ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 2

УДК 519.4 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-475-488

Об алгоритмических проблемах в обобщенных древесных структурах групп Кокстера

Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Аннотация

К основным алгоритмическим проблемам в теории групп, поставленным М. Дэном, относятся проблемы равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах, а также проблема изоморфизма групп.

П. С. Новиков доказал неразрешимость основных алгоритмических проблем в классе конечно определенных групп. Поэтому алгоритмические проблемы изучаюся в конкретных группах.

Группы Кокстера введены Х. С. М. Кокстером: всякая группа отражений является группой Кокстера, если в качестве образующих взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник. Х. Кокстер перечислил все группы отражений в трехмерном евклидовом пространстве и доказал, что все они являются группами Кокстера, а всякая конечная группа Кокстера изоморфна некоторой группе отражений в трехмерном евклидовом пространстве, элементы которой имеют общую неподвижную точку.

Ж. Титс в своих работах изучал группы Кокстера в алгебраическом аспекте, им решена проблема равенства слов в данных группах.

Известно, что в группах Кокстера разрешима проблема сопряженности слов и неразрешима проблема вхождения.

К. Аппелем и П. Шуппом определен класс групп Кокстера экстрабольшого типа. Группы данного класса являются гиперболическими.

Группы Кокстера с древесной структурой введены В. Н. Безверхним. В графе, соответствующем группе Кокстера, всегда можно выделить максимальный подграф, соответствующий группе Кокстера с древесной структурой. В данном классе групп В. Н. Безверхним и О. В. Инченко решен ряд алгоритмических проблем.

В статье доказывается алгоритмическая разрешимость проблем корня и степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера, представляющих собой древесные произведения групп Кокстера экстрабольшого типа и групп Кокстера с древесной структурой.

В доказательстве основных результатов используется метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним.

Ключевые слова: группа Кокстера, алгоритмические проблемы, древесное произведение групп, диаграмма.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:

И. В. Добрынина. Об алгоритмических проблемах в обобщенных древесных структурах групп Кокстера // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 475–488.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 2

UDC 519.4 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-475-488

On algorithmic problems in generalized tree structures of Coxeter groups

Dobrynina Irina Vasiljevna — doctor of physico-mathematical Sciences, associate professor, Professor of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry of Tula State Lev Tolstoy University.
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Abstract

The main algorithmic problems in group theory are the problem of words, the problem of the conjugation of words for finitely presented groups, and the group's isomorphism problem. These problems were posed by M. Dehn.

P. S. Novikov proved the unsolvability of the main algorithmic problems in the class of finitely presented groups. Therefore, algorithmic problems are studied in particular groups.

Coxeter groups were introduced by H. S. M. Coxeter. A Coxeter group is a reflection group in which reflections with respect to hyperplanes limiting the fundamental polytope of the group are taken as generators. H. S. M. Coxeter listed all the reflection groups in three-dimensional Euclidean space and proved that they are all Coxeter groups and every finite Coxeter group is isomorphic to some reflection group in the three-dimensional Euclidean space which elements have a common fixed point.

J. Tits studied Coxeter groups in the algebraic aspect. In his papers the problem of word in Coxeter groups is solved.

It is known that in Coxeter groups the problem of the conjugacy of words are solvable and the problem of occurrence is unsolvable.

K. Appel and P. Schupp defined a class of Coxeter groups of extra large type. Groups of this class are hyperbolic.

V. N. Bezverkhnii introduced the notion of a Coxeter group with a tree structure. In a graph corresponding to a Coxeter group, one can always allocate the maximal subgraph corresponding to the Coxeter group with a tree structure. V. N. Bezverkhnii and O. V. inchenko solved a series of algorithmic problems in this class of groups.

In the article the problems of the root and the power conjugacy of words in a generalized tree structures of Coxeter groups, which is a tree product of Coxeter groups of extra large type and of Coxeter groups with a tree structure.

The proof of the main results uses the method of diagrams worked out by van Kampen, reopened by R. Lindon and refined by V. N. Bezverkhnii.

Keywords: Coxeter group, algorithmic problems, tree product of groups, diagram.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

I. V. Dobrynina, 2018, "On problem of generalized conjugation of words in a generalized tree structures of Coxeter groups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 475–488.

1. Введение

Основными алгоритмическими проблемами в теории групп, поставленными М. Дэном [1], являются проблемы равенства, сопряженности слов в конечно определенных группах, а также проблема изоморфизма групп.

Исследование данных проблем послужило развитию комбинаторных методов в теории групп, что явилось причиной возникновения комбинаторной теории групп. В настоящее время имеется целый ряд книг и статей, посвященных данной теме, среди них монографии В. Магнуса, А. Карраса и Д. Солитера [2], а также Р. Линдона и П. Шуппа [3].

П. С. Новиков [4] доказал неразрешимость основных алгоритмических проблем в классе конечно определенных групп. Поэтому алгоритмические проблемы стали изучаться в конкретных группах.

Рассмотрим конечно порожденную группу Кокстера G, заданную копредставлением $G = \langle a_1, \ldots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1,n} \rangle$, где m_{ij} – элементы симметрической матрицы Кокстера: $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}, i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$. В случае $m_{ij} = \infty$ определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет. Из этого определения получаем $a_i^2 = 1$ для всех $i \in J$.

Группы Кокстера введены Х. С. М. Кокстером [5]: всякая группа отражений является группой Кокстера, если в качестве образующих взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник. Х. Кокстер перечислил все группы отражений в трехмерном евклидовом пространстве и доказал, что все они являются группами Кокстера, а всякая конечная группа Кокстера изоморфна некоторой группе отражений в трехмерном евклидовом пространстве, элементы которой имеют общую неподвижную точку.

В алгебраическом аспекте группы Кокстера изучаются с работ Ж. Титса [6], которым решена проблема равенства слов в группах Кокстера.

П. Шуппом [7] показана неразрешимость проблемы вхождения в группах Кокстера.

К. Аппелем и П. Шуппом [8] определен класс групп Кокстера экстрабольшого типа и в нем решена проблема сопряженности слов, позже проблема сопряженности слов была решена в классе групп Кокстера, что отражено в [9].

