ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-475-487

О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера

Безверхний Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики Академии гражданской защиты МЧС России.
e-mail: Vnbezv@rambler.ru
Добрынина Ирина Васильевна — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета имени Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Аннотация

Основными алгоритмическими проблемами теории групп являются проблемы равенства, сопряженности слов и проблема изоморфизма групп.

В силу неразрешимости данных проблем в классе конечно определенных групп, основные алгоритмические проблемы и их различные обобщения исследуются в конкретных группах.

Группы Кокстера изучаются с 1934 года, а в алгебраическом аспекте – с 1962 года. В них алгоритмически разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов, однако неразрешима проблема вхождения.

В 1983 году К. Аппель и П. Шупп определили класс групп Кокстера экстрабольшого типа. В 2003 году В. Н. Безверхний ввел в рассмотрение группы Кокстера с древесной структурой.

В статье рассматриваются обобщенные древесные структуры групп Кокстера, представляющие собой древесные произведения групп Кокстера экстрабольшого типа и групп Кокстера с древесной структурой.

Обобщенные древесные структуры групп Кокстера, также как группы Кокстера экстрабольшого типа и группы Кокстера с древесной структурой, относятся к гиперболическим группам, поэтому в них решено большинство алгоритмических проблем, в частности, алгоритмически разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.

Авторами статьи предлагается оригинальный метод доказательства алгоритмической разрешимости проблемы обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера. Данный метод использует подход Г. С. Маканина, примененный им для доказательства конечной порожденности нормализатора элемента в группах кос. Кроме того, в данной работе показывается, что централизатор конечно порожденной подгруппы в обобщенной древесной структуре групп Кокстера конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

Ключевые слова: алгоритмические проблемы, группа Кокстера, обобщенная сопряженность, древесное произведение групп, централизатор.

Библиография: 21 названиz.

Для цитирования:

В. Н. Безверхний, И. В. Добрынина О проблеме обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 475–487.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 2

UDC 512.54 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-475-487

On problem of generalized conjugation of words in a generalized tree structures of Coxeter groups

Bezverkhnii Vladimir Nikolaevich — doctor of physico-mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of mathematics of civil defence Academy EMERCOM of Russia.
e-mail: Vnbezv@rambler.ru

Dobrynina Irina Vasiljevna — doctor of physico-mathematical Sciences, associate professor, Professor of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry of Tula State Lev Tolstoy University.
e-mail: dobrynirina@yandex.ru

Abstract

The main algorithmic problems of group theory are the problems of words, conjugacy of words and the problem of isomorphism of groups.

This algorithmic problems in the class of finitely presented groups are unsolvable. So the main algorithmic problems and their various generalizations are studied in certain classes of groups.

Coxeter groups have been studied since 1934, and in the algebraic aspect - since 1962.

The problems of words and conjugacy of words are algorithmically solvable in these groupss but the problem of occurrence is unsolvable. K. Appel and P. Schupp defined the class of Coxeter groups extra- large type in 1983. V. N. Bezverhny defined the Coxeter groups with a tree structure in 2003.

The article discusses the generalized tree structures of Coxeter groups, which are the tree product of Coxeter groups of extra large type and Coxeter groups with a tree structure.

The generalized tree structure of Coxeter groups, as well as the Coxeter group of extra large type, and a Coxeter group with a tree structure, refer to hyperbolic groups, so most of algorithmic problems algorithmically solvable, in particular, the problem of generalized conjugacy of words.

The authors propose In this paper an original method for proving algorithmic solvable of the problem of generalized conjugacy of words in tree structures of Coxeter groups. This method uses G. S. Makanin's approach applied by Him to prove the finite generation of the normalizer of an element in braid groups. In addition, in this paper we show that the centralizer of a finitely generated subgroup in a generalized wood structure of Coxeter groups is finitely generated and there is an algorithm writing out its generators.

Keywords: algorithmic problems, Coxeter group, generalized conjugation, tree product of groups, centralizer.

Bibliography: 21 titles.

For citation:

V. N. Bezverkhnii, I. V. Dobrynina, 2018, "On problem of generalized conjugation of words in a generalized tree structures of Coxeter groups", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 475–487.

1. Введение

М. Дэном [1] в начале прошлого века сформулировал основные алгоритмические проблемы теории групп: проблемы равенства, сопряженности слов и проблему изоморфизма групп в конечно определенных группах.

Доказательство П. С. Новиковым [2] неразрешимости основных алгоритмических проблем в классе конечно определенных групп привело к изучению алгоритмических проблем в конкретных группах.

Пусть G – конечно порожденная группа Кокстера с копредставлением

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n;\, (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1, n}\rangle,$$

где m_{ij} – элементы симметрической матрицы Кокстера:

$$m_{ii} = 1,\, m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}, i, j = \overline{1, n},\, i \neq j.$$

Если $m_{ij} = \infty$, то определяющее соотношение между образующими a_i, a_j отсутствует. Данное определение дает $a_i^2 = 1$ для всех $i \in J$.

Известно [3], что всякая группа отражений является группой Кокстера, если в качестве образующих взять отражения относительно гиперплоскостей, ограничивающих ее фундаментальный многогранник.

Ж. Титс [4] доказал алгоритмическую разрешимость проблемы равенства слов в группах Кокстера.

П. Шуппом [5] показана неразрешимость проблемы вхождения в группах Кокстера.

К. Аппель и П. Шупп [6] в 1983 году решили проблему сопряженности слов в классе групп Кокстера экстрабольшого типа.

В настоящее время проблема сопряженности слов решена в классе групп Кокстера [7].

В. Н. Безверхний ввел в расмотрение группы Кокстера с древесной структурой. Очевидно, что в графе, соответствующем группе Кокстера, всегда выделяется максимальный подграф, соответствующий группе Кокстера с древесной структурой [8].

