D_k на базисные множества. В силу леммы 2, отображение π переводит даннные разбиения в разбиения множеств T_k. Далее, по теореме 4, множества T_k представляют собой развертки d-мерных торов $\mathbb{R}^d/\pi(L_k)$, поэтому применение к полученным разбиениям отображений ι_k порождает последовательность $\{Til_k\}$ разбиений d-мерного тора. Первые 6 разбиений этой последовательности для подстановок $\sigma_{(1,0)}$ и $\sigma_{(0,1)}$ изображены на рисунке 4.

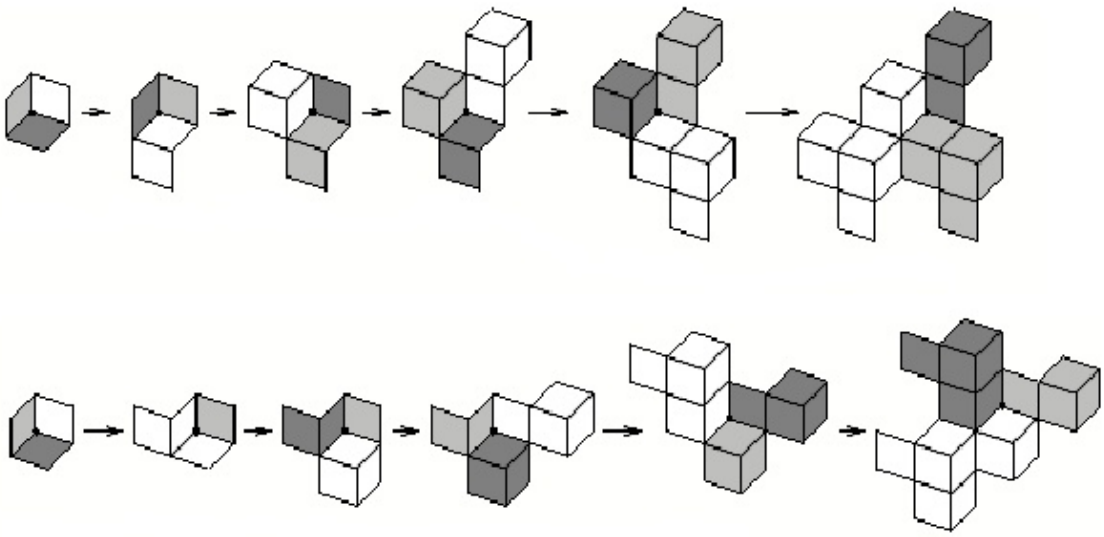

Рис. 4 Разбиения Til_k $(0 \le k \le 5)$ для подстановок $\sigma_{(1,0)}$ и $\sigma_{(0,1)}$.

Теорема 5. *Пусть σ – примитивная унимодулярная подстановка. Тогда разбиение Til_k является обобщенным перекладывающимся разбиением тора относительно сдвига S_k.*

Доказательство. Вначале заметим, что для произвольной подстановки σ ее k-ую степень можно рассматривать как новую подстановку $\sigma_k = \sigma^k$. При этом

$$M_{\sigma_k} = M_\sigma^k$$

и, следовательно,

$$\lambda_{\sigma_k} = \lambda_\sigma^k.$$

Если подстановка σ будет примитивной унимодулярной подстановкой с иррациональным максимальным собственным значением, то подстановка σ_k будет обладать тем же свойством. При этом

$$Til_k(\sigma) = Til_1(\sigma_k).$$

Это означает, что теорему 5 достаточно доказать для $k = 1$. Кроме того, в силу теоремы 4 доказательство можно проводить для разбиения множества T_1.

В силу (14), данное разбиение может быть записано в виде

$$T_1 = \coprod_{i=1}^{d+1} \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{\substack{W \\ \sigma(j)=YiW}} \pi(M_\sigma^{-1} ab(W), j^*). \tag{15}$$

Пусть $\sigma(j) = a_1^j \dots a_{n_j}^j$, где $a_i^j \in A$. Из определения матрицы M_σ вытекает, что

$$n_j = \sum_{i=1}^{d+1} m_{ij}. \tag{16}$$

Пусть также $W_i^j = a_{i+1}^j \dots a_{n_j}^j$ (при $i = n_j$ слово W_i^j пустое). Тогда (15) может быть переписано в виде

$$T_1 = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{i=1}^{n_j} \pi(M_\sigma^{-1} ab(W_i^j), j^*). \tag{17}$$

Положим теперь $E_j(i) = \pi(M_\sigma^{-1} ab(W_{n_j-i}^j), j^*)$ и проверим, что условия теоремы 2 выполнены.