Так как группы Кокстера экстрабольшого типа являются гиперболическими, то из результатов И. Г. Лысенка [10] следует разрешимость в них проблем вхождения в циклическую подгруппу и извлечения корня.

Группы Кокстера с древесной структурой введены В. Н. Безверхним. В графе, соответствующем группе Кокстера, всегда можно выделить максимальный подграф, соответствующий группе Кокстера с древесной структурой. В данном классе групп В. Н. Безверхним и О. В. Инченко решен ряд алгоритмических проблем [11].

В статье доказывается алгоритмическая разрешимость проблем корня и степенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера, представляющих собой древесные произведения групп Кокстера экстрабольшого типа и групп Кокстера с древесной структурой.

2. Диаграммы над обобщенными древесными структурами групп Кокстера

Рассмотрим конечно порожденную группу Кокстера, заданную копредставлением $G = \langle a_1, \ldots, a_n; (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1,n} \rangle$, где m_{ij} – элементы симметрической матрицы Кокстера: $m_{ii} = 1$, $m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}, i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$. В случае $m_{ij} = \infty$ определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет.

Если $m_{ij} > 3$, $i \neq j$, то G называется группой Кокстера экстрабольшого типа [8].

Построим для группы Кокстера G граф Γ такой, что образующим a_i поставим в соответствие вершины графа Γ, а каждому определяющему соотношению $(a_ia_j)^{m_{ij}}=1$ – ребро, соединяющее a_i и a_j, $i\neq j$. Если при этом получится дерево-граф Γ, то группа G называется группой Кокстера с древесной структурой [12].

Группа Кокстера с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам: от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ij}=\langle a_i,a_j;a_i^2,a_j^2,(a_ia_j)^{m_{ij}}\rangle$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} — циклическую подгруппу $\langle a_j;a_j^2\rangle$.

Далее в статье будем рассматривать группу Кокстера

$$G=\langle\prod_{s=1}^{t}*G_s;a_{i_m}=a_{j_l},i\neq j,i,j\in\{\overline{1,t}\}\rangle, \tag{1}$$

представляющую собой древесное произведение групп Кокстера G_s, где G_s либо группа Кокстера с древесной структурой, либо группа Кокстера экстрабольшого типа, запись $a_{i_m}=a_{j_l}$ означает, что объединение групп Кокстера G_i и G_j ведется по циклической подгруппе второго порядка $\langle a_{i_m};a_{i_m}^2\rangle$ ($\langle a_{j_l};a_{j_l}^2\rangle$), где a_{i_m} – некоторый образующий группы G_i, a_{j_l} – некоторый образующий группы G_j. Такую группу Кокстера G также будем называть обобщенной древесной структурой групп Кокстера.

Пусть $F_i=\langle a_i;a_i^2\rangle$, $F=\prod\limits_{i=1}^{n}*F_i$ – свободное произведение циклических групп порядка 2. Отождествим каждый образующий a_i группы F с его обратным a_i^{-1}. Слово $w=a_{i_1}\dots a_{i_n}$ группы F является приведенным, если индексы рядом стоящих букв a_{i_j} и $a_{i_{j+1}}$ записи w различны, длина w равна n. Далее считаем, что $i\neq j$, $m_{ij}<\infty$. Обозначим через F_{ij} группу $F_{ij}=F_i*F_j$. Если $r_{ij}=(a_ia_j)^{m_{ij}}$, то в F_{ij} существуют две перестановки r_{ij}: $r_{ij}=(a_ia_j)^{m_{ij}}$ и $r_{ji}=(a_ja_i)^{m_{ij}}$.

Лемма 1. *[12] Пусть w – циклически приведенное слово в F_{ij}, $w\neq 1$ в F_{ij} и $w=1$ в G_{ij}. Тогда $|w|=2m_{ij}k,k\in\mathbb{N}$, и $w=r_{ij}^k$ или $w=r_{ji}^k$.*

Обозначим через R_{ij} – множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произвдении F_{ij} и равных 1 в группе G_{ij}. Группу Кокстера G_{ij} можно задать как $G_{ij}=\langle a_i,a_j;a_i^2,a_j^2,R_{ij}\rangle$.

В дальнейшем под R будем понимать $R=\bigcup\limits_{i,j\in\{\overline{1,n}\}}R_{ij}$ – симметризованное подмножество свободного произведения F. Пусть w – нетривиальное циклически приведенное в F слово, равное 1 в G, то есть $w\in\langle R\rangle^F$, где $\langle R\rangle^F$ – нормальное замыкание симметризованного множества R в свободном произведении F. Тогда из теоремы ван Кампена [3] следует, что существует R-диаграмма M с граничным циклом $\gamma=\partial M$, меткой которого является слово w, $\varphi(\gamma)=w$, и с метками областей $D\subset M$ из R_{ij}. Будем называть такую R-диаграмму M R-диаграммой M над G, а ее области – R_{ij}-диаграммами.

Подвергнем R-диаграмму M следующему преобразованию.

Если две области D_1,D_2 являются одновременно R_{ij}-диаграммами, пересекаются по ребру с меткой $\varphi(\partial D_1\cap\partial D_2)$, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D. Допустим, что каждая из областей D_1,D_2 есть R_{ij}-диаграмма, D_1,D_2 пересекаются по вершине. Тогда объединяем D_1, D_2 в одну область D. Если в том или другом случае метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F, то, удалив эту область, склеиваем ее границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную в F односвязную R-диаграмму M, инвариантную относительного рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w, причем если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то длина метки этого ребра равна единице.

Аналогично рассматриваются кольцевые R-диаграммы над G.

Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \emptyset$. Символами $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D, $d(D)$ – число ребер в граничном цикле D.

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e, в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D, называется $(s-i)$-областью.

Введем ряд определений, следуя работам [12], [13].

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ – правильная часть M, если $\partial D \cap \partial M$ есть объединение последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \ldots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M.

Граничную область D R-диаграммы M назовем правильной, если $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть.

