

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 2

УДК 514.113.5

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-489-498

Выпуклые многогранники с дельтоидными вершинами

Субботин Владимир Иванович — доцент кафедры высшей математики, Южно-Российский государственный политехнический университет имени М. И. Платова.

e-mail: geometry@mail.ru

Аннотация

В статье вводится класс замкнутых выпуклых симметричных многогранников в E^3 со специальным строением некоторых вершин: множество $Star(V)$ всех граней, инцидентных такой вершине, состоит из равных между собой дельтоидов. Такие вершины называются в работе *дельтоидными*. Дельтоиды здесь — это выпуклые четырёхугольники, обладающие двумя парами равных смежных сторон и отличные от ромбов. Предполагается также, что каждая дельтоидная вершина V многогранника и каждая грань, не входящая в звезду какой-либо дельтоидной вершины, *локально симметричны*. Локальная симметричность вершины означает, что через V проходит ось вращения L_V порядка n фигуры $S = Star(Star(V))$, где n — число дельтоидов в $Star(V)$; S представляет собой множество граней, состоящих из множества $Star(V)$ и всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с множеством $Star(V)$. Локальная симметричность грани F означает, что ось вращения L_F , пересекающая относительную внутренность F и перпендикулярная F , является осью вращения звезды $Star(F)$.

DS — это обозначение класса многогранников, у которых существуют локально симметричные дельтоидные вершины и существуют грани, не входящие ни в одну звезду дельтоидных вершин; кроме того, все грани, не входящие ни в одну звезду дельтоидных вершин, являются локально симметричными.

В статье доказана теорема о полном перечислении многогранников класса DS , у которых все дельтоидные вершины изолированы. Изолированность, или отделённость, вершины V означает, что её звезда граней не имеет общих элементов со звездой любой другой вершины многогранника.

В работе рассмотрены также многогранники, через каждую вершину V которых проходит ось вращения звезды $Star(V)$, причём V не предполагается дельтоидной заранее; если у таких многогранников существует хотя бы одна дельтоидная грань, то таких многогранников только три.

Доказательства утверждений в работе основаны на свойствах так называемых *сильно симметричных многогранников*. А именно, многогранников, сильно симметричных относительно вращения граней.

Ключевые слова: дельтоидная вершина, сильно симметричный многогранник, локально симметричная вершина, локально симметричная грань.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

В. И. Субботин. Выпуклые многогранники с дельтоидными вершинами // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 489–498.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 2

UDC 514.113.5

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-489-498

Convex polyhedra with deltoidal vertices

Subbotin Vladimir Ivanovich — associate professor, department of higher mathematics, Platov South-Russian state polytechnic university. *e-mail: geometry@mail.ru*

Abstract

In paper the class of closed convex symmetric polyhedra in E^3 with a special structure of some vertices is introduced: the set $Star(V)$ of all faces incident to such vertices consists of equal deltoids. Such vertices are called deltoidal in the article. The deltoids here are convex quadrilaterals that have two pairs of equal adjacent sides and are different from rhombuses. It is also assumed that each deltoidal vertex V of a polyhedron and each face that is not included in the star of any deltoidal vertex are locally symmetric. The local symmetry of a vertex means that the rotation axis L_V of order n of the figure $S = Star(Star(V))$, where n is the number of deltoids of $Star(V)$, passes through V ; S is a set of faces consisting of the set $Star(V)$ and all faces having at least one common vertex with the set $Star(V)$. The local symmetry of the face F means that the rotation axis L_F , which intersects the relative interior of F and perpendicular to F , is the rotation axis of the star $Star(F)$.

DS — so denotes a class of polyhedra that have locally symmetric deltoidal vertices and there are faces that do not belong to any star of the deltoidal vertices; In addition, all faces that do not belong to any star of deltoidal vertices are locally symmetric.