Для проверки условия 1 нужно показать, что при $j = 1, \dots, d+1$ и $i = 0, 1, \dots, l_j - 1$ выполнены равенства $S_1^*(E_j(i)) = E_j(i+1)$. Используя (17), замечаем, что достаточно доказать, что

$$S_1^*(\pi(M^{-1} ab(W_{n_j-i}^j), j^*)) = \pi(M^{-1} ab(W_{n_j-i-1}^j), j^*).$$

С учетом коммутативности π и M_σ^{-1}, а также теоремы 4, последнее условие эквивалентно равенству

$$M^{-1} ab(W_{n_j-i}^j) + f_{d+1}^{(1)} \equiv M^{-1} ab(W_{n_j-i-1}^j) \pmod{L_1}.$$

Умножая на матрицу M^σ, получаем

$$ab(W_{n_j-i}^j) + e_{d+1} \equiv ab(W_{n_j-i-1}^j) \pmod{L_0}$$

или, эквивалентно,

$$ab(W_{n_j-i}^j) - ab(W_{n_j-i-1}^j) + e_{d+1} \in L_0.$$

Слова $W_{n_j-i}^j$ и $W_{n_j-i-1}^j$ различаются единственным символом $a_{n_j-i}^j$. Поэтому, выполняются равенства

$$ab(W_{n_j-i-1}^j) - ab(W_{n_j-i}^j) = ab(a_{n_j-i}^j) = e_{a_{n_j-i}^j}.$$

Таким образом, проверка условия 1 свелась к проверке условия

$$-e_{a_{n_j-i}^j} + e_{d+1} \in L_0,$$

которое всегда выполнено в силу определения решетки L_0.

Перейдем к проверке условия 2. Рассмотрим множества $E_j^* = \pi(e_j, j^*)$. Непосредственно проверяется (см. также [28]), что

$$\coprod_{j=1}^{d+1} E_j^* = \coprod_{j=1}^{d+1} E_j(0).$$

Также ясно, что

$$E_j^* - w_j = E_j(0)$$

при $w_j = \pi(e_j)$. Поэтому для доказательства выполнимости условия 2 достаточно проверить равенство

$$S_1^*(E_j(n_j - 1)) = E_j^*.$$

Так как нами уже доказано, что условие 1 выполнено, данное равенство можно переписать в виде

$$(S_1^*)^{n_j}(E_1(0)) = E_j^*.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получаем, что достаточно проверить условие

$$n_j f_{d+1}^{(1)} \equiv e_j \pmod{L_1}.$$

Вновь домножая на M_σ, находим

$$n_j e_{d+1} \equiv M_\sigma e_j \pmod{L_0}.$$

В силу определения решетки L_0, имеем

$$n_j e_{d+1} - (m_{1j}, \ldots, m_{d+1,j})^t = \sum_{i=1}^{d} k_i (e_i - e_{d+1})$$

для некоторых целых k_i. Последнее условие эквивалентно разрешимости системы линейных неравенств

$$\begin{cases} -m_{1j} & = & k_1 \\ & \ldots & \\ -m_{dj} & = & k_d \\ n_j - m_{d+1,j} & = & -(k_1 + \ldots + k_d) \end{cases}$$

в целых числах $k_1, \ldots, k_d$. Из (15) вытекает, что данная система имеет решение $k_i = -m_{ij}$, что и доказывает выполнимость условия 2.

Выполнимость условия 3 немедленно следует из того, что рассматриваемое в нем множество E в нашем случае совпадает с множеством T_0. $\square$.

Теорема 6. *Пусть σ – неприводимая примитивная унимодулярная подстановка. Тогда последовательность разбиений $\{Til_k\}$ представляет собой последовательность разбиений тора $\mathbb{T}^d$ на $BR(C)$-множества относительно сдвигов S_k с константой C, не зависящей от k и выбора множества.*

Доказательство. В виду теоремы 5, разбиения Til_k являются обобщенными перекладывающимися разбиениями тора относительно сдвигов S_k. Поэтому для доказательства теоремы 6 достаточно проверить выполнимость условий 1 и 2 теоремы 3. Выполнимость условия 2 была доказана в процессе доказательства теоремы 5. Проверим условие 1.

