ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-109-134

О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток[1]

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

В работе рассматриваются новые варианты двух асимптотических формул из теории гиперболической дзета-функции решёток.

Во-первых, получена новая асимптотическая формула для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки, полученной растяжением в t раз по каждой координате решётки состоящей из полных наборов алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел, пробегающих кольцо целых алгебраических чисел чисто вещественного алгебраического поля степени s для любого натурального $s \geqslant 2$.

Во-вторых, получена новая асимптотическая формула для числа точек произвольной решётки в гиперболическом кресте.

В первом случае показано, что главный член асимптотической формулы для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки выражается через детерминант решётки, регулятор поля и значения дзета-функции Дедекинда главных идеалов и её производные до порядка $s-1$. Впервые выписана явная формула остаточного члена и дана его оценка.

Во втором случае главный член асимптотической формулы выражается через объём гиперболического креста и детерминант решётки. Даётся явный вид остаточного члена и уточненная его оценка.

В заключении описана суть метода параметризованных множеств, использованного при выводе асимптотических формул.

Ключевые слова: алгебраическая решётка, гиперболическая дзета-функция алгебраической решётки, дзета-функция Дедекинда главных идеалов, гиперболический крест, точки решётки в гиперболическом кресте.

Библиография: 47 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 109–134.

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-109-134

On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices[2]

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate Professor of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry of Tula state pedagogical University L. N. Tolstoy.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

The paper considers new variants of two asymptotic formulas from the theory of hyperbolic Zeta function of lattices.

First, we obtain a new asymptotic formula for the hyperbolic Zeta function of an algebraic lattice obtained by stretching t times over each coordinate of a lattice consisting of complete sets of algebraically conjugate algebraic integers running through a ring of algebraic integers of a purely real algebraic field of degree s for any natural $s \geqslant 2$.

Second, we obtain a new asymptotic formula for the number of points of an arbitrary lattice in a hyperbolic cross.

In the first case, it is shown that the main term of the asymptotic formula for the hyperbolic Zeta function of an algebraic lattice is expressed in terms of the lattice determinant, the field controller, and the values of the Dedekind Zeta function of the principal ideals and its derivatives up to the order of $s-1$. For the first time an explicit formula of the residual term is written out and its estimation is given.

In the second case, the principal term of the asymptotic formula is expressed in terms of the volume of the hyperbolic cross and the lattice determinant. An explicit form of the residual term and its refined estimate are given.

In conclusion, the essence of the method of parametrized sets used in the derivation of asymptotic formulas is described.

Keywords: algebraic lattice, hyperbolic Zeta function of algebraic lattice, Dedekind Zeta function of principal ideals, hyperbolic cross, lattice points in hyperbolic cross.

Bibliography: 47 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 109–134.

[2]The work has been prepared by the RFBR grant №16-41-710194_r_centr_a

1. Введение

В данной работе продолжаются исследования по теории гиперболической дзета-функции решёток.

Гиперболическая дзета-функция решёток задаётся в правой α-полуплоскости $\sigma > 1$, $\alpha = \sigma + it$ дзета рядом[3]

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^{-\alpha}. \tag{1}$$

Очевидно, что при $s = 1$ гиперболическая дзета-функции решётки выражается через дзета-функцию Римана. В многомерном случае имеются свои существенно новые задачи, не имеющие аналогов в одномерном случае.

Впервые гиперболическая дзета-функция решёток возникла в работах Н. М. Коробова [28], [29] и Н. С. Бахвалова [1] в 1959 году для решёток решений линейного сравнения с несколькими переменными. В наиболее общем виде она появилась в работах К. К. Фролова [35], [36].

Термин *"гиперболическая дзета-функция решётки"* был введен в 1984 году Н. М. Добровольским в работах [11] — [13], в которых начато систематическое изучение функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ как самостоятельного объекта исследований.