Определение 1. *Правильная область D R-диаграммы M называется деновской, если $i(D) < d(D)/2$.*

Определение 2. *Удаление внешней границы деновской области R-диаграммы M называется деновским сокращением R-диаграммы M или R-сокращением.*

R-диаграмма M является R-приведенной, если в M выполнены все деновские сокращения.

Слово $w \in G$ назовем R-приводимым (R-сократимым), если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $|b| < |s|$.

Определение 3. *Поддиаграмма $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ образует полосу в R-приведенной R-диаграмме M с граничным циклом $\partial M = \gamma \cup \delta$, если*

1. $\partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i,\ i = \overline{1, n-1}$, *где e_i – ребро ;*

2. $\partial D_i \cap \gamma = \gamma_i,\ i = \overline{1, n}$, *где γ_i – связный путь, причем $|\gamma_i| \geqslant 1$;*

3. $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_1 \backslash (\partial D_1 \cap \gamma)|$ *и* $|\partial D_n \cap \gamma| = |\partial D_n \backslash (\partial D_n \cap \gamma)|$;

4. $|\partial D_j \cap \gamma| + 2 = |\partial D_j \backslash (\partial D_j \cap \gamma)|,\ j = \overline{2, n-1}$.

Определение 4. *Пусть Π – полоса R-диаграммы M. Замену R-диаграммы M на R-диаграмму M_1, полученную из M удалением полосы Π, назовем $\overline{R}$-сокращением.*

R-приведенное слово w группы G назовем $\overline{R}$-приводимым ($\overline{R}$-сократимым), если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \cdots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $1 \leq t \leq n$ $\quad |d_t| = |d_{t+1}| = 1$, $|s_t| = |b_t| + 2$ и для t, $1 < t < n$, $|b_t| = |s_t|$.

Теорема 1. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Кокстера G выяснить, является ли w R-приведенным.*

Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Кокстера G выяснить, является ли w $\overline{R}$-приведенным.

Доказательство очевидно.

Определение 5. *Приведенную связную кольцевую R-диаграмму M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ будем называть однослойной, если*

1) M состоит из областей $D_1, D_2, \dots, D_m$, где $D_j \cap D_{j+1} = e_j, j = \overline{1, m-1}, D_1 \cap D_m = e_m$, $D_j \cap \sigma \neq \emptyset, D_j \cap \tau \neq \emptyset, j = \overline{1, m}$, e_j – ребро,

или

2) $M = (\bigcup\limits_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{p} \gamma_j)$, N_i – поддиаграммы (диски) в M с границами $\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i$, $\sigma_i \cap \tau_i = \{A_i, B_i\}$ – вершины, $i = \overline{1, p}$, γ_i – простые пути с концами $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2, p}$, простой путь γ_1 имеет начало B_p, а конец – A_1, где каждое N_i из состоит из областей $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_{m_i}}$, причем $D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} = e_{i_j}, j = \overline{1, m_i - 1}, D_{i_j} \cap \sigma \neq \emptyset, D_{i_j} \cap \tau \neq \emptyset, j = \overline{1, m_i}$, e_{i_j} – ребро.

Из данного определения имеем, что в случае 1) все области M граничные, каждая пара соседних областей, взятых в циклической последовательности, пересекается по ребру, каждая область пересекает и σ, и τ (пересечением может быть вершина, одно или несколько ребер). В случае 2) имеем простую кольцевую R-диаграмму, то есть R-диаграмму, в которой $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$. Пути γ_i, по которым пересекаются σ, τ, отделяют поддиаграммы (диски), причем заметим, что эти пути, в том числе, могут иметь нулевую длину (быть вершиной).

Аналогично определяются однослойные односвязные диаграммы:

Определение 6. *Приведенную односвязную R-диаграмму M равенства слов u, v с границей $\partial M = \gamma \cup \delta, \varphi(\gamma) = u, \varphi(\delta) = v^{-1}$, будем называть однослойной, если*

1) M состоит из областей $D_1, D_2, \dots, D_m$, где $D_j \cap D_{j+1} = e_j, j = \overline{1, m-1}$, $D_j \cap \gamma \neq \emptyset, D_j \cap \delta \neq \emptyset, j = \overline{1, m}$, e_j – ребро,

или

2) $M = (\bigcup\limits_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup\limits_{j=2}^{p} \vartheta_j)$, N_i – поддиаграммы (диски) в M с границами $\partial N_i = \gamma_i \cup \delta_i$, $\gamma_i \cap \delta_i = \{A_i, B_i\}$ – вершины, $i = \overline{1, p}$, ϑ_i – простые пути с концами $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2, p}$, где каждое N_i состоит из областей $D_{i_1}, D_{i_2}, \dots, D_{i_{m_i}}$, причем $D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} = e_{i_j}, j = \overline{1, m_i - 1}, D_{i_j} \cap \gamma \neq \emptyset$, $D_{i_j} \cap \delta \neq \emptyset, j = \overline{1, m_i}$, e_{i_j} – ребро.

Далее будем рассматривать равенство и сопряженность слов w, v, заданных в нормальной форме [3], то есть $w = w_1 w_2 \dots w_k$, $v = v_1 v_2 \dots v_k$, где $w_l, v_l \in G_{i_l}, l = \overline{1, k}$, G_{i_l} есть либо группа Кокстера с древесной структурой, либо группа Кокстера экстрабольшого типа из представления (1), причем слоги w_l, w_{l+1}, а также v_l, v_{l+1}, принадлежат разным группам из (1), w_l, v_l не являются элементами из объединяемых подгрупп. Заметим, что в случае равенства слов, количество слогов в словах w, v совпадает [3].

Лемма 2. *Пусть M – приведенная односвязная R-диаграмма равенства R и $\overline{R}$-несократимых слов $w, v \in G$ над группой Кокстера G. Тогда M является однослойной.*

Пусть M – приведенная связная кольцевая R-диаграмма сопряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$ над группой Кокстера G, не содержащая $(s-i)$-областей; σ, τ – соответственно внешний и внутренний граничный циклы M, слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ циклически R и $\overline{R}$-несократимы. Тогда M является однослойной.