Пусть $n_j(k)$ – длина слова $\sigma_k(j)$. Согласно (16),

$$n_j(k) = \sum_{i=1}^{d+1} m_{ij}(k),$$

где $m_{ij}(k)$ – элементы матрицы M_{σ_k}. Поэтому вектор $N(k) = (n_1(k), \ldots, n_{d+1}(k))^t$ может быть представлен в виде $N(k) = M_{\sigma_k}(1, \ldots, 1)^t$. Так как $M_{\sigma_k} = M_\sigma^k$, имеем

$$N(k) = M_\sigma^k (1, \ldots, 1)^t.$$

Представим вектор $(1, \ldots, 1)^t$ в виде $(1, \ldots, 1)^t = cv_\sigma + u$, $u \in P_\sigma$. В силу неприводимости подстановки σ, $(1, \ldots, 1)^t \notin P_\sigma$ и, следовательно, $c \neq 0$. Поэтому получаем

$$N(k) = c_k \lambda_\sigma^k v_\sigma + M_\sigma^k u,$$

причем, в силу примитивности матрицы M_σ, $|M_\sigma^k u| = o(\lambda_\sigma^k)$. Переходя обратно к координатам вектора, получаем требуемый результат.□

5. Фракталы Рози

Примитивная подстановка σ называется подстановкой Пизо, если наибольшее собственное значение λ_σ матрицы подстановки M_σ является числом Пизо.

Для подстановок Пизо ограничение отображения M_σ на плоскость P_σ представляет собой сжимающее отображение. Это позволяет определить множества

$$\mathcal{T} = \lim_{k\to\infty} M_\sigma^k(\pi(\Theta^k(D_0))),$$

$$\mathcal{T}_j = \lim_{k\to\infty} M_\sigma^k(\pi(\Theta^k(D_0^{(j)})))$$

Множество $\mathcal{T}$ называется фракталом Рози, соответствующим подстановке σ.

Пусть V_σ – прямая с направляющим вектором v_σ, проходящая через начало координат. Обозначим через π' проекцию на V_σ вдоль P_σ. Будем говорить, что подстановка σ удовлетворяет условию суперсовпадения, если для любых двух базисных множеств (x_1, i_1^*), (x_2, i_2^*), внутренности π'-проекций которых имеют непустое пересечение, существует натуральное k такое, что $\Theta_\sigma(x_1, i_1^*)$ и $\Theta_\sigma(x_2, i_2^*)$ содержат общее базисное множество.

Теорема 7. *Пусть σ – неприводимая унимодулярная подстановка Пизо, удовлетворяющая условию суперсовпадения. Тогда имеет место разбиение*

$$\mathcal{T} = \coprod_{i=1}^{d+1} \mathcal{T}_i.$$

Фрактал Рози $\mathcal{T}$ является фундаментальной областью решетки $\pi(L_0)$, а отображение $S_{\mathcal{T}}^*$, определенное равенством $S_{\mathcal{T}}^*(x) = x + \pi(e_i)$ при $x \in \mathcal{T}_i$, изоморфно некоторому сдвигу $S_{\mathcal{T}}$ тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\pi(L_0)$.

Впервые некоторый аналог данной теоремы был доказан в работе [28]. В данной работе вместо условия суперсовпадения использовалось более слабое условие сильного совпадения. При этом не было доказано, что $\mathcal{T}$ в точности является фундаментальной областью решетки $\pi(L_0)$, а вместо изоморфизма сдвигу тора была доказана лишь полусопряженность. Там же было замечено, что изоморфизм будет иметь место, если $\mathcal{T}$ будет фундаментальной областью решетки. Тот факт, что $\mathcal{T}$ – фундаментальная область $\pi(L_0)$ впервые был доказан в [33].