In this paper we prove a theorem on the complete enumeration of polyhedra of the class DS , in which all deltoidal vertices are isolated. The isolation, or separation, of the vertex V means that its star of faces does not have common elements with star of faces of any other vertex of the polyhedron.

We also consider polyhedra, through each vertex V of which the rotation axis of the star $Star(V)$ passes, and V is not assumed to be deltoidal in advance; if such polyhedra have at least one deltoidal face, then there are only three such polyhedra.

The proofs of the statements in the paper are based on the properties of the so-called textit strongly symmetric polyhedra. Namely, polyhedra that are strongly symmetric with respect to the rotation of the faces.

Keywords: deltoidal vertex, strongly symmetric polyhedron, locally symmetric vertex, locally symmetric face.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

V. I. Subbotin, 2018, "Convex polyhedra with deltoidal vertices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 489–498.

1. Введение

Рассмотрим замкнутый выпуклый многогранник в E^3 , у которого все грани правильные и неоднотипные. Если у такого многогранника все многогранные углы равны и существует симметрия многогранника, переводящая любую вершину в любую другую, то получим класс равноугольно-полуправильных (архимедовых) многогранников (см., например, [1]–[4]). Одно лишь условие правильности граней выпуклого многогранника приводит к классу многогранников с правильными гранями ([5]–[9]). Все упомянутые многогранники обладают некоторой нетривиальной симметрией. Очевидно, из одних лишь условий симметричности некоторых элементов многогранника в общем случае не следует ни правильность граней, ни их симметричность, и не всегда можно говорить о полном перечислении многогранников с такими условиями. Однако, условия симметрии элементов многогранника оказывают влияние на его геометрию ([10]–[18]). В частности, специальное симметричное строение граничных звёзд некоторых вершин симметричных многогранников приводит к классу, который допускает полное комбинаторное и метрическое перечисление. Например, в [10] рассмотрен класс так называемых многогранников с симметричными ромбическими вершинами.

Замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется *многогранником с симметричными ромбическими вершинами (RS-многогранник)*, если у него существуют локально симметричные ромбические вершины и существуют грани, не входящие ни в одну гранную звезду этих вершин; причём, каждая грань, не входящая в звезду ромбической вершины, является локально симметричной, [10].

Под звездой $Star(V)$ вершины V понимается множество всех граней, имеющих общую вершину V , а под звездой $Star(F)$ грани F — множество всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с F .

Локальная симметричность вершины V означает, что через V проходит ось вращения фигуры, представляющей собой множество граней, состоящих из множества $Star(V)$ и всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с множеством $Star(V)$. Локальная симметричность грани F означает, что ось вращения, пересекающая относительную внутренность F и перпендикулярная F , является осью вращения звезды $Star(F)$.

При доказательстве полноты списка класса RS-многогранников существенно использовался класс многогранников, сильно симметричных относительно вращения (класс SF , [11]). Согласно [11], замкнутый выпуклый многогранник в E^3 называется сильно симметричным относительно вращения граней, если у каждой грани существует ось вращения многогранника, перпендикулярная этой грани и пересекающая её относительную внутренность. В этом определении существование глобальной оси вращения многогранника эквивалентно локальной симметричности грани, [12]; этот факт важен для дальнейшего изложения. Полный вывод всех многогранников класса SF приведён в [11].

В настоящей работе при доказательстве полноты вводимого далее класса DS (первые буквы слов “deltoid” и “symmetry”) — класса симметричных многогранников с дельтоидными вершинами — существенно будет использован класс SF -многогранников.

2. Определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Дельтоидом называется плоский выпуклый четырёхугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями, только одна из которых делится другой диагональю пополам.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Вершина V замкнутого выпуклого многогранника в E^3 называется дельтоидной, если гранная звезда $Star(V)$ этой вершины состоит из равных между собой*

дельтоидов. Если число дельтоидов звезды $Star(V)$ равно n , то такую вершину будем называть n -дельтоидной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Дельтоидная вершина называется изолированной, если ее звезда не имеет общих элементов со звездой любой другой дельтоидной вершины многогранника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. n -дельтоидная вершина многогранника называется симметричной, если она расположена на оси вращения порядка n многогранника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если через n -дельтоидную вершину V проходит ось вращения порядка n фигуры, состоящей из $Star(V)$ и всех граней, имеющих хотя бы одну общую вершину с множеством $Star(V)$, то такая вершина называется локально симметричной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Грань F многогранника будем называть локально симметричной, если существует ось вращения звезды $Star(F)$, перпендикулярная F и пересекающая относительную внутренность F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. DS -многогранником будем называть замкнутый выпуклый многогранник в E^3 , у которого существуют дельтоидные локально симметричные вершины и существуют грани, не входящие ни в одну звезду дельтоидных вершин; при этом каждая грань, не входящая ни в одну звезду дельтоидных вершин, локально симметрична.

3. DS -многогранники

Здесь будет дан вывод всех DS -многогранников с изолированными дельтоидными вершинами.

Введём понятие *дельтоидного отсечения вершин* правильной грани многогранника.

Пусть F — правильная локально симметричная грань, вершины которой являются трёхгранными. Пусть V — одна из таких вершин. Пусть AV и BV — соседние стороны грани F . Третье ребро VK , инцидентное вершине V , в силу локальной симметричности F составляет равные углы с рёбрами AV и BV . Проведём плоскость p через точки Q и R — середины сторон AV и BV — и точку S на ребре VK . В результате отсечения плоскостью p вершины V получится новая (треугольная) грань QRS .

Проведём аналогичные отсечения плоскостями всех вершин грани F таким образом, чтобы получившиеся в результате отсечения треугольные грани были конгруэнтными между собой. Каждая из отсекающих плоскостей пересекает две соседние с ней плоскости по прямым, проходящим через середины соседних сторон грани F . В виду локальной симметричности грани F все эти прямые пересекаются в одной точке T . Рассмотрим одну из вершин грани F , например V . Принимая отрезки QT и RT за стороны нового треугольника, получим, что четырёхугольник $QTRS$ в общем случае является дельтоидом.

Таким образом, в результате такого *дельтоидного отсечения* всех вершин грани F получим симметричную дельтоидную вершину T .

Основное значение для дальнейшего имеет следующая лемма.

ЛЕММА 1. Для каждого многогранника M класса DS с изолированными дельтоидными вершинами существует многогранник M' сильно симметричный относительно вращения граней, из которого M может быть получен при помощи дельтоидного отсечения некоторых трёхгранных вершин.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многогранник M с изолированными дельтоидными вершинами и пусть V — одна из таких вершин. В виду локальной симметричности вершины V она расположена на оси вращения L_V многогранника, [12]). Сдвигая вершину V вдоль оси L_V до

тех пор, пока она расположится в одной плоскости pi с диагоналями дельтоидов из $Star(V)$, так что от дельтоидов из $Star(V)$ останутся только равные треугольные грани. Вершина V при этом станет фиктивной, лежащей в центре некоторой новой симметричной грани F_V . Полученные треугольные грани образуют замкнутую цепь S , причём любой из треугольников цепи S имеет по одной общей вершине с двумя соседними.

Пусть T — один из треугольников цепи S . Продолжая три грани, стороны которых являются сторонами треугольника T до их пересечения в одной точке C_T , вместо треугольника T получим одну новую вершину C_T грани F_V . Аналогично поступим с остальными треугольниками множества S . Так преобразованная грань F_V , очевидно, по-прежнему будет локально симметричной. Освобождаясь таким образом от всех дельтоидных вершин, получим многогранник M' , каждая из граней которого является локально симметричной, т.е. M' сильно симметричен относительно вращения граней.

Осуществляя все проведённые преобразования в обратном порядке, получим, что многогранник M может быть получен из единственного SF -многогранника M' при помощи дельтоидного отсечения некоторых вершин.