Доказательство. Пусть $w = v$ и $w = w_1 w_2 \dots w_k, v = v_1 v_2 \dots v_k$, где $w_l, v_l \in G_{i_l}, l = \overline{1, k}$, G_{i_l} есть либо группа Кокстера с древесной структурой, либо группа Кокстера экстрабольшого типа из представления (1), причем w_l, w_{l+1}, а также v_l, v_{l+1}, принадлежат разным группам из (1) и не являются элементами из объединяемых подгрупп. По теореме ван Кампена [3] существует R - диаграмма M равенства слов $w = v$ над G такая, что $\partial M = \gamma \cup \delta$, $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v^{-1}$, $\varphi(\partial M) = \varphi(\gamma)\varphi(\delta) = wv^{-1}$. Имеем $w_1 w_2 \dots w_k = v_1 v_2 \dots v_k$.

Рассмотрим слова w_1, v_1. Пути с метками v_1 и w_1 выходят из одной точки, v_1, w_1 из G_{i_1}. Допустим, что концы этих путей не совпадают, тогда существует кратчайший путь с меткой u такой, что метка граничного цикла поддиаграммы в M имеет вид $u^{-1}v_1^{-1}w_1$, где $u^{-1}v_1^{-1}w_1 = 1$, то есть $v_1^{-1}w_1 = u, u \in G_{i_1}$. Если $v = w$, то по теореме 2.6, а также лемме 2.3 из [3], единственно возможными случаями для равенства слов v и w в рассматриваемом классе групп являются случаи, когда u равно 1 или u равно a_{i_1}, где $\langle a_{i_1}; a_{i_1}^2\rangle$ – объединяемая подгруппа для G_{i_1} и G_{i_2}. Получаем, что либо $w_1 = v_1$, либо $w_1 = v_1 a_{i_1}$.

1. Допустим, что $w_1 = v_1$, где $w_1, v_1 \in G_{i_1}$, тогда поддиаграмма диаграммы M с граничной меткой $v_1^{-1}w_1$ $(v_1^{-1}w_1 = 1)$ является R_{i_1} - диаграммой M_1 равенства слов $w_1 = v_1$ над G_{i_1}, причем $R_{i_1} \subset R$ и является объединением R_{ij} из G_{i_1}; $\partial M_1 = \gamma_1 \cup \delta_1$, $\varphi(\gamma_1) = w_1$, $\varphi(\delta_1) = v_1^{-1}$, $\varphi(\partial M_1) = \varphi(\gamma_1)\varphi(\delta_1) = w_1 v_1^{-1}$. Из работ [12], [13] имеем, что данная диаграмма является однослойной.

2. Если $w_1 = v_1 a_{i_1}$, где $\langle a_{i_1}; a_{i_1}^2\rangle$ – объединяемая подгруппа для G_{i_1} и G_{i_2}, то поддиаграмма диаграммы M с граничной меткой $a_{i_1}v_1^{-1}w_1$ $(a_{i_1}v_1^{-1}w_1 = 1)$ является R_{i_1}- диаграммой M_1 равенства слов $w_1 = v_1 a_{i_1}$ в G_{i_1}, $\partial M_1 = \gamma_1 \cup \delta_1$, $\varphi(\gamma_1) = w_1$, $\varphi(\delta_1) = a_{i_1}v_1^{-1}$, $\varphi(\partial M_1) = \varphi(\gamma_1)\varphi(\delta_1) = w_1 a_{i_1} v_1^{-1}$. Из работ [12], [13] имеем, что M_1 является однослойной.

Далее для случая 1 в G имеем равенство слов $w_2 \dots w_k = v_2 \dots v_k$. Для w_2, v_2 также возможны два случая:

а) $w_2 = v_2$, где $w_2, v_2 \in G_{i_2}$. Тогда поддиаграмма диаграммы M с граничной меткой $v_2^{-1}w_2$ является R_{i_2} -диаграммой M_2 равенства слов $w_2 = v_2$ над G_{i_2}, M_2 однослойна, как следует из [12], [13], и связана вершиной с M_1. Далее рассматриваем равенство слов $w_3 \dots w_k = v_3 \dots v_k$.

б) $w_2 = v_2 a_{i_2}$, где $\langle a_{i_2}; a_{i_2}^2\rangle$ – объединяемая подгруппа для G_{i_2} и G_{i_3}, тогда поддиаграмма диаграммы M с граничной меткой $a_{i_2}v_2^{-1}w_2$ есть R_{i_2}-диаграмма M_2 равенства слов $w_2 = v_2 a_{i_2}$ над G_{i_2}, $\partial M_2 = \gamma_2 \cup \delta_2$, $\varphi(\gamma_2) = w_2$, $\varphi(\delta_2) = a_{i_2}v_2^{-1}$, причем $R_{i_2} \subset R$ и является объединением R_{ij} из G_{i_2}. Из работ [12], [13] имеем, что данная диаграмма является однослойной. M_2 связана вершиной с M_1. Далее рассматриваем равенство слов $w_3 \dots w_k = a_{i_2}v_3 \dots v_k$. И так далее.

В случае 2 рассмотрим равенство $w_2 \dots w_k = a_{i_1}v_2 \dots v_k$ и слова $w_2, a_{i_1}v_2$. Для них возможны два случая:

а) $w_2 = a_{i_1}v_2$. Тогда подддиаграмма диаграммы M с граничной меткой $v_2^{-1}a_{i_1}w_2$ есть R_{i_2}-диаграмма M_2 равенства слов $w_2 = a_{i_1}v_2$ над G_{i_2}. Она является однослойной и будет иметь общее ребро с меткой a_{i_2} с M_1. Далее рассматриваем равенство слов $w_3 \dots w_k = v_3 \dots v_k$.

б) $w_2 = a_{i_1}v_2 a_{i_2}$. Рассматриваем R_{i_2}-диаграмму M_2 равенства слов $w_2 = a_{i_1}v_2 a_{i_2}$ над G_{i_2}. Она является однослойной и имеет общее ребро с меткой a_{i_1} с M_1. Далее рассматриваем равенство слов $w_3 \dots w_k = a_{i_2}v_3 \dots v_k$.