Известно, что упомянутые выше подстановки Якоби-Перрона и обобщенные подстановки Рози являются подстановками Пизо, удовлетворяющими условию суперсовпадения. Отметим, что условие суперсовпадения является крайне сложным для непосредственной проверки. Имеется ряд альтернативных условий, эквивалентных условию суперсовпадения [34], [35]. В настоящее время не известно ни одной неприводимой унимодулярной подстановки Пизо, не удовлетворяющей условию суперсовпадения. Более того, существует доказанная в ряде частных

случаев гипотеза о том, что условие суперсовпадения выполняется для каждой неприводимой унимодулярной подстановки Пизо. Обзор современного состояния проблемы можно найти в [36].

Разбиениям Til_k, рассматривавшимся нами в предыдущем параграфе получаются из разбиений множеств D_k на базисные множества вида

$$D_k = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{i=0}^{n_j(k)-1} (x_{kj}(i), j^*).$$

Определим множества

$$\mathcal{T}_{kj}(i) = \lim_{n\to\infty} M_\sigma^{n+k}(\pi(\Theta^n(x_{kj}, j^*))).$$

Множество $\mathcal{T}_{kj}(i)$ представляет собой множество $M_\sigma^k \mathcal{T}_j$, сдвинутое на некоторый вектор. Отсюда, при выполении условий теоремы 7, получаем разбиения

$$Til'_k : \mathcal{T} = \coprod_{j=1}^{d+1} \coprod_{i=0}^{n_j(k)-1} \mathcal{T}_{kj}(i),$$

называемое разбиением Рози порядка k. Такие разбиения впервые были введены другим способом для классической подстановки Рози в работе [25]. Поскольку действие отображения $S^*_{\mathcal{T}}$ на разбиении Til'_k эквивалентно действию отображения S^*_k, получаем следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть σ – неприводимая унимодулярная подстановка Пизо, удовлетворяющая условию суперсовпадения. Тогда последовательность разбиений $\{Til'_k\}$ порождает последовательность разбиений тора $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\pi(L_0)$ на $BR(C)$ -множества относительно сдвига $S_{\mathcal{T}}$ с константой C, не зависящей от k и выбора множества.*

6. Заключение

В работе введено новое понятие обобщенных перекладывающихся разбиений d-мерного тора и показано, что эти разбиения состоят из множеств ограниченного остатка относительно некоорого иррационального сдвига. Соответствующая оценка остатка является эффективной. Более того, найдены условия, при которых имеется универсальная оценка остаточного члена для целого бесконечного семейства обобщенных перекладывающихся разбиений тора на множества ограниченного остатка.

На основе теории геометрических подстановок Арно-Ито построены новые бесконечные семейства обобщенных перекладывающихся разбиений тора на множества ограниченного остатка. Соответствующая оценка остаточного члена не зависит от номера разбиения в семействе.

Сдвиги тора, возникающие в рассматриваемых примерах являются алгебраическими. В настоящее время неясно, можно ли обобщить рассматриваемые в работе конструкции на случай произвольного иррационального сдвига. Отметим, что попытка обобщить теорию геометрических подстановок Арно-Ито на случай произвольного иррационального вектора приводит к сложным вопросам, связанным с различными многомерными обобщениями понятия цепной дроби (в частности, с модифицированным алгоритмом Якоби-Перрона и алгоритмом Бруна). Некоторые подробности и описание возникающих трудностей можно найти например в [37].