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Класс DS с изолированными дельтоидными вершинами исчерпывается следующими многогранниками:*

a) бесконечной серией "дельтоидных бипирамид", с двумя n -дельтоидными вершинами, $n = 3, 5, 6, 7, 8, \dots$,

a также следующими двадцатью двумя типами многогранников $\{m; n-p\}$ где m — число граней, а n — число p -дельтоидных вершин:

b) $\{16; 4-3\}$, c) $\{32; 6-4\}$, d) $\{72; 12-5\}$, e) $\{30; 8-3\}$, f) $\{72; 20-3\}$, g) $\{10; 4-3\}$, h) $\{14; 4-3\}$, i) $\{36; 8-3\}$, j) $\{36; 6-4\}$, k) $\{90; 12-5\}$, l) $\{22; 4-3\}$, m) $\{22; 4-3\}$, n) $\{44; 6-4\}$, o) $\{44; 6-4\}$, p) $\{42; 8-3\}$, q) $\{42; 8-3\}$, r) $\{60; 8-3; 6-4\}$, s) $\{120; 12-5\}$, t) $\{120; 12-5\}$, u) $\{102; 20-3\}$, v) $\{102; 20-3\}$, w) $\{150; 12-5; 20-3\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно лемме 1, для доказательства теоремы достаточно из всего класса многогранников, сильно симметричных относительно вращения, выбрать такие, у которых существуют правильные грани с трёхгранными вершинами, и проверить, применимо ли дельтоидное отсечение к этим вершинам.

Из всего класса прямых призм с правильными основаниями следует исключить призмы с квадратными основаниями. Действительно, любое дельтоидное отсечение трёхгранных вершин при основаниях таких призм приводит к вытянутому ромбическому додекаэдру с двумя ромбическими вершинами.

На Рис.1 представлены фрагменты схем строения многогранников a)–w); цифрами на этом рисунке указаны порядки осей вращения локально симметричных граней, не являющихся дельтоидными.

На Рис.1,a) изображена одна из "дельтоидных бипирамид" полученная дельтоидным отсечением трёхгранных вершин при верхнем и нижнем основании прямой призмы с правильными основаниями.

На Рис.1,b) представлена схема многогранника, полученного дельтоидным отсечением из равноугольно-полуправильного многогранника — усечённого тетраэдра; у каждой локально симметричной грани имеется ось вращения порядка 3, перпендикулярная ей, что на рисунке отмечено цифрой 3.

Далее укажем многогранники, из которых схемы c)– w) получены дельтоидным отсечением.

c) — усечённый октаэдр; d) — усечённый икосаэдр; e) — усечённый куб; f) — усечённый додекаэдр; g) — полуусечённый куб; h) — дважды усечённый куб; i) — первый полуусечённый