В статье рассматриваются обобщенные древесные структуры групп Кокстера, представляющие собой древесные произведения групп Кокстера экстрабольшого типа и групп Кокстера с древесной структурой.

Обобщенные древесные структуры групп Кокстера, также как группы Кокстера экстрабольшого типа и группы Кокстера с древесной структурой, относятся к гиперболическим группам, поэтому в них решено большинство алгоритмических проблем (например, [9]), в частности, алгоритмически разрешима проблема обобщенной сопряженности слов [10].

Авторами статьи предлагается оригинальный метод доказательства алгоритмической разрешимости проблемы обобщенной сопряженности слов в обобщенных древесных структурах групп Кокстера. Данный метод использует подход Г. С. Маканина [11], примененный им для доказательства конечной порожденности нормализатора элемента в группах кос, и технику В. Н. Безверхнего [12]. Кроме того, в данной работе показывается, что централизатор конечно порожденной подгруппы в обобщенной древесной структуре групп Кокстера конечно порожден и существует алгоритм, выписывающий его образующие.

2. Централизатор конечно порожденной подгруппы

Рассмотрим конечно порожденную группу Кокстера, заданную копредставлением

$$G = \langle a_1, \ldots, a_n;\, (a_i a_j)^{m_{ij}}, i, j = \overline{1, n}\rangle,$$

где m_{ij} – элементы симметрической матрицы Кокстера:

$$m_{ii} = 1,\, m_{ij} \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \cup \{\infty\}, i, j = \overline{1,n},\, i \neq j.$$

В случае $m_{ij} = \infty$ определяющего соотношения между образующими a_i, a_j нет.

Известно, что в группах Кокстера разрешима проблемы равенства и сопряженности слов. Обобщением проблемы сопряженности слов является проблема обобщенной сопряженности слов.

Определение 1. *Будем говорить, что в группе G разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, если существует алгоритм, позволяющий для любых двух конечных множеств слов $\{w_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,n}}$ из G установить, существует ли такое $z \in G$, что $\&_{i=1}^{n}(z^{-1}w_i z = v_i)$.*

Группа Кокстера называется группой Кокстера экстрабольшого типа, если $m_{ij} > 3$ для любых $i \neq j$. Данный класс групп в 1983 году выделен К. Аппелем и П. Шуппом.

Для всякой группы Кокстера G можно построить граф Γ такой, что образующим a_i соответствуют вершины графа Γ, а каждому определяющему соотношению $(a_i a_j)^{m_{ij}} = 1$ – ребро, соединяющее a_i и a_j, $i \neq j$. Если при этом получится дерево-граф Γ, то группа G называется группой Кокстера с древесной структурой.

Данный класс групп введен в рассмотрение В. Н. Безверхним в 2003 году.

Группа Кокстера с древесной структурой может быть представлена как свободное произведение двупорожденных групп Кокстера, объединенных по конечным циклическим подгруппам: от графа Γ группы G перейдем к графу $\overline{\Gamma}$ так, что вершинам графа $\overline{\Gamma}$ поставим в соответствие группы Кокстера на двух образующих $G_{ij} = \langle a_i, a_j; a_i^2, a_j^2, (a_i a_j)^{m_{ij}} \rangle$, а всякому ребру $\overline{e}$, соединяющему вершины, соответствующие G_{ij} и G_{jk} – циклическую подгруппу $\langle a_j; a_j^2 \rangle$.

Рассмотрим группу Кокстера

$$G = \langle \prod_{s=1}^{t} {*G_s}; a_{i_m} = a_{j_l}, i \neq j, i, j \in \{\overline{1,t}\} \rangle,$$

представляющую собой древесное произведение групп Кокстера G_s, где G_s либо группа Кокстера с древесной структурой, либо группа Кокстера экстрабольшого типа, запись $a_{i_m} = a_{j_l}$ означает, что объединение групп Кокстера G_i и G_j ведется по циклической подгруппе второго порядка $\langle a_{i_m}; a_{i_m}^2 \rangle$ ($\langle a_{j_l}; a_{j_l}^2 \rangle$), где a_{i_m} – некоторый образующий группы G_i, a_{j_l} – некоторый образующий группы G_j.

Такую группу Кокстера G будем называть обобщенной древесной структурой групп Кокстера.

Введем ряд понятий, следуя работе [13].

Пусть $F_i = \langle a_i; a_i^2 \rangle$, $F = \prod\limits_{i=1}^{n} {*F_i}$ – свободное произведение циклических групп порядка 2. Отождествим каждый образующий a_i группы F с его обратным a_i^{-1}. Слово $w = a_{i_1} \ldots a_{i_n}$ группы F является приведенным, если индексы рядом стоящих букв a_{i_j} и $a_{i_{j+1}}$ записи w различны, длина w равна n. Далее считаем, что $i \neq j$, $m_{ij} < \infty$. Обозначим через F_{ij} группу $F_{ij} = F_i * F_j$.

Обозначим через R_{ij} множество всех нетривиальных слов, циклически приведенных в свободном произвдении F_{ij} и равных 1 в группе G_{ij}.

В дальнейшем под R будем понимать $R = \bigcup\limits_{i,j \in \{\overline{1,n}\}} R_{ij}$ – симметризованное подмножество свободного произведения F.

Пусть w – нетривиальное циклически приведенное в F слово, равное 1 в G, то есть $w \in \langle R\rangle^F$, где $\langle R\rangle^F$ – нормальное замыкание симметризованного множества R в свободном произведении F. Тогда из теоремы ван Кампена [14] следует, что существует R-диаграмма M с граничным циклом $\gamma = \partial M$, меткой которого является слово w, $\varphi(\gamma) = w$, и с метками областей $D \subset M$ из R_{ij}. Будем называть такую R-диаграмму M R-диаграммой M над G, а ее области – R_{ij}-диаграммами.