В частности, для действительных $\alpha > 1$ получены нижние оценки для гиперболической дзета-функции произвольной s-мерной решётки:

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda|\alpha) &\geqslant C_1(\alpha,s)(\det\Lambda)^{-1} && \text{при} \quad 0 < \det\Lambda \leqslant 1,\\ \zeta_H(\Lambda|\alpha) &\geqslant C_2(\alpha,s)(\det\Lambda)^{-\alpha}\ln^{s-1}\det\Lambda && \text{при} \quad \det\Lambda > 1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $C_1(\alpha,s)$, $C_2(\alpha,s) > 0$ — константы, зависящие только от α и s.

Доказана верхняя оценка для гиперболической дзета-функции s-мерной решётки:

$$\begin{aligned} \zeta_H(\Lambda|\alpha) &\leqslant C_3(\alpha,s)C_1(\Lambda)^s && \text{при} \quad q(\Lambda) = 1,\\ \zeta_H(\Lambda|\alpha) &\leqslant C_4(\alpha,s)q^{-\alpha}(\Lambda)(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1} && \text{при} \quad q(\Lambda) > 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Этот результат является обобщением теоремы Н. С. Бахвалова [1]. Из оценки (3) получены различные следствия. В частности, из нее автоматически следует результат К. К. Фролова [35], так как гиперболический параметр $q(\Lambda(t,F)) = t^s$ при $t > 1$.

Для гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda(t,F)$ в работе [19] Добровольским Н. М., Ваньковой В. С., Козловой С. Л. была получена асимптотическая формула

$$\zeta_H(\Lambda(t,F)|\alpha) = \frac{2\cdot(\det\Lambda(F))^\alpha}{R\cdot(s-1)!}\left(\sum_{(w)}\frac{1}{|N(w)|^\alpha}\right)\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t,F)}{(\det\Lambda(t,F))^\alpha} + O\left(\frac{\ln^{s-2}\det\Lambda(t,F)}{(\det\Lambda(t,F))^\alpha}\right), \tag{4}$$

где R — регулятор поля F (см. [2]) и в сумме $\sum\limits_{(w)}\frac{1}{|N(w)|^\alpha}$ суммирование проводится по всем главным идеалам кольца $\mathbb{Z}_F$.

[3]Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1,|x|)$.

На первом этапе исследований с 1984 года по 1990 год изучение функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ проводилось только для вещественных $\alpha > 1$. Начиная с 1995 года, в совместных работах Добровольского Н. М., Ребровой И. Ю. и Рощени А. Л. ([24], [25], [22]) начался новый этап изучения гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ решётки Λ: во-первых, как функции комплексного аргумента α, во-вторых, как функции на метрическом пространстве решёток.

По теореме Абеля ([37], с. 106) гиперболическую дзета-функцию решёток в правой α-полуплоскости $\sigma > 1$, $\alpha = \sigma + it$ можно представить в следующем интегральном виде

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \alpha \int\limits_1^{\infty} \frac{D(t|\Lambda)dt}{t^{\alpha+1}},$$

где $D(T|\Lambda)$ — количество ненулевых точек решётки Λ в гиперболическом кресте $K_s(T)$.

Так как $D(T|\Lambda) = 0$ при $T < q(\Lambda)$, то

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \alpha \int\limits_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{D(t|\Lambda)dt}{t^{\alpha+1}}.$$

Возникает естественный вопрос о продолжении для произвольной решётки Λ гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ на всю комплексную плоскость. В работах Добровольского Н. М., Ребровой И. Ю. и Рощени А. Л. ([25], [22]) эти вопросы исследовались для PZ_s — множества всех целочисленных решёток, PQ_s — множества всех рациональных решёток, PD_s — множества всех решёток с диагональными матрицами. Доказано, что *для любой целочисленной решётки $\Lambda \in PZ_s$ гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ является регулярной функцией во всей α-плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс порядка s.*

Для любой решётки $\Lambda \in PQ_s$ гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ также является регулярной аналитической функцией во всей α-плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс порядка s.

Изучено поведение гиперболической дзета-функции решёток на пространстве решёток. В частности, установлено, что

если последовательность решёток $\{\Lambda_n\}$ сходится к решётке Λ, то последовательность гиперболических дзета-функций решёток $\zeta_H(\Lambda_n|\alpha)$ равномерно сходится к гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в любой полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.