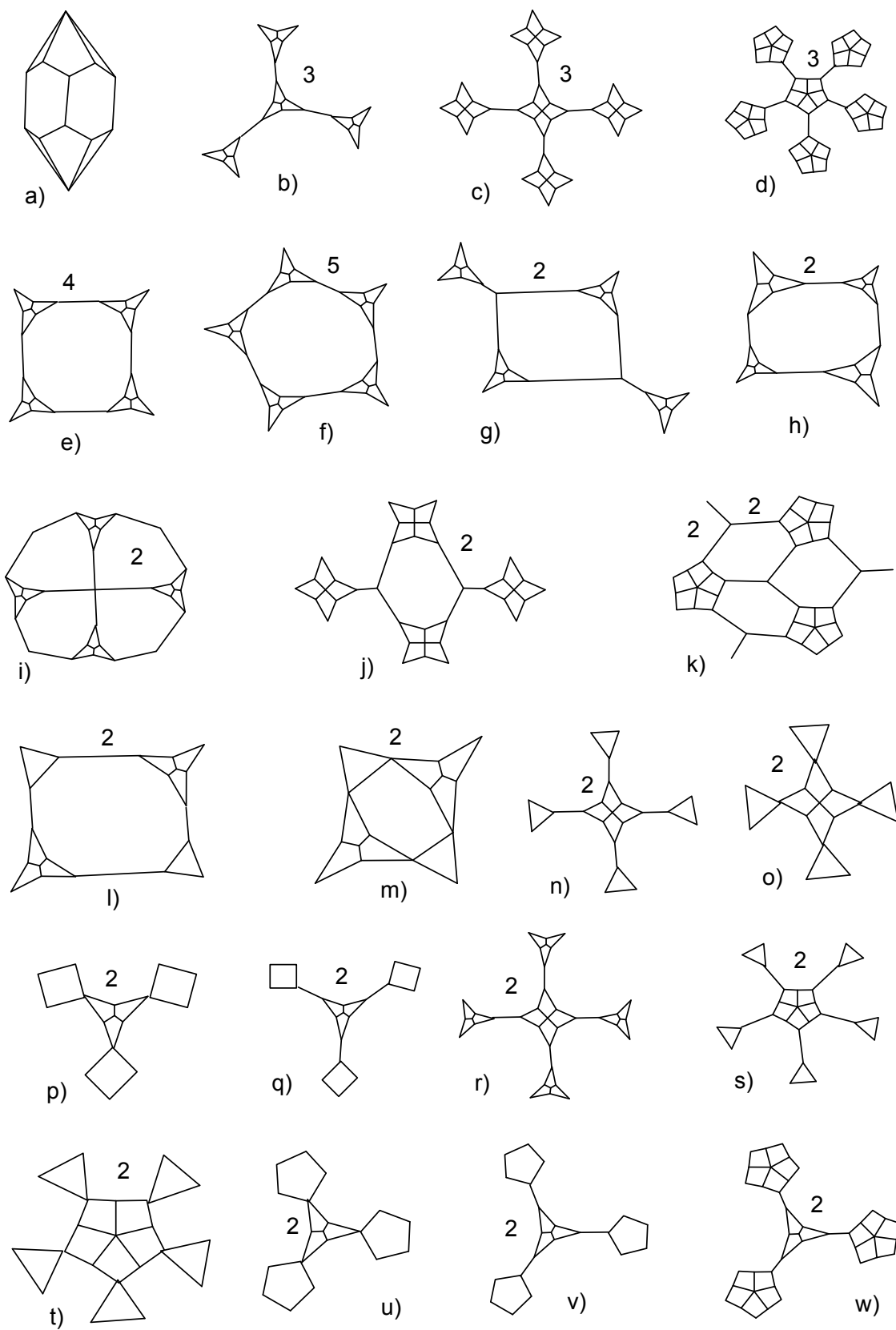


Рис. 1: DS-многогранники

ный ромбододекадр (получен при помощи отсечения трёхгранных вершин ромбододекаэдра); j) – второй полуусечённый ромбододекадр (получен отсечением четырёхгранных вершин ромбододекаэдра); k) – второй полуусечённый ромбический триаконтаэдр (получен отсечением пятигранных вершин ромбического триаконтаэдра); l) – m) – усечённый куб; n) – r) – усечённый ромбододекадр; s) – w) – усечённый ромботриаконтаэдр.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Обозначим Λ класс многогранников, через каждую вершину V которых проходит ось вращения звезды $Star(V)$, причём V заранее не предполагается дельтоидной; и пусть у многогранников класса Λ существует хотя бы одна дельтоидная грань. Тогда класс Λ состоит только из трёх многогранников – дельтоидального икоситетраэдра, дельтоидального гексеконтаэдра и тетрагонтритетраэдра.