Продолжая рассуждения, аналогичные изложенным выше, получаем строение R- диаграммы M над G с граничным циклом $\partial M = \gamma \cup \delta$, $\varphi(\gamma) = w$, $\varphi(\delta) = v^{-1}$, $\varphi(\partial M) = \varphi(\gamma)\varphi(\delta) = wv^{-1}$, удовлетворяющей условиям леммы.

Таким образом, приведенная односвязная R-диаграмма M равенства R и $\overline{R}$-несократимых слов $w, v \in G$ над группой Кокстера G является однослойной.

Рассмотрим случай, когда M – приведенная связная кольцевая R-диаграмма сопряженности слов w, v, для которой выполнены условия леммы. Пусть $z^{-1}wz = v$, $w = w_1 w_2 \dots w_k$, где $w_l, v_l \in G_{i_l}, l = \overline{1,k}$, G_{i_l} есть либо группа Кокстера с древесной структурой, либо группа Кокстера экстрабольшого типа из представления (1). На основании теоремы 2.8 из работы [3] получаем, что любое циклически приведенное слово, сопряженное w, является циклической перестановкой элементов $w_1, w_2, \dots, w_k$, и последующим сопряжением словом из объединяемой подгруппы. Тогда слово $v = v_1 v_2 \dots v_k$ должно быть равно слову $h^{-1}w_{t+1} \dots w_k w_1 \dots w_t h$, где $h = 1$, либо $h = a_{i_t}$, a_{i_t} принадлежит объединяемой подгруппе $\langle a_{i_t}; a_{i_t}^2\rangle$ для $G_{i_t}, G_{i_{t+1}}$. Поэтому равенство $z^{-1}wz = v$ должно сводится к равенству слов $h^{-1}w_{t+1} \dots w_k w_1 \dots w_t h = v_1 v_2 \dots v_k$. Диаграмма равенства слов $h^{-1}w_{t+1} \dots w_k w_1 \dots w_t h$ и $v_1 v_2 \dots v_k$ имеет такое же строение, как рассмотрено выше. Склеивая ее по ребру с меткой $h = a_{i_t}$, либо по вершине, соответствующей $h = 1$, получаем диаграмму сопряженности слов w, v. В полученной диаграмме все вершины являются граничными, а любая область пересекает и σ, и τ, где $\varphi(\sigma) = w$, $\varphi(\tau) = v$. Поэтому приведенная связная кольцевая R-диаграмма M сопряженности слов, удовлетворяющая условию леммы, является однослойной.

Из строения рассмотренных диаграмм и теоремы 1 легко показать справедливость для группы G известных для групп Кокстера результатов о разрешимости проблем равенства и сопряженности слов.

3. Проблема корня

Теорема 2. *[14] Слово w группы Кокстера экстрабольшого типа имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда оно сопряжено с некоторым словом $w' \in G_{ij} = \langle a_i, a_j; (a_i a_j)^{m_{ij}}, a_i^2, a_j^2 \rangle$.*

Теорема 3. *[15] Слово w группы Кокстера с древесной структурой имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда оно сопряжено с некоторым словом $w' \in G_{ij} = \langle a_i, a_j; (a_i a_j)^{m_{ij}}, a_i^2, a_j^2 \rangle$.*

Далее рассмотрим следующий результат:

Теорема 4. *[3] Каждый элемент конечного порядка в свободном произведении с объединением $K *_U H$ сопряжен с некоторым элементом конечного порядка в K или H.*

Из теоремы 4 получаем утверждение для обобщенных древесных структур групп Кокстера:

Теорема 5. *Слово w обобщенной древесной структуры групп Кокстера G имеет конечный порядок тогда и только тогда, когда оно сопряжено с некоторым словом $w' \in G_{ij} = \langle a_i, a_j; (a_i a_j)^{m_{ij}}, a_i^2, a_j^2 \rangle$.*

Теорема 6. *[16]. Пусть G – древесное произведение групп*

$$G = \left\langle \prod_{s=1}^{n} *G_s;\ \psi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji} \right\rangle,$$

объединенных по изоморфным подгруппам $U_{ij} < G$ и $U_{ji} < G$ с помощью фиксированного набора конструктивных изоморфизмов ψ_{ji}: $\psi_{ji}(U_{ij}) = U_{ji}$. Тогда, если подгруппы U_{ij} и U_{ji} обладают условием максимальности и в сомножителях разрешимы:

1. *проблема вхождения;*
2. *проблема пересечения классов смежности любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$;*
3. *существует алгоритм, выписывающий образующие пересечения любой конечно порожденной подгруппы $H < G_i$ с подгруппой $U_{ij} < G_i$,*

то в группе G разрешима проблема вхождения.

Группа Кокстера с древесной структурой, представленная в виде древесного произведения двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам, удовлетворяет условиям данной теоремы.

Следствие 1. *В группе Кокстера с древесной структурой разрешима проблема вхождения в циклическую подгруппу.*

Теорема 7. *[17] В группе Кокстера экстрабольшого типа разрешима проблема вхождения в циклическую подгруппу.*

Теорема 8. *Пусть слово $w \in G$ имеет бесконечный порядок. Тогда сущесвует слово w_0, сопряженное w либо w^2 в группе G, любая степень которого циклически R и $\overline{R}$-несократима.*

Доказательство. Для доказательства теоремы выберем в качестве w_0 слово минимальной длины, сопряженное с w либо w^2, следующим способом. Так как w имеет бесконечный порядок, то $w \notin G_{ij}$. Пусть

$$w = w'_1 w'_2 \dots w'_n$$

– нормальная форма слова w, где $w'_l \in G_l, G_l$ – либо группа Кокстера с древесной структурой, либо группа Кокстера экстрабольшого типа из (1). Считаем, что w'_1, w'_n принадлежат одной группе из (1). Если это не так, то перейдем к сопряженному слову. Заменим каждое w'_l на минимальное слово w''_l, равное ему в G_l. Это можно сделать в силу разрешимости проблемы равенства слов в G_l. Очевидно, что внутри слов w''_l нет R и $\overline{R}$-сокращений. Запишем слово $w = w''_1 w''_2 \dots w''_n$ на окружности и выполним все возможные $\overline{R}$-сокращения в циклическом слове между слогами. Получим слово w'_0, сопряженное w. При этом возможно, что в циклическом слове w'_0 можно подстроить только первую область полосы так, что в циклическом слове $w_0'^2$ выполнимо $\overline{R}$-сокращение. Выполнив такое сокращение, получим слово w_0, любая степень которого циклически R и $\overline{R}$-несократима.