Другой результат такого типа формулируется следующим образом.

Для любой точки α из α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, найдется окрестность $|\alpha-\beta| < \delta$ такая, что для любой решётки $\Lambda = \Lambda(d_1, \ldots, d_s) \in PD_s$

$$\lim_{M\to\Lambda, M\in PD_s} \zeta_H(M|\beta) = \zeta_H(\Lambda|\beta),$$

причем эта сходимость равномерна в окрестности точки α.

Вывод этих результатов существенно опирается на асимптотическую формулу для числа точек произвольной решётки в гиперболическом кресте как функции от параметра гиперболического креста, полученную Н. М. Добровольским и А. Л. Рощеней ([26]):

$$D(T \mid \Lambda) = \frac{2^s T \ln^{s-1} T}{(s-1)! \det \Lambda} + \Theta \cdot C(\Lambda) \frac{2^s \cdot T \ln^{s-2} T}{\det \Lambda}, \tag{5}$$

где $C(\Lambda)$ – эффективная константа, вычисляемая через базис решётки, и $|\Theta| \leqslant 1$.

В работах [3]–[36], [38], [39] освящены различные аспекты теории гиперболической дзета-функции решёток. В работах [40]–[47] используется асимптотическая формула (5).

Цель данной статьи — дать новые варианты формул (4) и (5).

2. Асимптотическая формула для алгебраической решётки

Вывод нашей новой асимптотической формулы для дзета-функции алгебраической решётки будет опираться на доказательства из монографии [34], поэтому приведем ряд лемм из этой работы без доказательства, модифицируя где необходимо формулировки.

2.1. Вычисление вспомогательных интегралов

Обозначим через $Sim_k(A)$ k-мерный симплекс заданный равенством

$$Sim_k(A) = \{\vec{x}|x_1, \dots, x_k \geqslant 0,\, x_1 + \dots + x_k \leqslant A\}.$$

Лемма 1. *Пусть* $A \geqslant 0, k \geqslant 1$ *и*

$$I_k(A) = \int\limits_{Sim_k(A)} \dots \int dx_1 \dots dx_k.$$

Тогда справедливо равенство

$$I_k(A) = \frac{A^k}{k!}.$$

Доказательство. См. [34], стр. 66. □

Лемма 2. *Пусть* $B \geqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant s-1, \alpha > 0$ *и*

$$Y_k(B) = \int\limits_{\substack{x_j \geqslant 0 (j=1,\dots,k-1) \\ x_j \leqslant 0 (j=k,\dots,s-1) \\ B \geqslant x_1 + \dots + x_{s-1}}} \dots \int e^{\alpha(x_k+\dots+x_{s-1})} dx_1 \dots dx_{s-1}.$$

Тогда справедливо равенство

$$Y_k(B) = \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m \frac{(s-m)!}{(k-1)!(s-k-1)!\alpha^{s-m+1}} \cdot B^m.$$

Доказательство. См. [34], стр. 66–67. □

2.2. Интегральное представление для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки

Пусть F_s — чисто вещественное алгебраическое поле степени s, $F_s^{(1)} = F_s, F_s^{(2)}, \dots, \dots, F_s^{(s)}$ — набор его сопряженных полей и для любого алгебраического числа Θ из F_s $\Theta^{(1)} = \Theta, \Theta^{(2)}, \dots, \Theta^{(s)}$ — набор его алгебраически сопряженных чисел. Через $\mathbb{Z}_{F_s}$ обозначим кольцо целых алгебраических чисел поля F_s.

Рассмотрим алгебраическую решётку $\Lambda = \left\{ \left(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, \dots, \Theta^{(s)}\right) \middle| \, \Theta \in \mathbb{Z}_{F_s} \right\}$.

Так как для любого ненулевого целого алгебраического числа Θ из $\mathbb{Z}_{F_s}$ имеем $|\Theta^{(1)}\Theta^{(2)} \dots \Theta^{(s)}| = |N(\Theta)| \geqslant 1$, то $q(\Lambda) = 1$.