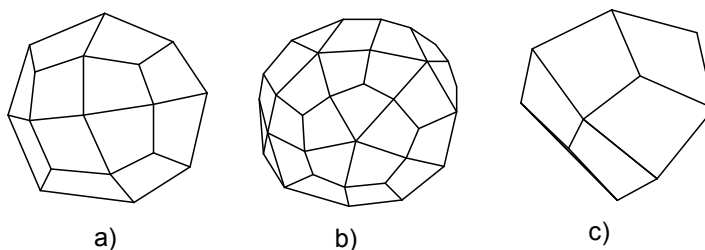


Рис. 2: а)Дельтоидный икоситетраэдр, б)дельтоидный гексеконтаэдр, с)тетрагонтритетраэдр

Действительно, так как все многогранники с локально симметричными гранями перечислены в [11], то и метрически двойственные им – с локально симметричными вершинами – также можно считать известными. Поэтому многогранники из условия теоремы должны находиться среди многогранников, сильно симметричных относительно вращения многогранных углов. Так как среди последних только двойственный ромбокубооктаэдру дельтоидный икоситетраэдр (Рис.2, а)), двойственный ромбоикосододекаэдру дельтоидный гексеконтаэдр (Рис.2, б)) и тетрагонтритетраэдр (Рис.2, с)) имеют все вершины локально симметричные и у них существуют дельтоидные грани, то только эти три многогранника удовлетворяют условиям теоремы.

Отметим, что не все вершины последних трёх многогранников являются дельтоидными симметричными в смысле Определения 4: у них существуют вершины, у которых порядок осей вращения звёзд меньше числа дельтоидов в звёздах.

4. Заключение

Итак, в настоящей статье найдены все замкнутые выпуклые многогранники в E^3 , у которых существуют локально симметричные изолированные дельтоидные вершины и существуют локально симметричные грани, не входящие ни в одну звезду дельтоидных вершин; при этом грани, не входящие ни в одну звезду дельтоидных вершин, являются локально симметричными. Установлено также, что существуют только три многогранника, через каждую вершину которых проходит ось вращения многогранника и у которых существуют дельтоидные грани.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coxeter H. S. Regular polytopes. London-NY. 1963.

2. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981.
3. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
4. Grunbaum B. Convex Polytopes. John Wiley & Sons, New York, 1967.
5. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces // Can. J. Math. 1966. Vol. 18, №1. P. 169—200.
6. Jurij Kovic. Centrally symmetric convex polyhedra with regular polygonal faces // Math. Commun. 2013. Vol. 18. P. 429—440.
7. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т.2. С.1-220.
8. Тимофеев А. В. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, №2. С.118—126.
9. Гурин А. М. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, сложенными из правильных многоугольников // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Ростов-на-Дону, 2006. С.31-33.
10. Субботин В. И. Многогранники с симметричными ромбическими вершинами // Труды международного семинара “Дискретная математика и её приложения”, имени академика О. Б. Лупанова. М.: 2016. С.368-370.
11. Субботин В. И. Об одном классе сильно симметричных многогранников // Чебышевский сборник. Т. 17, №. 4. С. 132-140.
12. Субботин В. И. О некоторых обобщениях сильно симметричных многогранников // Чебышевский сборник. 2015. Т.16, №2. С. 222-230.
13. Субботин В. И. О вполне симметричных многогранниках // Материалы Международной конференции по дискретной геометрии и её приложениям, посвящ. 70-летию проф. С. С. Рышкова. М.: МГУ. 2001. С. 88-89.
14. Субботин В. И. Перечисление многогранников, сильно симметричных относительно вращения // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Ростов-на-Дону. 2002. С.77-78.
15. Subbotin V. I. Characterization of polyhedral partitioning a space. // Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations. Kiev: September, 22-28, 2003. P.46.
16. Субботин В. И. Многогранники с максимальным числом несимметричных граней // Метрическая геометрия поверхностей и многогранников. Материалы Международной конф., посвящ. 100-летию Н. В. Ефимова. М.: Макс-Пресс, 2010. С.60-61.
17. Субботин В. И. О симметричных многогранниках с несимметричными гранями // Материалы Международного семинара “Дискретная математика и её приложения”, посвящ. 80-летию акад. О. Б. Лупанова. М.: МГУ. 2012. С.398-400.
18. Субботин В. И. Сильно симметричные многогранники // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2003. Т.299. С.314-325.