Определение 7. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема корня, если существует алгоритм, позволяющий для любого $w \in G$ установить, существуют ли $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и $x \in G$ такие, что $x^n = w$.*

Теорема 9. *В обобщенных древесных структурах групп Кокстера разрешима проблема корня.*

Доказательство. Пусть $(w)^n = v$. Если элементы w, v имеют конечный порядок, то доказательство очевидно в силу теоремы 5. Возьмем в рассматриваемой группе Кокстера G элементы бесконечного порядка, причем $w^n = v$. Отсюда $w^{2n} = v^2$. Заменим w^2 на сопряженное с ним циклически R и $\overline{R}$-несократимое слово w_0 в соответствии с теоремой 8. Получим $w_0^n = z^{-1}v^2z$. Заменим $z^{-1}v^2z$ равным ему в группе G R и $\overline{R}$-несократимым словом v_0. Тогда существует приведенная односвязная однослойная (по лемме 2) R-диаграмма M равенства слов $w_0^n = v_0$ такая, что $\partial M = \gamma \cup \delta$, $\varphi(\gamma) = w_0^n$, $\varphi(\delta) = v_0^{-1}$, $\varphi(\partial M) = \varphi(\gamma)\varphi(\delta) = w_0^n v_0^{-1}$, причем число областей, граничащих с γ и δ, одинаково. Пусть r_0 – самое длинное слово из R, а p – число областей, выходящих на γ и δ. Количество ребер, принадлежащих γ не превосходит $|v_0|$, количество вершин не превосходит $|v_0| + 1$, тогда $p < |v_0| + |v_0| + 1 = 2|v_0| + 1$. Имеем $n < p|r_0| < (2|v_0| + 1)|r_0|$, то есть $n < (2|v_0| + 1)|r_0|$. В силу разрешимости проблемы равенства слов в группе G получаем разрешимость проблемы корня.

Заметим, что из доказательства теоремы также следует разрешимость *проблемы вхождения в циклическую подгруппу* для группы Кокстера G.

4. Проблема степенной сопряженности слов

Определение 8. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема степенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых слов $w, v \in G$ установить, существуют ли ненулевые целые числа n, m такие, что слова w^n, v^m сопряжены в группе G.*

Теорема 10. *В обобщенных древесных структурах групп Кокстера разрешима проблема степенной сопряженности слов.*

Доказательство. Если $w = x$, $x \in \{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$, то из результатов работ [12], [18] следует, что $v = y$, $y \in \{a_i\}$, $i = \overline{1,n}$, R-диаграмма сопряженности этих слов состоит из $(s-i)$-областей и доказательство теоремы сводится к решению проблемы сопряженности слов.

Если одно из слов w, v имеет конечный порядок, то решение проблемы степенной сопряженности для этих слов следует из теорем 4-5.

Пусть слова w, v имеют бесконечный порядок. Если необходимо, перейдем от слов w, v к сопряженным с ними или их квадратами словам w_0, v_0, любая степень которых циклически R и $\overline{R}$-несократима, на основании теоремы 8. Рассмотрим приведенную R-диаграмму M сопряженности слов w_0^n, v_0^m с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$, причем $\varphi(\sigma) = w_0^n, \varphi(\tau) = v_0^{-m}$. Считаем m, n минимальными, то есть из M нельзя вырезать поддиаграмму, замкнув которую в кольцо, получим R-диаграмму степенной сопряженности слов w_0, v_0. Покажем, что числа m, n можно ограничить. Рассмотрим сначала случай, когда $|w_0| = |v_0|$.

Общий случай сводится к данному при рассмотрении соответствующих минимальных степеней w_0, v_0, для которых выполняется условие равенства длин.

Рассмотрим случай непростой кольцевой R-диаграммы, которая по лемме 2 является однослойной. Заметим, что между любыми двумя областями, имеющими на $\sigma(\tau)$ на два ребра меньше, чем на $\tau(\sigma)$ содержится область, имеющая на $\sigma(\tau)$ на два ребра больше, чем на $\tau(\sigma)$, так как в противном случае, в M содержится полоса. Кроме того, в R-диаграмме не может быть только одна область, имеющая на $\sigma(\tau)$ на два ребра больше, чем на $\tau(\sigma)$, поскольку склеив два экземпляра R-диаграммы M, получим $\overline{R}$-сократимость квадрата граничной метки M, что невозможно.

Допустим, что существует область D_1: $|\varphi(\partial D_1 \cap \sigma)| = |\varphi(\partial D_1 \cap \tau)| + 2$.

Пусть w_0^* – циклическая перестановка слова w_0, причем $\varphi(\partial D_1 \cap \sigma)$ – начало слова w_0^*. Рассмотрим поддиаграмму $L = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_r$ с минимальным r такую, что w_0^* является подсловом слова $u = \varphi(\partial L \cap \sigma)$. Возможны следующие случаи:

1. $|w_0| = |u|$.

1.1. Пусть $|\partial(D_{r+1}) \cap \sigma| > 1$. Наклеим область D_1 по границе σ на область D_{r+1}. Тогда слова $\varphi(D_1)$ и $\varphi(D_{r+1})$ взаимно обратны. Следовательно, $\varphi(\partial D_1 \cap \sigma) = \varphi(\partial D_{r+1} \cap \sigma), \varphi(\partial D_1) = = \varphi(\partial D_{r+1})$. Обозначим через D_0 область, предшествующую D_1. Имеем $\varphi(\partial D_0 \cap \partial D_1) = = \varphi(\partial D_r \cap \partial D_{r+1})$. Склеим ребра $\partial D_0 \cap \partial D_1, \partial D_r \cap \partial D_{r+1}$ поддиаграммы L. Получим сопряженность w_0^*, v_0^*, и, следовательно, сопряженность w_0, v_0.