Подвергнем R-диаграмму M следующему преобразованию.

Если две области D_1, D_2 являются одновременно R_{ij}-диаграммами, пересекаются по ребру с меткой $\varphi(\partial D_1 \cap \partial D_2)$, то, стирая это ребро, объединим D_1, D_2 в одну область D. Допустим, что каждая из областей D_1, D_2 есть R_{ij}-диаграмма, D_1, D_2 пересекаются по вершине. Тогда объединяем D_1, D_2 в одну область D. Если в том или другом случае метка границы полученной области равна единице в свободном произведении F, то, удалив эту область, склеиваем ее границу. Таким образом, через конечное число шагов мы получим приведенную в F односвязную R-диаграмму M, инвариантную относительного рассмотренного преобразования с граничной меткой, равной w, причем если две области D', D'' из M пересекаются по ребру, то длина метки этого ребра равна единице.

Аналогично рассматриваются кольцевые R-диаграммы над G.

Область $D \subset M$ назовем граничной, если $\partial M \cap \partial D \neq \emptyset$. Символами $i(D)$ будем обозначать число внутренних ребер в граничном цикле D, $d(D)$ – число ребер в граничном цикле D.

Область D с граничным циклом $\partial D = e\gamma e^{-1}\delta$, расположенная по обе стороны относительно ребра e, в которой склеенные ребра e и e^{-1} пересекают граничный цикл D, называется $(s-i)$-областью.

Будем говорить, что $\partial D \cap \partial M$ – правильная часть M, если $\partial D \cap \partial M$ есть объединение последовательности $l_1, l_2, \ldots, l_n$ замкнутых ребер, где $l_1, \ldots, l_n$ встречаются в данном порядке в некотором граничном цикле для D и в некотором граничном цикле для M.

Граничную область D R-диаграммы M назовем простой или правильной, если $\partial D \cap \partial M$ есть правильная часть.

Определение 2. *Простая область D R-диаграммы M называется деновской, если $i(D) < d(D)/2$.*

Определение 3. *Удаление деновской области R-диаграммы M, то есть удаление ее граничного пути, называется деновским сокращением R-диаграммы M или R - сокращением.*

R-диаграмма M является R-приведенной, если в M выполнены все деновские сокращения.

Слово $w \in G$ назовем R-приводимым (R-сократимым), если w приведено в F и содержит подслово s, являющееся подсловом некоторого соотношения $r \in R$, $r = sb$, где $|b| < |s|$.

Определение 4. *Поддиаграмма $\Pi = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ образует полосу в R-приведенной R-диаграмме M с граничным циклом $\partial M = \gamma \cup \delta$, если*

1. $\partial D_i \cap \partial D_{i+1} = e_i,\ i = \overline{1, n-1}$, *где e_i – ребро ;*
2. $\partial D_i \cap \gamma = \gamma_i,\ i = \overline{1, n}$, *где γ_i – связный путь, причем $|\gamma_i| \geqslant 1$;*
3. $|\partial D_1 \cap \gamma| = |\partial D_1 \backslash (\partial D_1 \cap \gamma)|$ *и* $|\partial D_n \cap \gamma| = |\partial D_n \backslash (\partial D_n \cap \gamma)|$;
4. $|\partial D_j \cap \gamma| + 2 = |\partial D_j \backslash (\partial D_j \cap \gamma)|,\ j = \overline{2, n-1}$.

Определение 5. *Пусть Π – полоса R-диаграммы M. Замену R-диаграммы M на R-диаграмму M_1, полученную из M удалением полосы Π, назовем $\overline{R}$-сокращением.*

R-приведенное слово w группы G назовем $\overline{R}$-приводимым ($\overline{R}$-сократимым), если в нем можно выделить подслово $s_1 s_2 \cdots s_n$, где каждое s_t содержится в некоторой группе G_{ij} и является подсловом соотношения $s_t^{-1} d_t^{-1} b_t d_{t+1} \in R$, причем при $1 \leq t \leq n$ $\quad |d_t| = |d_{t+1}| = 1$, $|s_t| = |b_t| + 2$ и для t, $1 < t < n$, $|b_t| = |s_t|$.

Теорема 1. *Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Кокстера G выяснить, является ли w R-приведенным.*

Существует алгоритм, позволяющий для любого циклически приведенного слова w группы Кокстера G выяснить, является ли w $\overline{R}$-приведенным.

Доказательство очевидно.

Определение 6. *Приведенную связную кольцевую R-диаграмму M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ будем называть однослойной, если*

1) M состоит из областей $D_1, D_2, \ldots, D_m$, где $D_j \cap D_{j+1} = e_j$, $j = \overline{1, m-1}$, $D_1 \cap D_m = e_m$, $D_j \cap \sigma \neq \emptyset$, $D_j \cap \tau \neq \emptyset$, $j = \overline{1, m}$, e_j – ребро,

или

2) $M = (\bigcup\limits_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{p} \gamma_j)$, N_i – поддиаграммы (диски) в M с границами

$$\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i, \sigma_i \cap \tau_i = \{A_i, B_i\}$$

– вершины, $i = \overline{1, p}$, γ_i – простые пути с концами $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2, p}$, простой путь γ_1 имеет начало B_p, а конец – A_1, где каждое N_i из состоит из областей $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_{m_i}}$, причем $D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} = e_{i_j}, j = \overline{1, m_i - 1}, D_{i_j} \cap \sigma \neq \emptyset, D_{i_j} \cap \tau \neq \emptyset, j = \overline{1, m_i}$, e_{i_j} – ребро.

Из данного определения имеем, что в случае 1) все области M граничные, каждая пара соседних областей, взятых в циклической последовательности, пересекается по ребру, каждая область пересекает и σ, и τ (пересечением может быть вершина, одно или несколько ребер). В случае 2) имеем простую кольцевую R-диаграмму, то есть R-диаграмму, в которой $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$. Пути γ_i, по которым пересекаются σ, τ, отделяют поддиаграммы (диски), причем заметим, что эти пути, в том числе, могут иметь нулевую длину (быть вершиной).