Для произвольного $t > 1$ рассмотрим алгебраическую решётку

$$\Lambda(t) = \left\{ \left(\Theta^{(1)}t, \Theta^{(2)}t, \dots, \Theta^{(s)}t\right) \middle| \, \Theta \in \mathbb{Z}_{F_s} \right\}.$$

Ясно, что $q(\Lambda(t)) = t^s$. Так как $\det \Lambda(t) = t^s \det \Lambda$, то

$$q(\Lambda(t)) = \frac{\det \Lambda(t)}{\det \Lambda}. \tag{6}$$

Согласно (2), (3), (6) для гиперболической дзета–функции $\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)$

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \sum_{\Theta\in\mathbb{Z}_{F_s}}{}' \left(\overline{t\Theta^{(1)}}\ldots\overline{t\Theta^{(s)}}\right)^{-\alpha} \tag{7}$$

алгебраической решётки $\Lambda(t)$ справедливы оценки

$$C(\alpha,s,\Lambda)\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{\alpha}} \leqslant \zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) \leqslant C_1(\alpha,s,\Lambda)\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{\alpha}}.$$

Для вывода асимптотической формулы для гиперболической дзета – функции алгебраической решётки $\Lambda(t)$ нам потребуются следующие обозначения.

Через $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{s-1}$ обозначим набор фундаментальных единиц кольца $\mathbb{Z}_{F_s}$, а через $\varepsilon_j^{(1)} = \varepsilon_j,\ldots,\varepsilon_j^{(s)}$ $(j=1,\ldots,s-1)$ — их алгебраические сопряженные единицы.

Пусть далее везде $\sum\limits_{(\omega)}$ обозначает суммирование по всем главным идеалам кольца $\mathbb{Z}_{F_s}$, а $\sum\limits_{\varepsilon}$ обозначает суммирование по всем единицам кольца $\mathbb{Z}_{F_s}$. Как обычно,через R обозначим регулятор поля F_s, т. е.

$$R = \left\|\begin{array}{ccc} \ln|\varepsilon_1^{(1)}| & \ldots & \ln|\varepsilon_1^{(s-1)}| \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ln|\varepsilon_{s-1}^{(1)}| & \ldots & \ln|\varepsilon_{s-1}^{(s-1)}| \end{array}\right\|.$$

Обозначения для различных областей суммирования и интегрирования будут вводиться по мере необходимости.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\zeta(\Lambda(t)|\alpha) = 2\sum_{(\omega)}\sum_{k_1,\ldots,k_{s-1}=-\infty}^{\infty}\left(\prod_{j=1}^{s}\overline{t\omega^{(j)}\varepsilon_1^{(j)k_1}\ldots\varepsilon_{s-1}^{(j)k_{s-1}}}\right)^{-\alpha}.$$

Доказательство. См. [34], стр. 68. □

Пусть ω — произвольное целое ненулевое алгебраическое число и вектор $\vec{j}$ — произвольный вектор из области $D(p)$ целочисленных векторов, заданной равенством

$$D(p) = \left\{(j_1,\ldots,j_s)\;\middle|\; \begin{array}{c} 1\leqslant j_1<\ldots<j_p\leqslant s,\ 1\leqslant j_{p+1}<\ldots<j_s<s, \\ \{j_1,\ldots,j_s\} = \{1,\ldots,s\} \end{array}\right\}.$$

Через $B(\vec{j},p) = B(\vec{j},p,\omega)$ обозначим множество целочисленных векторов, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} \left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_1^{(j_\nu)k_1}\ldots\varepsilon_{s-1}^{(j_\nu)k_{s-1}}\right| \geqslant 1, & \text{при } \nu = 1,\ldots,p, \\ \left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_1^{(j_\nu)k_1}\ldots\varepsilon_{s-1}^{(j_\nu)k_{s-1}}\right| < 1, & \text{при } \nu = p+1,\ldots,s. \end{cases}$$