1.2. Пусть $|\partial(D_{r+1}) \cap \sigma| = 1$, то есть D_{r+1} имеет с σ общее ребро. Наклеим область D_1 по границе σ на области D_{r+1}, D_{r+2}. Тогда есть внутренняя вершина степени не меньше 3, что невозможно.

1.3. Пусть $|\partial(D_{r+1}) \cap \sigma| < 1$, то есть D_{r+1} имеет с σ только общую вершину. Заметим, что невозможен случай, когда $|\partial(D_1) \cap \tau| < 1$. Действительно, наклеив область D_1 по границе σ на область D_{r+2}, получим, что слова $\varphi(D_1)$ и $\varphi(D_{r+2})$ взаимно обратны (исключаем случай, когда выделяется внутренняя вершина степени 3) и $\varphi(\partial D_0 \cap \partial D_1) = \varphi(\partial D_{r+1} \cap \partial D_{r+2})$. Пусть $\varphi(\partial D_0 \cap \partial D_1) = b$, тогда $\varphi(\partial D_{r+1} \cap \partial D_{r+2}) = b$. Пусть $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2) = a$, а $\varphi(\partial D_r \cap \partial D_{r+1}) = c$. Тогда в графе Кокстера Γ, соответствующем группе G, должен выделится цикл, в котором задействованы вершины, соответствующие a, b, c из группы Кокстера с древесной структурой, что невозможно. Поэтому $|\partial(D_1) \cap \tau| \geq 1$. Рассматривая области $D_{r+1}, D_r, \ldots, D_1$ вдоль τ и наклеивая D_{r+1} на D_0 проводим рассуждения, аналогичные п. 1.1, получаем сопряженность w_0^*, v_0^* и, следовательно, сопряженность w_0, v_0.

2. $|w_0| < |u|$. Наклеим область D_1 по границе σ на области D_r, D_{r+1}. В данном случае либо метка $\varphi(D_0)$ области D_0, предшествующей D_1, либо метка $\varphi(D_{r+1})$ области D_{r+1} сократимы в F, либо выделяется внутренняя вершина степени не меньше 3, что невозможно.

Если для любой области D: $|\varphi(\partial D \cap \sigma)| = |\varphi(\partial D \cap \tau)|$, то в силу того, что метка каждого ребра есть буква и области пересекаются по одному ребру, получаем $\varphi(\partial D \cap \sigma) = \varphi(\partial D \cap \tau)$.

Таким образом, $w_0 = v_0$ и, следовательно, $w_0 \sim v_0$.

Рассмотрим теперь случай простой кольцевой R-диаграммы.

Лемма 3. *Пусть $M = (\bigcup_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{p} \gamma_j)$ – простая кольцевая R-диаграмма сопряженности циклически $R, \overline{R}$-несократимых слов w_0^n, v_0^m, N_i – поддиаграммы (диски) в M с границами $\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i, \sigma_i \cap \tau_i = \{A_i, B_i\}$ – вершины, $i = \overline{1,p}$, γ_i – простые пути с концами $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2,p}$, простой путь γ_1 имеет начало B_p, а конец – A_1, причем числа m, n – наименьшие с таким свойством. Тогда $|\gamma_i| < |w_0|, i = \overline{1,p}$, и $p \leq |w_0|^2$.*

Доказательство. Допустим, что $|\gamma_i| \geq |w_0|$ при $i = \overline{1,p}$. Тогда циклические перестановки слов w_0, v_0 совпадают и, следовательно, слова w_0, v_0 сопряжены, что невозможно в силу минимальности чисел m, n.

Покажем, что $p \leq |w_0|^2$. Пронумеруем буквы в $w_0, v_0 : w_0 = x_1 x_2 \dots x_{|w_0|}, v_0 = y_1 y_2 \dots y_{|v_0|}$. Среди этих букв могут встретиться одинаковые, но будем рассматривать вхождения этих букв, поэтому считаем буквы, стоящие на разных местах, разными.

Далее рассмотрим метки ребер $e_{i_1} \in \sigma_i$ и $e_{i_2} \in \tau_i$ диаграмм N_i, прилегающих к B_i. Метками ребер e_{i_1} являются буквы x_{i_1}, причем существует не более $|w_0|$ различных букв x_{i_1}. Допустим, что $p > |w_0|$, тогда хотя бы одна из этих букв повторяется. Однако каждая буква повторяться может не более, чем $|v_0|$ раз, поскольку иначе повторится соответствующая метка x_{i_2} ребра e_{i_2} и из M можно вырезать поддиаграмму так, что, замкнув оставшуюся часть в кольцо, получим R-диаграмму, удовлетворяющую условию леммы, а это невозможно в силу минимальности чисел m, n. Итак, $p \leq |w_0||v_0|$. А так как $|w_0| = |v_0|$, то $p \leq |w_0|^2$. Лемма доказана.

Будем считать диск N_i с границей $\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i, \sigma_i \cap \tau_i = \{A_i, B_i\}$ длинным, если он имеет имеет метку $\varphi(\sigma_i)$ такую, что $|\varphi(\sigma_i)| \geq 4|w_0|$ и коротким в противном случае. По лемме 3 в случае, когда все диски R-диаграммы M короткие, числа m, n можно ограничить. Теперь рассмотрим длинный диск N_i. Пусть в диске N_i существут область D_1: $|\varphi(\partial D_1 \cap \sigma_i)| = |\varphi(\partial D_1 \cap \tau_i)| + 2$. Начиная с данной области повторим рассуждения, проведенные для кольцевой R-диаграммы. Получим противоречие с минимальностью чисел m, n. Если в диске N_i для любой области D, за исключением областей, содержащих вершины A_i, B_i, справедливо $|\varphi(\partial D \cap \sigma)| = |\varphi(\partial D \cap \tau)|$, то из приведенных выше рассуждений также получим противоречие с минимальностью чисел m, n. Таким образом, невозможен случай, когда в R-диаграмме M существуют длинные диски.

Теорема доказана.