Аналогично определяются односвязные однослойные R-диаграммы:

Определение 7. *Приведенную односвязную R-диаграмму M с границей $\partial M = \sigma \cup \tau$ будем называть однослойной, если*

1) M состоит из областей $D_1, D_2, \ldots, D_m$, где $D_j \cap D_{j+1} = e_j$, $j = \overline{1, m-1}$, $D_j \cap \sigma \neq \emptyset$, $D_j \cap \tau \neq \emptyset$, $j = \overline{1, m}$, e_j – ребро,

или

2) $M = (\bigcup\limits_{i=1}^{p} N_i) \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{p-1} \gamma_j)$, N_i – поддиаграммы (диски) в M с границами

$$\partial N_i = \sigma_i \cup \tau_i, \sigma_i \cap \tau_i = \{A_i, B_i\}$$

– вершины, $i = \overline{1, p}$, γ_i – простые пути с концами $B_{i-1}, A_i, i = \overline{2, p}$, где каждое N_i из состоит из областей $D_{i_1}, D_{i_2}, \ldots, D_{i_{m_i}}$, причем $D_{i_j} \cap D_{i_{j+1}} = e_{i_j}$, $j = \overline{1, m_i - 1}$, $D_{i_j} \cap \sigma \neq \emptyset$, $D_{i_j} \cap \tau \neq \emptyset$, $j = \overline{1, m_i}$, e_{i_j} – ребро.

Лемма 1. *[13] Пусть M – приведенная односвязная R-диаграмма равенства R и $\overline{R}$-несократимых слов $w, v \in G$ над группой Кокстера G. Тогда M является однослойной.*

Пусть M – приведенная связная кольцевая R-диаграмма сопряженности слов $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau) \in G$ над группой Кокстера G, не содержащая $(s-i)$-областей; σ, τ – соответственно внешний и внутренний граничный циклы M, слова $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ циклически R и $\overline{R}$-несократимы. Тогда M является однослойной.

Определение 8. *Кольцевую связную приведенную однослойную R-диаграмму M с граничными циклами σ, τ обобщенной древесной структуры групп Кокстера G, метки которой $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ приведены в F, $\varphi(\sigma)$ – R-приведено и $\overline{R}$-приведено, назовем особо специальной R-диаграммой, если в M существует одна область D такая, что*

$$|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \sigma))| + 2 = |\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \tau))| (|\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \sigma))| = |\varphi(\partial D \setminus (\partial D \bigcap \tau))| + 2),$$

а для остальных областей D' $|\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \bigcap \sigma))| = |\varphi(\partial D' \setminus (\partial D' \bigcap \tau))|$.

Замену слова $\varphi(\sigma)(\varphi(\tau))$ на слово $\varphi(\tau)(\varphi(\sigma))$ назовем специальным кольцевым R-сокращением.

Определение 9. *Будем говорить, что циклически несократимое слово w обобщенной древесной структуры групп Кокстера G является тупиковым, если w циклически R-несократимо, циклически $\overline{R}$-несократимо и к нему неприменимо специальное кольцевое R-сокращение.*

Лемма 2. *Пусть M – связная приведенная минимальная R - диаграмма над обобщенной древесной структурой групп Кокстера G с граничными циклами σ, τ; $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\tau)$ являются тупиковыми. Тогда если $\varphi(\sigma) = x$, то $\varphi(\tau) = y$, где $x, y \in \{a_1, \ldots, a_n\}$, $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ – множество образующих группы G.*

Доказательство следует из работ [16] и [15], где также показано, что такие диаграммы состоят из $(s-i)$-областей.

Теорема 2. *Централизатор конечно порожденной подгруппы H обобщенной древесной структуры групп Кокстера G есть конечно порожденная подгруппа и существует алгоритм, выписывающий образующие централизатора.*

Доказательство. Пусть M – кольцевая R-диаграмма, v – произвольная точка, принадлежащая некоторому замкнутому ребру $e \in M$, $e = e'e''$, $e' \bigcap e'' = v$. Тогда замкнутый путь $l \in M$ с начальной и конечной точкой v: $l = e'^{-1} e_1 \ldots e_n t$, где $t = e'$ либо $t = e''^{-1}$, либо $l = e'' e'_1 \ldots e'_n t'$, где $t' = e'$ либо $t' = e''^{-1}$, назовем циклическим в M, если l гомотопен τ, соответственно σ. Кратчайший из всех циклических путей кольцевой R-диаграммы M, проходящих через некоторую точку v, принадлежащую ребру e, $e \in M$, назовем циклическим геодезическим путем с началом и концом в v.

Пусть u, v – слова, принадлежащие обобщенной древесной структуре групп Кокстера G. Допустим, что слова u, v являются тупиковыми и сопряжены в G. Тогда существует кольцевая связная приведенная R-диаграмма с граничными циклами σ, τ, метками которых являются соответственно слова u, v.

Пусть $u = x$, $x \in \{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ – множество образующих группы G, тогда из леммы 2 следует, что $v = y$, $y \in \{a_i\}$ $i = \overline{1,n}$ и диаграмма сопряженности этих слов состоит из $(s-i)$-областей. Пусть $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_k = \tau$ – граничные циклы R-диаграмм, полученных из $M = M_0$ последовательным удалением $(s-i)$-областей. Но тогда $\varphi(\sigma_i) = x_i$, $x_i \in \{a_i\}_{i=\overline{1,n}}$ и любые два элемента x_{i-1}, x_i, $i = \overline{1,n}$, где $x = x_0$, $x_n = y$ сопряжены в $G_{x_{i-1}x_i}$ максимальным куском определяющего соотношения группы $G_{x_{i-1}x_i}$. Пусть $m = \max\{m_{ij} < \infty|$, m_{ij} – элементы матрицы Кокстера. Тогда, очевидно, длина любого циклического геодезического пути из M заключена в пределах $|u| \leqslant d \leqslant |u| + 2m$.