Пусть далее

$$A(\vec{j},p) = A(\vec{j},p,\omega) = \sum_{\vec{k}\in B(\vec{j},p)}\prod_{\nu=p+1}^{s}\left|t\omega^{(j_\nu)}\varepsilon_1^{(j_\nu)k_1}\ldots\varepsilon_{s-1}^{(j_\nu)k_{s-1}}\right|^{\alpha} \tag{8}$$

и

$$A(\omega) = \sum_{p=1}^{s}\sum_{\vec{j}\in D(p)} A(\vec{j},p). \tag{9}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = 2\sum_{(\omega)} \frac{A(\omega)}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}.$$

Доказательство. См. [34], стр. 69–70. □

Пусть

$$Y(\vec{j},p,\vec{k}) = \prod_{\nu=p+1}^{s} \left| t\omega^{(j_\nu)} \prod_{j=1}^{s-1} \varepsilon_j^{(j_\nu)k_j} \right|^\alpha, \tag{10}$$

$$C(\vec{j},p,m) = \begin{cases} 1 & \text{при } \sum\limits_{\nu=p+1}^{s} \ln|\varepsilon_m^{(j_\nu)}| = 0, \\ \dfrac{\alpha \sum\limits_{\nu=p+1}^{s} \ln|\varepsilon_m^{(j_\nu)}|}{2\operatorname{sh}\left(\dfrac{\alpha}{2}\sum\limits_{\nu=p+1}^{s} \ln|\varepsilon_m^{(j_\nu)}|\right)} & \text{при } \sum\limits_{\nu=p+1}^{s} \ln|\varepsilon_m^{(j_\nu)}| \neq 0, \end{cases}$$

$$C(\vec{j},p) = \prod_{m=1}^{s-1} C(\vec{j},p,m),$$

$$L_n(x_1,\ldots,x_{s-1}) = \ln t + \ln|\omega^{(n)}| + \sum_{j=1}^{s-1} x_j \ln|\varepsilon_j^{(n)}| \quad (n=1,\ldots,s), (t>1).$$

Заметим, что для любых $x_1,\ldots,x_{s-1}$

$$\sum_{n=1}^{s} L_n(x_1,\ldots,x_{s-1}) = \ln t^s + \ln|N(\omega)|.$$

Так как

$$\lim_{b\to0} \frac{b}{2\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)} = \lim_{b\to0} \frac{b}{e^{\frac{b}{2}} - e^{-\frac{b}{2}}} = \lim_{b\to0} \frac{1}{\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{b}{2}}} = 1,$$

то можно всегда писать

$$C(\vec{j},p,m) = \frac{\alpha \sum\limits_{\nu=p+1}^{s} \ln|\varepsilon_m^{(j_\nu)}|}{2\operatorname{sh}\left(\dfrac{\alpha}{2}\sum\limits_{\nu=p+1}^{s} \ln|\varepsilon_m^{(j_\nu)}|\right)}.$$

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$Y(\vec{j},p,\vec{k}) = C(\vec{j},p) \int\limits_{k_1-\frac{1}{2}}^{k_1+\frac{1}{2}} \ldots \int\limits_{k_{s-1}-\frac{1}{2}}^{k_{s-1}+\frac{1}{2}} e^{\alpha \sum\limits_{\nu=p+1}^{s} L_{j_\nu}(x_1,\ldots,x_{s-1})} dx_1\ldots dx_{s-1}.$$

Доказательство. См. [34], стр. 71–72. □

Определим область $\Omega(\vec{j},p) \subset \mathbb{R}^{s-1}$, как множество всех точек $(x_1,\dots,x_{s-1})$, удовлетворяющих соотношениям

$$L_{j_\nu}(x_1,\dots,x_{s-1}) \geqslant \sum_{j=1}^{s-1}\left(\left\{x_j+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\ln|\varepsilon_j^{(j_\nu)}| \quad (\nu=1,\dots,p),$$

$$L_{j_\nu}(x_1,\dots,x_{s-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{s-1}\left(\left\{x_j+\frac{1}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\ln|\varepsilon_j^{(j_\nu)}| \quad (\nu=p+1,\dots,s).$$