Заметим, что разрешимость проблемы степенной сопряженности слов для групп Кокстера эктрабольшого типа показана в работе [13], для групп Кокстера с древесной структурой – в работе [19].

5. Заключение

В современной комбинаторной теории групп наиболее трудным является доказательство разрешимости различных алгоритмических проблем, поэтому данное направление считается актуальным и важным.

Результаты, изложенные в статье, направлены на решение алгоритмических проблем в обобщенных древесных структурах групп Кокстера.

Рассмотренный в статье класс групп важен для изучения алгоритмических проблем в группах Кокстера, которые могут либо быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Кокстера, образованные из групп Кокстера с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Кокстера большого или экстрабольшого типов, а также группами Кокстера с n-угольной структурой, либо непосредственно принадлежат к перечисленным классам [11].

Результаты исследования докладывались на Тульском научном алгебраическом семинаре «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп» и Всероссийской конференции «Алгебра и теория алгоритмов», посвященной 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета.

Для решения алгоритмических проблем в обобщенных древесных структурах групп Кокстера применялись современные комбинаторные и геометрические методы исследования, в частности, метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним в части введения $\overline{R}$-сокращений.

Автор выражает благодарность В. Н. Безверхнему за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dehn M. Uber unendliche diskontinuierliche Gruppen // Math. Annal. 1912. Vol. 71. P. 116-144.
2. Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
3. Линдон Р., Шуп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
4. Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества в теории групп // Труды МИАН СССР. 1955. Т. 44. С. 3-143.
5. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. Vol. 35. P. 588-621.
6. Tits J. Groupes simples et geometries associees // Proc. Int. Congress Math. Stocholm. 1962. P. 197-221.
7. Schupp P. Coxeter Groups, 2-Completion, Perimeter Reduction and Subgroup Separability // arXiv math. GR/0203020. 2002. Vol. 1. P. 1-21.
8. Appel K., Schupp P. Artins groups and infinite Coxter groups // Ivent. Math. 1983. Vol. 72. P. 201-220.
9. Bahls P. The isomorphism problem in Coxeter groups. London: Imperial College Press, 2005.
10. Лысенок И. Г. О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп // Известия АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. №4. С. 814-832.
11. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Добрынина И. В., Инченко О. В., Устян А. Е. Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, №4. С. 23-50.
12. Инченко О. В. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, №2. С. 81-90.
13. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа // Дискретная математика. 2008. Т. 20, №3. С. 101-110.
14. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Об элементах конечного порядка в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, №1. С. 13-22.

15. Безверхний В. Н., Инченко О. В. О кручении в группах Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, №1. С. 5-12.

16. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в некоторых классах групп с одним определяющим соотношением // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. Тула. ТГПИ. 1986. С. 3-22.

17. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2004. Т. 10, №1. С. 23-37.

18. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Чебышевский сборник. 2003. Т. 4, №1. С. 10-33.

19. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема степенной сопряженности слов в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т.11. С.63-75.

20. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Дискретная математика. 2005. Т. 17, №3. С. 123-145.

REFERENCES

1. Dehn, M., 1912, “Uber unendliche diskontinuierliche Gruppen“, *Math. Annal.*, vol. 71, pp. 116-144.

2. Magnus, W., Karras, A., Solitar, D., 1974, *Combinatorial group theory*, Nauka, Moscow.

3. Lyndon, R.& Schupp, P., 1980, *Combinatorial group theory*, Mir, Moscow.

4. Novikov, P. S., 1955, “On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory“, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 44, pp. 3–143.

5. Coxeter, H. S. M., 1934, “Discrete groups generated by reflections“, *Ann. Math.*, vol. 35, pp. 588-621.

6. Tits, J., 1962, “Groupes simples et geometries associees“, *Proc. Int. Congress Math. Stocholm*, pp. 197-221.

7. Schupp, P., 2002, “Coxeter Groups, 2-Completion, Perimeter Reduction and Subgroup Separability“, *arXiv math. GR/0203020*, vol. 1, pp. 1–21.

8. Appel, K. & Schupp, P., 1983, “Artins groups and infinite Coxter groups“, *Ivent. Math.*, , vol. 72, pp. 201-220.

9. Bahls, P., 2005, *The isomorphism problem in Coxeter groups*, Imperial College Press, London.

10. Lysenok, I. G. 1990, “On some algorithmic properties of hyperbolic groups,“ *Math. USSR-Izv.*, vol. 35, no. 1, pp. 145-163.

11. Bezverkhnii, V. N., Bezverkhnyaya, N. B., Dobrynina, I. V., Inchenko O. V., Ustyan A. E, 2016, “On algorithmic problems in Coxeter groups“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 17, no. 4, pp. 23–50.

12. Inchenko, O. V., 2005, “Problems of words and conjugacy of words in Coxeter groups with a tree structure“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 6, no. 2, pp. 81-90.

13. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2008, “A solution of the power conjugacy problem for words in the Coxeter groups of extra large type“, *Diskr. Mat.*, vol. 20, no. 3, pp. 101–110.

14. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2003, “On elements of finite order in Coxeter groups of large type“, *Izvestia of Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 9, no. 1, pp. 13-22.

15. Bezverkhnii, V. N. & Inchenko O. V., 2005, “On torsion in Coxeter groups with tree structure“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 6, no. 1, pp. 5-12.

16. Bezverkhnii, V. N., 1986, “Solution of the problem of inclusion in some class of groups with one relation “, *Algorithmic problems of theory of groups and semigroups*, Tula: TSPU, pp. 3-22.

17. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2004, “Solution the problem of occurrence in a cyclic subgroup in the Coxeter groups of large type“, *Izvestia of the Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 10, no. 1, pp. 23-37.

18. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2003,“Solution of the conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type“, *Chebyshevskii Sb.*, , vol. 4, no. 1, pp. 10–33.

19. Bezverkhnii, V. N. & Inchenko O. V., 2005, “Power conjugacy problem for words in Coxeter groups with tree structure“, *Izvestia of Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 11, pp. 63-75.

20. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2005, “Solution of the generalized conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type“, *Diskr. Mat.*, vol. 17, no. 3, pp. 123–145.

Получено 16.04.2018
Принято в печать 17.10.2018