Не менее интересным представляется задача максимально полного описания всех возможных обобщенных перекладывающихся разбиений тора. В настоящее время эта задача очень далека от своего решения и каждая новая конструкция разбиений представляет большой интерес. Отметим, что некоторая конструкция, альтернативная рассматриваемым в данной работе, имеется в [38].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math.Sem.Hamburg Univ. 1921. V.5 P. 54–76.
2. Erdös P. Problems and results on diophantine approximations // Compositio Math. 1964. V. 16 P. 52–65.
3. Furstenberg H., Keynes M., Shapiro L. Prime flows in topological dynamics // Israel J. Math. 1973. V. 14, issue 1. P. 26–38.
4. Grepstad S., Lev N. Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation // Geometric and Functional Analysis. 2015. V. 25, issue 1. P. 87–133.
5. Heynes A., Koivusalo H. Constructing bounded remainder sets and cut-and-project sets which are bounded distance to lattices // Israel J. Math. 2016. V. 212, issue 1. P. 189–201.
6. Kelly M., Sadun L. Patterns equivariant cohomology and theorems of Kesten and Oren // Bull. London Math. Soc. 2015. V. 47, issue 1. P. 13–20.
7. Kesten H. On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. 1966. V. 12, issue 2. P. 193–212.
8. Liardet P. Regularities of distribution // Compositio Math. 1987. V. 61, issue 3. P. 267-293.
9. Szüsz R. Uber die Verteilung der Vielfachen einer Komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats // Acta Math.Acad.Sci.Hungar. 1954. V. 5, issue 1-2. P. 35–39.
10. Rauzy G. Nombres algébriques et substitutions // Bull. Soc. Math. France. 1982. V. 110. P. 147–178.
11. Baladi V., Rockmore D., Tongring N., Tresser C. Renormalization on the n-dimensional torus // Nonlinearity. 1992. V. 5, issue 5. P. 1111-1136.
12. Шутов А.В. Двумерная проблема Гекке-Кестена // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, вып. 2. С. 151–162.
13. Журавлев В.Г. Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка // Аналитическая теория чисел и теория функций, 26. Записки научных семинаров ПОМИ. 2011. Т. 392. С. 95—145.
14. Журавлев В.Г. Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, вып. 1. С. 95–130.
15. Berthe V., Ferenczi S., Zamboni L.Q. Interactions between dynamics, arithmetics, and combinatorics: the good, the bad, and the ugly // Algebraic and Topological Dynamics. 2005. V. 385. P. 333–364.
16. Chevallier N. Coding of a translation of the two-dimensional torus // Monatshefte für Mathematik. 2009. V. 157, issue 2. P. 101–130.
17. Шутов А.В. Многомерные обобщения сумм дробных долей и их теоретико-числовые приложения // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 1. С. 104–118.
18. Шутов А.В. Тригонометрические суммы над одномерными квазирешетками произвольной коразмерности // Математические заметки. 2015. Т. 97, вып. 5. С. 781-–793.

19. Berthe V. Arithmetic discrete planes are quasicrystals // DGCI 2009, 15th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery. Springer, 2009. P. 1–12.

20. Shutov A.V., Maleev A.V. Generalized Rauzy fractals and quasiperiodic tilings // Classification and Application of Fractals: New Reserch. Nova Publishers, 2012. P. 55–111.

21. Shutov A.V., Maleev A.V. Quasiperiodic plane tilings based on stepped surfaces // Acta Crystallographica. 2008. V. A64. P. 376–382.

22. Shutov A.V., Maleev A.V., Zhuravlev V.G. Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry // Acta Crystallographica. 2010. V. A66, P. 427–437.

23. Абросимова А.А. BR-множества // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 2. С. 8–22.

24. Жукова А.А., Шутов А.В. О функции распределения остаточного члена на множествах ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, вып. 1. С. 90–107.

25. Журавлев В.Г. Разбиения Рози и множества ограниченного остатка // Труды по теории чисел. Записки научных семинаров ПОМИ. 2005. Т. 322. С. 83–106.

26. Кузнецова Д.В., Шутов А.В. Перекладывающиеся разбиения тора, подстановка Рози и множества ограниченного остатка // Математические заметки. 2015. Т. 98, вып. 6. С. 878–897.

27. Pytheas Fogg N. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. Springer, 2001.

28. Arnoux P., Ito S. Pisot substitutions and Rauzy fractals // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 2001. V. 8, issue 2. P. 181–207.

29. Шутов А.В. Перекладывания на торе и многомерная проблема Гекке-Кестена // Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. Т. 6, вып. 2. С. 249–253.

30. Кузнецова Д.В., Шутов А.В. О временах первого возвращения для сдвигов тора // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 4. С. 127–130.

31. Журавлев В.Г. Одномерные разбиения Фибоначчи // Изв. РАН. Сер. матем. 2007. Т. 71, вып. 2. С. 89–122.

32. Шутов А.В. Обобщенные разбиения Фибоначчи и их приложения. Lambert Academic Publishing, 2012. 144 с.

33. Ito S., Rao H. Atomic surfaces, tilings and coincidences I. Irreducible case // Israel J. Math. 2006. V. 153, issue 1. P. 129–156.

34. Barge M., Kwapisz J. Geometric theory of unimodular Pisot substitutions // Amer. J. Math. 2006. V. 128, issue 5. P. 1219–1282.