Пусть слова u, v не являются образующими G. В этом случае u, v будут метками граничных циклов кольцевой R-диаграммы. По лемме 1 M – однослойная диаграмма, то, используя формулу Р. Линдона [3] о числе площадей в односвязной R-диаграмме, получим что длина d циклического геодезического пути заключена в пределах $|u| \leqslant d \leqslant (|u| + |v|)m + 2$.

Пусть теперь $w_1, w_2, \ldots, w_m$ – образующие H, $H < G$; считаем, что $w_1 = w_{10}$ – тупиковое слово и $\forall i$, $i = \overline{2,m}$, $w_i = c_i w_{i0} c_i^{-1}$, где w_{i0} является тупиковым; $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$ – кольцевая связная приведенная R-диаграмма сопряженности слова w_{i0} слову w_{i0}. Введем обозначения: $c = \max\{|c_1|, \ldots, |c_m|\}$, где $|c_1| = 0$, $L = 2(m_0+1)$ и $S(w_i, w_i)$, $i = \overline{1,m}$ – множество слов, длины d_i которых заключены в пределах $|w_{i0}| \leqslant d_i \leqslant 2(|w_{i0}|m + |c| + 1)$.

Рассмотрим следующую последовательность:

$$w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, H_2, \ldots, H_p, w_1^{(p)}, \ldots, w_n^{(p)}, \ldots \tag{1}$$

где $\forall i$, $i = \overline{1,p}$, $H_i^{-1} w_1^{(i-1)} H_i = w_1^{(i)}, \ldots, H_i^{-1} w_n^{(i-1)} H_i = w_n^{(i)}, H_i \in \{a_i\}, w_j^{(s)} \in S(w_j, w_j)$ и является меткой циклического геодезического диаграммы $\Delta(w_{j0}, w_{j0})$, $j = \overline{1,n}, s = \overline{0,p}$, $w_j^{(0)} = c_j w_{j0} c_j^{-1}$.

Последовательность (1) называется базисной. Базисную последовательность (1) назовем фундаментальной, если для $\forall j, s, 0 \leqslant j < s < p$, наборы $(w_1^{(j)}, \ldots, w_n^{(j)})$, $(w_1^{(s)}, \ldots, w_n^{(s)})$ различны и существует целое v, $0 \leqslant v < p$, такое что $w_1^{(v)} = w_1^{(p)}, \ldots, w_n^{(v)} = w_n^{(p)}$.

Лемма 3. *Если последовательность фундаментальная, то слово $H_1 H_2 \ldots H_p H_v^{-1} \ldots H_1^{-1}$ принадлежит централизатору подгруппы H.*

Доказательство очевидно.

Слово $H_1 H_2 \ldots H_p H_v^{-1} \ldots H_1^{-1}$, связанное с фундаментальной последовательностью (1), назовем базисным словом.

Лемма 4. *Если последовательность (1) является фундаментальной базисной последовательностью, то*

$$p \leqslant |S| = |S(w_1, w_1)| \ldots |S(w_n, w_n)|$$

Лемма 5. *Число фундаментальных базисных последовательностей конечно.*

Доказательство очевидно.

Лемма 6. *Пусть $F \in \mathbb{C}_G(H)$, $\mathbb{C}_G(H)$ – централизатор H в G. Тогда существует разбиение F в произведение образующих $F = H_1 H_2 \ldots H_m$, $H_i \in \{a_i\}$ $i = \overline{1,m}$ и базисная последовательность, связанная с данными разбиением F, то есть*

$$w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, H_2, \ldots, H_m, w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(m)}$$

Доказательство. Пусть $F \in \mathbb{C}_G(H)$, $F \neq 1$, тогда имеет место следующая система соотношений
$F^{-1} w_1 F = w_1$, $c_2 F^{-1} c_2^{-1} w_{20} c_2 F c_2^{-1} = w_{20}, \ldots, c_n F^{-1} c_n^{-1} w_{n0} c_n F c_n^{-1} = w_{n0}$.

Пусть $\forall i, i = \overline{2,n}$, $\exists X_i, Y_i, F_i$ такие, что $F \equiv X_i F_i Y_i$ ($\equiv$ – графическое равенство), $c_i = c_i' X_i^{-1} = c_i'' Y_i$. В результате имеем следующие равенства

$$F^{-1} w_1 F = w_1, c_i'' F_i^{-1} c_i'^{-1} w_{i0} c_i' F_i c_i''^{-1} = w_{i0}, i = \overline{2,n},$$

где каждое из слов $c_i' F_i c_i''^{-1}$ несократимо.

Рассмотрим кольцевые приведенные R — приведенные, $\overline{R}$-приведенные R-диаграммы $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$ с граничными циклами $\sigma^{(i0)}$, $\tau^{(i0)}$, где $\varphi(\sigma^{(i0)}) = w_{i0}, \varphi(\tau^{(i0)}) = w_{i0}^{-1}$, $i = \overline{2,n}$ (при $i = 1, w_{10} = w_1$), каждая из которых, соответственно, является диаграммой сопряженности для i-го соотношения.