Лемма 6. *Справедливо следующее интегральное представление*

$$A(\vec{j},p)=C(\vec{j},p)\int\limits_{\Omega(\vec{j},p)}\dots\int e^{\alpha\sum\limits_{\nu=p+1}^{s}L_{j_\nu}(x_1,\dots,x_{s-1})}dx_1\dots dx_{s-1}.$$

Доказательство. См. [34], стр. 72–73. □

Пусть далее везде

$$a=\frac{s-1}{2}\max_{\substack{1\leqslant m\leqslant s-1,\\ 1\leqslant n\leqslant s}}|\ln|\varepsilon_m^{(n)}||.$$

Определим область $\Omega_\lambda(\vec{j},p)\subset\mathbb{R}^{s-1}$ $(\lambda=1,2)$ следующими соотношениями

$$L_{j\nu}(x_1,\dots,x_{s-1}) \geqslant (-1)^{\lambda-1}a \qquad (1\leqslant\nu\leqslant p),$$

$$L_{j\nu}(x_1,\dots,x_{s-1}) \leqslant (-1)^{\lambda}a \qquad (p+1\leqslant\nu\leqslant s),$$

а величины $A_\lambda(\vec{j},p)$ $(\lambda=1,2)$ зададим равенствами

$$A_\lambda(\vec{j},p)=C(\vec{j},p)\int\limits_{\Omega_\lambda(\vec{j},p)}\dots\int e^{\alpha\sum\limits_{\nu=p+1}^{s}L_{j_\nu}(x_1,\dots,x_{s-1})}dx_1\dots dx_{s-1} \quad (\lambda=1,2).$$

Кроме указанных областей и величин из монографии [34], введем для параметра θ с $-1\leqslant\theta\leqslant1$ новую область $\Omega(\vec{j},p,\theta)\subset\mathbb{R}^{s-1}$ следующими соотношениями

$$L_{j\nu}(x_1,\dots,x_{s-1}) \geqslant -\theta a \qquad (1\leqslant\nu\leqslant p),$$

$$L_{j\nu}(x_1,\dots,x_{s-1}) \leqslant \theta a \qquad (p+1\leqslant\nu\leqslant s),$$

а величины $A(\vec{j},p,\theta)$ зададим равенствами

$$A(\vec{j},p,\theta)=C(\vec{j},p)\int\limits_{\Omega(\vec{j},p,\theta)}\dots\int e^{\alpha\sum\limits_{\nu=p+1}^{s}L_{j_\nu}(x_1,\dots,x_{s-1})}dx_1\dots dx_{s-1}.$$

Для дальнейшего важно, что новые области и величины обладают следующими принципиальными свойствами:

$$\Omega_1(\vec{j},p)=\Omega(\vec{j},p,-1),\quad \Omega_2(\vec{j},p)=\Omega(\vec{j},p,1),\quad \Omega(\vec{j},p,\theta_1)\subset\Omega(\vec{j},p,\theta_2)\text{ при }\theta_1<\theta_2$$

и величина $A(\vec{j},p,\theta)$ непрерывно, монотонно возрастает при изменении θ от -1 до 1.

Лемма 7. *Справедливы неравенства*

$$A(\vec{j},p,-1) = A_1(\vec{j},p) \leqslant A(\vec{j},p) \leqslant A_2(\vec{j},p) = A(\vec{j},p,1).$$

Доказательство. См. [34], стр. 73–74. □

Введем для параметра θ с $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ новую область $\Omega'(\vec{j},p,\theta) \subset \mathbb{R}^{s-1}$ следующим образом: пусть для произвольной точки $(y_1,\ldots,y_{s-1})$ величина

$$y_s = \ln t^s + \ln|N(\omega)| - (y_1 + y_2 + \ldots + y_{s-1}).$$

Тогда точка $(y_1,\ldots,y_{s-1})$ принадлежит $\Omega'(\vec{j},p,\theta)$, если выполнены неравенства

$$\begin{cases} y_{j_\nu} \geqslant -\theta a & \text{при} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p, \\ y_{j_\nu} < \theta a & \text{при} \quad p+1 \leqslant \nu \leqslant s. \end{cases}$$