35. Berthe V., Siegel A., Thuswaldner J. Substitutions, Rauzy fractals, and tilings // Combinatorics, Automata and Number Theory. Cambridge University Press, 2010. P. 248–323.

36. Akiyama S., Barge M., Berthe V., Lee J.-Y., Siegel A. On the Pisot substitution conjecture // Mathematics of Aperiodic Order. Springer, 2015. P. 33–72. 10.1007/978-3-0348-0903-0_2.

37. Berthe V., Bourdon J., Jolivet T., Siegel A. A combinatorial approach to products of Pisot substitutions // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2016. V. 36, issue 6. P. 1757-1794.

38. Журавлев В.Г. Индуцированные множества ограниченного остатка // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, вып. 5. С. 171–194.

REFERENCES

1. Hecke E. 1921, "Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins", *Math.Sem.Hamburg Univ.*, vol. 5, pp. 54–76. doi: 10.1007/BF02940580.

2. Erdös P. 1964, "Problems and results on diophantine approximations", *Compositio Math.*, vol. 16, pp. 52–65.

3. Furstenberg H., Keynes M. & Shapiro L. 1973, "Prime flows in topological dynamics ", *Israel J. Math.*, vol. 14, issue 1, pp. 26–38. doi:10.1007/BF02761532.

4. Grepstad S. & Lev N. 2015, "Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation", *Geometric and Functional Analysis*, vol. 25, issue 1, pp. 87–133. doi:10.1007/s00039-015-0313-z.

5. Heynes A. & Koivusalo H. 2016, "Constructing bounded remainder sets and cut-and-project sets which are bounded distance to lattices", *Israel J. Math.*, vol. 212, issue 1, pp. 189–201. doi:10.1007/s11856-016-1283-z.

6. Kelly M. & Sadun L. 2015, "Patterns equivariant cohomology and theorems of Kesten and Oren", *Bull. London Math. Soc.*, vol. 47, issue 1, pp. 13–20. doi:10.1112/blms/bdu088.

7. Kesten H. 1966, "On a conjecture of Erdös and Szüsz related to uniform distribution mod 1", *Acta Arithmetica*, vol. 12, issue 2, pp. 193–212.

8. Liardet P. 1988, "Regularities of distribution", *Compositio Math.*, vol. 61, issue 3, pp. 267-293.

9. Szüsz R. 1954, "Uber die Verteilung der Vielfachen einer Komplexen Zahl nach dem Modul des Einheitsquadrats", *Acta Math.Acad.Sci.Hungar.*, vol. 5, issue 1-2, pp. 35–39. doi:10.1007/BF02020384.

10. Rauzy G. 1982, "Nombres algébriques et substitutions", *Bull. Soc. Math. France*, vol. 110, pp. 147–178.

11. Baladi V., Rockmore D., Tongring N. & Tresser C. 1992, "Renormalization on the n-dimensional torus", *Nonlinearity*, vol. 5, issue 5, pp. 1111-1136. doi:10.1088/0951-7715/5/5/005.

12. Shutov A.V. 2011, "The two-dimensional Hecke–Kesten problem", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 12, issue 2, pp. 151–162.

13. Zhuravlev V.G. 2012, "Exchanged toric developments and bounded remainder sets", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 184, issue 6, pp. 716—745. doi: /10.1007/s10958-012-0894-0.

14. Zhuravlev V.G. 2013, "Multidimensional Hecke theorem on the distribution of fractional parts", *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 24, no. 1, pp. 95–130. doi: 10.1090/S1061-0022-2012-01232-X.

15. Berthe V., Ferenczi S. & Zamboni L.Q. 2005, "Interactions between dynamics, arithmetics, and combinatorics: the good, the bad, and the ugly", *Algebraic and Topological Dynamics*, vol. 385, pp. 333–364.

16. Chevallier N. 2009, "Coding of a translation of the two-dimensional torus", *Monatshefte für Mathematik*, vol. 157, issue 2, pp. 101–130. doi:10.1007/s00605-008-0074-y.

17. Shutov A.V. 2013, "Multidimensional generalization of sums of fraction parts and their applications to number theory", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 14, issue 1, pp. 104–118. doi:10.22405/2226-8383-2013-14-1-104-118.