Обозначим через $O^{(i0)}$ начальную точку на $\sigma^{(i0)}$ и через $O'^{(i0)}$ – начальную точку на $\tau^{(i0)}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда в диаграмме $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$, $i = \overline{1,n}$, содержится путь η_i, $\alpha(\eta_i) = O^{(i0)}$,

$\omega(\eta_i) = O'^{(i0)}$ с $\varphi(\eta_1) = F$, $\varphi(\eta_i) = c'_i F_i c''^{-1}_i$, $i = \overline{2,n}$, где $\alpha(\eta)$, $\omega(\eta)$ – соответственно начало и конец пути η. Пусть $\varphi(\eta_1) = F = H_1^{(1)} H_2^{(1)} \ldots H_{m(1)}^{(1)}$ – разбиение F в диаграмме $\Delta(w_{10}, w_{10})$ на образующие. Тогда $F \equiv X_i F_i Y_i = H_1^{(1)} \ldots H^{(1)}_{\alpha^{(1)}_{(i)}} H^{(1)}_{\alpha^{(1)}_{(i)+1}} \ldots H^{(1)}_{\beta^{(1)}_{(i)}} H^{(1)}_{\beta^{(1)}_{(i)+1}} \ldots H^{(1)}_{m(1)}$, где $X_i = H_1^{(1)} \ldots H^{(1)}_{\alpha^{(1)}_{(i)}}$, $F_i = H^{(1)}_{\alpha^{(1)}_{(i)+1}} \ldots H^{(1)}_{\beta^{(1)}_{(i)}}$, $Y_i = H^{(1)}_{\beta^{(1)}_{(i)+1}} \ldots H^{(1)}_{m(1)}$. С другой стороны, каждое $\varphi(\eta_i) = c'_i F_i c''^{-1}_i$ в соответствующей диаграмме $\Delta(w_{i0}, w_{i0})$ разбивается на образующие $\varphi(\eta_i) = H_1^{(i)} \ldots H^{(i)}_{\alpha^{(1)}_{(i)}} H^{(i)}_{\alpha^{(i)}_{(i)+1}} \ldots H^{(i)}_{\beta^{(i)}_{(i)}} H^{(i)}_{\beta^{(i)}_{(i)+1}} \ldots H^{(i)}_{m(i)}$, где $c'_i = H_1^{(i)} \ldots H^{(i)}_{\alpha^{(i)}_{(i)}}$,$F_i = H^{(i)}_{\alpha^{(i)}_{(i)+1}} \ldots H^{(i)}_{\beta^{(i)}_{(i)}}$, $c''^{-1}_i = H^{(i)}_{\beta^{(i)}_{(i)+1}} \ldots H^{(i)}_{m(i)}$. Отсюда следуют соотношения $F_i = H^{(1)}_{\alpha^{(1)}_{(i)+1}} \ldots H^{(1)}_{\beta^{(1)}_{(i)}} = H^{(i)}_{\alpha^{(i)}_{(i)+1}} \ldots H^{(i)}_{\beta^{(i)}_{(i)}}$. Заметим, что разбиение X_i определяется разбиением F. Аналогично, разбиение Y_j, также определяется разбиением F. Следовательно, X_i, Y_j на искомое разбиение F не влияют. В качестве искомого возьмем разбиение $\varphi(\eta_1) = F$ в диаграмме $\Delta(w_{10}, w_{10})$. Получим разбиение F: $F = H_1 H_2 \ldots H_m$ и последовательность

$$w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, H_2, \ldots, H_m, w_1^{(m)}, \ldots, w_n^{(m)},$$

связанную с полученным разбиением, удовлетворяющую условиям:

$$\forall i, i = \overline{1,m}, H_i^{-1} w_1^{(i-1)} H_i = w_1^{(i)}, \ldots, H_i^{-1} w_n^{(i-1)} H_i = w_n^{(i)}, H_i \in \{a_i\},$$

$$w_j^{(s)} \in S(w_j, w_j), j = \overline{1,n}, s = \overline{1,m}.$$

Лемма 7. *Множество всех базисных слов порождает централизатор подгруппы H.*

Доказательство очевидно

Из лемм 3-7 следует справедливость теоремы 1.

Централизатор произвольного элемента $w \in G$ есть конечно порожденная подгруппа в G и существует алгоритм, выписывающий образующие этого централизатора.

3. Обобщенная сопряженность слов

Теорема 3. *В обобщенной древесной структуре групп Кокстера разрешима проблема обобщенной сопряженности слов.*

Доказательство. Пусть даны множества слов $w_1, w_2, \ldots, w_m$ и $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Необходимо установить: $\exists z$, $z \in G$, $\&_{i=1}^m (z^{-1} w_i z = v_i)$.

Пусть слова $w_1 = w_{10}$, $v_1 = v_{10}$ являются тупиковыми. Пусть $w_i = a_i w_{i0} a_i^{-1}$, $v_i = b_i v_{i0} b_i^{-1}$, $i = \overline{2,m}$ где w_{i0}, v_{i0} являются тупиковыми. Если предположить, что эти множества сопряжены, то $\forall i$, $i = \overline{1,m}$, $|w_{i0}| = |v_{i0}|$ и если какое-то из w_{i0} есть образующий x, то сопряженное ему слово v_{i0} тоже образующий y. Пусть $\Delta(w_{i0}, v_{i0})$ – кольцевая связная приведенная R-диаграмма сопряженности слов w_{i0}, v_{i0}

$$|a| = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_m|\},$$

$$|b| = \max\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_m|\},$$

где $|a_1| = |b_1| = 0$.

Обозначим через $S(w_i, v_i)$, $i = \overline{1,m}$, множество всех слов длина d_i которых заключена в пределах $|w_{i0}| \leqslant d_i \leqslant (|w_{i0}| + |v_{i0}|)m + 2 + |a| + |b|$.

Введем обозначения $\forall i$, $i = \overline{1,n}$, $w_i = w_i^{(0)}$ и рассмотрим базисные последовательности, соответствующие множеству слов $w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}$:

$$w_1^{(0)}, \ldots, w_n^{(0)}, H_1, w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)}, H_2, \ldots, H_k, w_1^{(k)}, \ldots, w_n^{(k)}, \tag{2}$$

где $\forall i,\ i=\overline{1,n},\ \forall j,\ j=\overline{0,k},\ w_i^{(j)}\in S(w_i,v_i)$ и является меткой циклического геодезического диаграммы $\Delta(w_{i0},v_{i0})$.