Лемма 8. *Справедливо равенство*

$$A(\vec{j},p,\theta) = \frac{C(\vec{j},p)}{R} \int\limits_{\Omega'(\vec{j},p,\theta)}\!\!\ldots\!\int e^{\alpha(y_{j_{p+1}}+\ldots+y_{j_s})} dy_1\ldots dy_{s-1} \quad (-1 \leqslant \theta \leqslant 1),$$

где R — регулятор поля.

Доказательство. Сделаем линейную замену в интеграле по области $\Omega(\vec{j},p,\theta)$

$$y_j = L_j(x_1,\ldots,x_{s-1}) \quad (j = 1,\ldots,s-1).$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{s} L_j(x_1,\ldots,x_{s-1}) = \sum_{j=1}^{s}\left(\ln t + \ln|\omega^{(j)}| + \sum_{m=1}^{s-1} x_m \ln|\varepsilon_m^{(j)}|\right) =$$

$$= \ln t^s + \ln|N(\omega)| + \sum_{m=1}^{s-1} x_m \ln|N\varepsilon_m| = \ln t^s + \ln|N(\omega)|,$$

то $y_s = L_s(x_1,\ldots,x_{s-1})$.

Поэтому область $\Omega(\vec{j},p,\theta)$, заданная соотношениями

$$\begin{cases} L_{j_\nu}(x_1,\ldots,x_{s-1}) \geqslant -\theta a & \text{при} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p, \\ L_{j_\nu}(x_1,\ldots,x_{s-1} < \theta a & \text{при} \quad p+1 \leqslant \nu \leqslant s, \end{cases}$$

перейдет в область $\Omega'(\vec{j},p,\theta)$, заданную соотношениями

$$\begin{cases} y_{j_\nu} \geqslant -\theta a & \text{при} \quad 1 \leqslant \nu \leqslant p, \\ y_{j_\nu} < \theta a & \text{при} \quad p+1 \leqslant \nu \leqslant s, \end{cases}$$

а так как якобиан линейного преобразования имеет модуль, равный регулятору поля, то лемма доказана. □

2.3. Асимптотическая формула для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки

Пусть для $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ величины $I(\vec{j}; p, \theta)$ определены равенствами

$$I(\vec{j}, p, \theta) = \int\limits_{\Omega'(\vec{j},p,\theta)} \ldots \int e^{\alpha(y_{j_{p+1}}+\ldots+y_{j_{s-1}})} dy_1 \ldots dy_{s-1}$$

и

$$C_p(\theta) = e^{\theta(s-p)a\alpha},$$

$$B_p(\theta) = \ln t^s + \ln |N(\omega)| + \theta(2p - s)a.$$

Лемма 9. *Справедливы равенства:*
при $1 \leqslant p \leqslant s-1$

$$I(\vec{j}, p, \theta) = e^{\theta(s-p)\alpha a} \sum_{m=0}^{p-1} C_{p-1}^m \frac{(s-m)!}{(p-1)!(s-p-1)!\alpha^{s-m+1}} \cdot (\ln t^s + \ln |N(\omega)| + \theta(2p-s)a)^m$$

и

$$I(\vec{j}, s, \theta) = \frac{(\ln t^s + \ln |N(\omega)|)^{s-1}}{(s-1)!} + \sum_{\nu=1}^{s-1} \frac{C_{s-1}^\nu s^\nu a^\nu \theta^\nu (\ln t^s + \ln |N(\omega)|)^{s-1-\nu}}{(s-1)!}.$$

Доказательство. При $p = s$ имеем $D(p) = \{(1, 2, \ldots, s)\}$ и, следовательно, $\vec{j} = (1, 2, \ldots, s) \in D(p)$.