REFERENCES

1. Coxeter H. S. 1963, *Regular polytopes*, London-NY.
2. Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravzov M. K. 1981, *Mnogogranniki. Grafi. Optimizacija*. [*Polyhedra. Graph. Optimization*], Nauka, Moscow.
3. Cromwell P. R. 1997, *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge.
4. Grunbaum B. 1967, *Convex Polytopes*, John Wiley & Sons, New York.
5. Johnson N. W. 1966, "Convex polyhedra with regular faces" // *Can. J. Math.*, vol. 18, №1, pp. 169—200.
6. Jurij Kovic. 2013, "Centrally symmetric convex polyhedra with regular polygonal faces" // *Math. Commun.*, vol. 18, pp. 429—440.
7. Zalgaller V. A. 1967, "Convex polyhedra with regular faces", *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI*, vol. 2, pp.1-220.
8. Timofeenko A. V. 2011, "On convex polyhedra with equiangular and parquet faces", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 12, no. 2, pp. 118-126.
9. Gurin A. M. 2006, "On the history of studying convex polyhedra with regular faces and faces made up of regular polygons", *Trudy megdunarodnoy shkoly-seminara po geometrii i analizu pamyti N. V. Efimova (Proc. Int. School-Seminar on Geometry and Analysis)*, Rostov-on-Don, pp.31-33.
10. Subbotin V. I. 2016, "Polyhedra with symmetric rhombic vertices", *Trudy megdunarodnogo seminar "Diskretnaya matematika i ejo prilogeniya", imeni akademika O. B. Lupanova (Proc. Int. Seminar "Discrete Mathematics and Its Applications")*, Moscow, 2016, pp.368-370.
11. Субботин В. И. 2016, "On a class of strongly symmetric polytopes", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 17, no. 4, pp. 132-140.
12. Subbotin V. I. 2015, "Some generalizations strongly symmetric polyhedra", *Chebyshevskiy sbornik*, vol.16, no.2, pp. 222-230.
13. Subbotin V. I. 2001, "On Completely symmetrical polyhedra", *Materialy Megdunarudnoy konferencii po diskretnoy geometrii i eyo prilogeniyam, posviash. 70-letiju prof. S. S. Ryshkova (Proc. Int. Conf. on discrete geometry and its applications)*, Moscow, pp. 88-89.
14. Subbotin V. I. 2002, "The enumeration of polyhedra, strongly symmetrical with respect to rotation", *Trudy megdunarodnoy shkoly-seminara po geometrii i analizu pamyti N. V. Efimova (Proc. Int. School-Seminar on Geometry and Analysis)*, Rostov-on-Don, pp.77-78.
15. Subbotin V. I. 2003, "Characterization of polyhedral partitioning a space", *Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations*, Kiev, p.46.
16. Subbotin V. I. 2010, "Polyhedra with the maximum number of asymmetrical faces", *Materialy megdunarodnoy konferencii "Metricheskaya geometriya poverchnostey i mnogogrannikov", posvjachennoi 100-letiyu N. V. Efimova (Proc. Int. Conf. "Metric geometry of surfaces and polyhedra")*, Moscow, pp.60-61.

17. Subbotin V.I. 2012, "On symmetric polyhedra with asymmetrical faces", *Trudy megdunarodnogo seminara "Diskretnaja matematika i ejo prilogeniya", posvjachennogo 80-letiyu O.B.Lupanova (Proc. Int. Seminar "Discrete Mathematics and Its Applications")*, Moskow, pp.398-400.
18. Subbotin V.I. 2003, "Strongly symmetric polyhedra", *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, vol.299, pp.314-325.

Получено 03.06.2018

Принято в печать 17.08.2018