Базисная последовательность (2) называется особой, если она не содержит фундаментальную последовательность либо является пустой, то есть все $H_i=1$. Слово $H_1H_2\dots H_k$, соответствующее особой базисной последовательности, назовем особым базисным словом.

Если в базисной последовательности (2) $w_1^{(k)}=v_1,\dots,w_n^{(k)}=v_n$, то слова $w_1,\dots,w_n$ обобщенно сопряжены словам $v_1,\dots,v_n$.

Лемма 8. *Если последовательность (2) является особой базисной последовательностью, то* $k\leqslant|S|=|S(w_1,v_1)|\dots|S(w_n,v_n)|$.

Доказательство очевидно.

Лемма 9. *Число особых базисных последовательностей конечно.*

Доказательство очевидно.

Лемма 10. *Пусть F – какое-то решение системы $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz=v_i)$, тогда существует разбиение F в произведение кусков $H_1H_2\dots H_m$, $H_i\in\{a_i\}$, $i=\overline{1,m}$, и базисная последовательность, связанная с данным разбиением F:*

$$w_1^{(0)},\dots,w_n^{(0)},H_1,w_1^{(1)},\dots,w_n^{(1)},H_2,\dots,H_m,w_1^{(m)},\dots,w_n^{(m)},\tag{3}$$

где $w_1^{(m)}=v_1,\dots,w_n^{(m)}=v_n$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.

Лемма 11. *Пусть F – какое-то решение системы $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz=v_i)$ и (3) – базисная последовательность, соответвующая данному разбиению F. Тогда из последовательности (3) можно выделить особую подпоследовательность, такую, что соответствующее ей базисное слово F является решением системы.*

Доказательство. Если система

$$\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz=v_i)$$

такова, что $\forall i,\ i=\overline{1,n},\ w_i\equiv v_i$, то в качестве особой базисной подпоследовательности возьмем пустую подпоследовательность с $F\equiv1$. Если последовательность (3) не содержит фундаментальных подпоследовательностей то $F'=F$. Если (3) не особая и $\exists j,\ j=\overline{1,n}$, то существуют целые числа $v,k,0\leqslant v<k<m$ такие, что подпоследовательность $w_1^{(0)},\dots,w_n^{(0)},H_1,\dots,H_v,w_1^{(v)},\dots,w_n^{(v)},H_{v+1},\dots,H_k,w_1^{(k)},\dots,w_n^{(k)}$ является фундаментальной. Вычеркнув из (3) подпоследовательность $H_{v+1},w_1^{(v+1)},\dots,w_n^{(v+1)}H_{v+2},\dots,H_k,w_1^{(k)},\dots,w_n^{(k)}$, получим базисную последовательность слов, являющуюся решением системы. Если полученная базисная последовательность не является особой, то применим к ней указанный выше процесс.

Из лемм 8-11 следует доказательство теоремы 2.

Теорема 4. *Пусть G – обобщенная древесная структура групп Кокстера и $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$, $\{v_i\}_{i=\overline{1,m}}$ – слова из G. Если F – какое-то решение системы $\&_{i=1}^n(z^{-1}w_iz=v_i)$, то множество слов $\mathbb{C}_G(H)\cdot F$, где $\mathbb{C}_G(H)$ – централизатор подгруппы H порожденной словами $\{w_i\}_{i=\overline{1,m}}$ является множеством всех решений системы.*

Доказательство очевидно.

Теорема 5. *Существует алгоритм, позволяющий для любого конечного множества слов из обобщенной древесной структурой групп Кокстера G выписать образующие их нормализатора.*

Доказательство очевидно.

4. Заключение

Проблема обобщенной сопряженности слов является обобщением проблемы сопряженности слов, относящейся к основным алгоритмическим проблемам теории групп.

В работе рассмотрены проблемы обобщенной сопряженности слов и построения централизатора конечно порожденной подгруппы в обобщенных древесных структурах групп Кокстера. Данный класс групп важен для изучения алгоритмических проблем в группах Кокстера, которые могут либо быть представлены как обобщенные древесные структуры групп Кокстера, образованные из групп Кокстера с древесной структурой заменой некоторых вершин соответствующего дерева-графа группами Кокстера большого или экстрабольшого типов, а также группами Кокстера с n-угольной структурой, либо непосредственно принадлежат к перечисленным классам [8]. Данная работа продолжает изучение алгоритмических свойств групп Кокстера [15] – [21].

Несмотря на то, что данный класс групп относится к гиперболическим группам и в нем алгоритмически разрешима проблема обобщенной сопряженности слов, авторами предложен довольно простой и оригинальный метод решения указанных выше проблем.

Результаты исследования докладывались на Тульском научном алгебраическом семинаре «Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп» и международной алгебраической конференции, посвященной 110-летию со дня рождения А. Г. Куроша.