18. Shutov A.V. 2015, "Trigonometric sums over one-dimensional quasilattices of arbitrary codimension", *Mathematical notes*, vol. 97, issue 5–6, pp. 791-–802. doi: 10.1134/S0001434615050144.

19. Berthe V. 2009, "Arithmetic discrete planes are quasicrystals", *DGCI 2009, 15th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, Springer, pp. 1–12. doi: 10.1007/978-3-642-04397-0_1.

20. Shutov A.V. & Maleev A.V. 2012, "Generalized Rauzy fractals and quasiperiodic tilings", *Classification and Application of Fractals: New Reserch*, Nova Publishers, pp. 55–111.

21. Shutov A.V. & Maleev A.V. 2008, "Quasiperiodic plane tilings based on stepped surfaces", *Acta Crystallographica*, vol. A64, pp. 376–382. doi:10.1107/S0108767308005059.

22. Shutov A.V., Maleev A.V. & Zhuravlev V.G. 2010, "Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry", *Acta Crystallographica*, vol. A66, pp. 427–437. doi: 10.1107/S0108767310006616.

23. Abrosimova A.A. 2015, "BR-sets", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 16, issue 2, pp. 8–22. doi:10.22405/2226-8383-2015-16-2-8-11.

24. Zhukova A.A. & Shutov A.V. 2016, "On the distribution function of the remainder term on bounded remainder sets", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 17, issue. 1, pp. 90–107. doi:10.22405/2226-8383-2016-17-1-90-107.

25. Zhuravlev V.G. 2006, "Rauzy tilings and bounded remainder sets on the torus", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 137, issue 2, pp. 4658–4672. doi:10.1007/s10958-006-0262-z.

26. Kuznetsova D.V. & Shutov A.V. 2015, "Exchanged Toric Tilings, Rauzy Substitution, and Bounded Remainder Sets", *Mathematical Notes*, vol. 98, issue 5–6, pp. 932–948. doi:10.1134/S0001434615110267.

27. Pytheas Fogg N. 2001, "Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics", Springer.

28. Arnoux P. & Ito S. 2001, "Pisot substitutions and Rauzy fractals", *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, vol. 8, issue 2, pp. 181–207.

29. Shutov A.V. 2012, "Exchanged toric tilings and the multidimensional Hecke-Kesten problem", *Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta*, vol. 6, issue 2, pp. 249–253.

30. Kuznetsova D.V. & Shutov A.V. 2013, "On the first return times for toric rotations", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 14, issue 4, pp. 127–130. doi:10.22405/2226-8383-2013-14-4-127-130.

31. Zhuravlev V.G. 2007, "One-dimensional Fibonacci tilings", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 71, issue 2, pp. 89–122. doi:10.1070/IM2007v071n02ABEH002358.

32. Shutov A.V. 2012, "Generalized Fibonacci tilings and their applications", Lambert Academic Publishing, 144 pp.

33. Ito S. & Rao H. 2006, "Atomic surfaces, tilings and coincidences I. Irreducible case", *Israel J. Math.*, vol. 153, issue 1, pp. 129–156. doi:10.1007/BF02771781.

34. Barge M. & Kwapisz J. 2006, "Geometric theory of unimodular Pisot substitutions", *Amer. J. Math.*, vol. 128, issue 5, pp. 1219–1282. doi:10.1353/ajm.2006.0037.

35. Berthe V., Siegel A. & Thuswaldner J. 2010, "Substitutions, Rauzy fractals, and tilings", *Combinatorics, Automata and Number Theory*, Cambridge University Press, pp. 248–323.

36. Akiyama S., Barge M., Berthe V., Lee J.-Y. & Siegel A. 2015, "On the Pisot substitution conjecture", *Mathematics of Aperiodic Order*, Springer, pp. 33–72.

37. Berthe V., Bourdon J., Jolivet T. & Siegel A. 2016, "A combinatorial approach to products of Pisot substitutions", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, vol. 36, issue 6, pp. 1757-1794. 10.1017/etds.2014.141.

38. Zhuravlev V.G. 2017, "Induced bounded remainder sets", *St. Petersburg Mathematical Journal*, vol. 28, issue. 5, pp. 671-688. doi:10.1090/spmj/1466.

Получено 10.06.2018
Принято в печать 17.08.2018