Для решения проблем обобщенной сопряженности слов и построения централизатора конечно порожденной подгруппы в обобщенных древесных структурах групп Кокстера применялись современные комбинаторные и геометрические методы исследования, в частности, метод диаграмм, введенный ван Кампеном, переоткрытый Р. Линдоном и усовершенствованный В. Н. Безверхним в части введения $\overline{R}$-сокращений, и подход Г. С. Маканина.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dehn M. Uber unendliche diskontinuierliche Gruppen // Math. Annal. 1912. Vol. 71. P. 116-144.
2. Новиков П. С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества в теории групп // Труды МИАН СССР. 1955. Т. 44. С. 3-143.
3. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. Vol. 35. P. 588-621.
4. Tits J. Groupes simples et geometries associees // Proc. Int. Congress Math. Stocholm. 1962. P. 197-221.
5. Schupp P. Coxeter Groups, 2-Completion, Perimeter Reduction and Subgroup Separability // arXiv math. GR/0203020. 2002. Vol. 1. P. 1-21.
6. Appel K., Schupp P. Artins groups and infinite Coxter groups // Ivent. Math. 1983. Vol. 72. P. 201-220.
7. Bahls P. The isomorphism problem in Coxeter groups. London: Imperial College Press, 2005.
8. Безверхний В. Н., Безверхняя Н. Б., Добрынина И. В., Инченко О. В., Устян А. Е. Об алгоритмических проблемах в группах Кокстера // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, №4. С. 23-50.
9. Лысенок И. Г. О некоторых алгоритмических свойствах гиперболических групп // Известия АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. №4. С. 814-832.

10. Buckley D. J., Derek F. Holt. The conjugacy problem in hyperbolic groups for finite lists of group elements // Int. J. of Algebra and Comput. 2013. Vol. 23, №5. P. 1127–1150.

11. Маканин Г. С. О нормализаторах группы кос // Математический сборник. 1971. Т. 86, №2. С. 171-179.

12. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в $C(p)\&T(q)$ - группах // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1998. Т. 4. С. 5-13.

13. Добрынина И. В. Об алгоритмических проблемах в обобщенных древесных структурах групп Кокстера // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, №2. С. 10-33.

14. Линдон Р., Шуп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

15. Инченко О. В. Проблемы равенства и сопряженности слов в группах Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, №2. С. 81-90.

16. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы степенной сопряженности слов в группах Кокстера экстрабольшого типа // Дискретная математика. 2008. Т. 20, №3. С. 101-110.

17. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Об элементах конечного порядка в группах Кокстера большого типа // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, №1. С. 13-22.

18. Безверхний В. Н., Инченко О. В. О кручении в группах Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, №1. С. 5-12.

19. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Чебышевский сборник. 2003. Т. 4, №1. С. 10-33.

20. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема степенной сопряженности слов в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2005. Т.11. С.63-75.

21. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в группах Кокстера большого типа // Дискретная математика. 2005. Т. 17, №3. С. 123-145.

REFERENCES

1. Dehn, M., 1912, “Uber unendliche diskontinuierliche Gruppen“, *Math. Annal.*, vol. 71, pp. 116-144.

2. Novikov, P. S., 1955, “On the algorithmic unsolvability of the word problem in group theory“, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 44, pp. 3–143.

3. Coxeter, H. S. M., 1934, “Discrete groups generated by reflections“, *Ann. Math.*, vol. 35, pp. 588-621.

4. Tits, J., 1962, “Groupes simples et geometries associees“, *Proc. Int. Congress Math. Stocholm*, pp. 197-221.

5. Schupp, P., 2002, “Coxeter Groups, 2-Completion, Perimeter Reduction and Subgroup Separability“, *arXiv math. GR/0203020*, vol. 1, pp. 1–21.

6. Appel, K. & Schupp, P., 1983, “Artins groups and infinite Coxter groups“, *Ivent. Math.*, , vol. 72, pp. 201-220.

7. Bahls, P., 2005, *The isomorphism problem in Coxeter groups*, Imperial College Press, London.

8. Bezverkhnii, V. N., Bezverkhnyaya, N. B., Dobrynina, I. V., Inchenko O. V., Ustyan A. E, 2016, “On algorithmic problems in Coxeter groups“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 17, no. 4, pp. 23–50.

9. Lysenok, I. G. 1990, “On some algorithmic properties of hyperbolic groups,“ *Math. USSR-Izv.*, vol. 35, no. 1, pp. 145-163.

10. Buckley, D. J. & Derek, F. Holt, 2013, “The conjugacy problem in hyperbolic groups for finite lists of group elements“, *Int. J. of Algebra and Comput.*, vol. 23, no.5. pp. 1127–1150.

11. Makanin, G. S., 1971, “On normalizers in the braid group“, *Math. USSR-Sb.*, vol. 15, no. 2, pp. 167–175.

12. Bezverkhnii, V. N., 1998, “Solution of the problem of generalized conjugacy of words in $C(p)\&T(q)$ – groups“, *Izvestia of Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 4, pp. 5-13.

13. Dobrynina, I. V., 2018, “On algorithmic problems in generalized tree structures of Coxeter groups“, textitChebyshevskii Sb., vol. 19, no. 2, pp. 10–33.

14. Lyndon, R.& Schupp, P., 1980, *Combinatorial group theory*, Mir, Moscow.

15. Inchenko, O. V., 2005, “Problems of words and conjugacy of words in Coxeter groups with a tree structure“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 6, no. 2, pp. 81-90.

16. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2008, “A solution of the power conjugacy problem for words in the Coxeter groups of extra large type“, *Diskr. Mat.*, vol. 20, no. 3, pp. 101–110.

17. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2003, “On elements of finite order in Coxeter groups of large type“, *Izvestia of Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 9, no. 1, pp. 13-22.

18. Bezverkhnii, V. N. & Inchenko, O. V., 2005, “On torsion in Coxeter groups with tree structure“, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 6, no. 1, pp. 5-12.

19. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2003,“Solution of the conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type“, *Chebyshevskii Sb.*, , vol. 4, no. 1, pp. 10–33.

20. Bezverkhnii, V. N. & Inchenko, O. V., 2005, “Power conjugacy problem for words in Coxeter groups with tree structure“, *Izvestia of Tula state University. Ser. Math. Mechanics. Informatics*, vol. 11, pp. 63-75.

21. Bezverkhnii, V. N. & Dobrynina, I. V., 2005, “Solution of the generalized conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type“, *Diskr. Mat.*, vol. 17, no. 3, pp. 123–145.

Получено 18.06.2018
Принято в печать 17.08.2018