Поэтому

$$I(\vec{j}, s, \theta) = \int\limits_{\Omega'(\vec{j},s,\theta)} \ldots \int dy_1 \ldots dy_{s-1}$$

и $\Omega'(\vec{j}, s, \theta)$ задано соотношениями

$$\begin{cases} y_\nu \geqslant -\theta a \qquad (\nu = 1, \ldots, s-1), \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_s = \ln t^s + \ln |N(\omega)|. \end{cases}$$

Сделаем линейную замену переменных

$$z_\nu = y_\nu + \theta a \qquad (\nu = 1, \ldots, s-1),$$

тогда область $\Omega'(\vec{j}, s, \theta)$ перейдет в область $\Omega''(\theta)$, заданную соотношениями

$$\begin{cases} z_\nu \geqslant 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, s-1), \\ \ln t^s + \ln |N(\omega)| - \sum_{\nu=1}^{s-1} (z_\nu - \theta a) \geqslant -\theta a. \end{cases} \tag{11}$$

Неравенство (11) можно записать в виде

$$\sum_{\nu=1}^{s-1} z_\nu \leqslant \ln t^s + \ln |N(\omega)| + s \cdot \theta a.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$I(\vec{j}, s, \theta) = I_{s-1}(A(\theta)),$$

где величина $I_s(A)$ определена в лемме 1 и

$$A(\theta) = \ln t^s + \ln |N(\omega)| + s \cdot \theta a = B_s(\theta).$$

Отсюда следует, что

$$I(\vec{j},s,\theta)=\frac{(\ln t^s+\ln|N(\omega)|+s\cdot\theta a)^{s-1}}{(s-1)!}=$$
$$=\frac{(\ln t^s+\ln|N(\omega)|)^{s-1}}{(s-1)!}+\sum_{\nu=1}^{s-1}\frac{C_{s-1}^{\nu}s^{\nu}a^{\nu}\theta^{\nu}(\ln t^s+\ln|N(\omega)|)^{s-1-\nu}}{(s-1)!}.$$

Пусть теперь $1\leqslant p\leqslant s-1$. Сделаем линейную замену переменных

$$z_\nu=\begin{cases} y_{j_{\nu+1}}+\theta a & \text{при}\quad \nu=1,\ldots,p-1,\\ y_{j_{\nu+1}}-\theta a & \text{при}\quad \nu=p,\ldots,s-1,\\ y_{j_1}+\theta a & \text{при}\quad \nu=s.\end{cases}$$

Тогда область $\Omega'(\vec{j},p,\theta)$ перейдет в область $\Omega''(\theta)$ точек $(z_1,\ldots,z_{s-1})$, удовлетворяющих условиям

$$z_\nu\geqslant 0\ (\nu=1,\ldots,p-1),\quad z_\nu<0\ (\nu=p,\ldots,s-1),\quad z_s\geqslant 0.$$

При этом

$$z_1+\ldots+z_s=\sum_{\nu=1}^{p}(y_{j_\nu}+\theta a)+\sum_{\nu=p+1}^{s}(y_{j_\nu}-\theta a)=\ln t^s+\ln|N(\omega)|+\theta(2p-s)a.$$

Отсюда следует, что

$$I(\vec{j},p,\theta)=\underset{\Omega''_p(\theta)}{\int\ldots\int}e^{\alpha(z_p+\ldots+z_{s-1}+\theta(s-p)a)}dz_1\ldots dz_{s-1}=Y_p(B_p(\theta))\cdot e^{\theta(s-p)\alpha a},$$

где величина $Y_p(B)$ определена в лемме 2 и

$$B_p(\theta)=\ln t^s+\ln|N(\omega)|+\theta(2p-s)a.$$

Отсюда следует, что

$$I(\vec{j},p,\theta)=e^{\theta(s-p)\alpha a}\sum_{m=0}^{p-1}C_{p-1}^{m}\frac{(s-m)!}{(p-1)!(s-p-1)!\alpha^{s-m+1}}\cdot(\ln t^s+\ln|N(\omega)|+\theta(2p-s)a)^m.$$

Лемма полностью доказана. $\square$

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов чисто-вещественного поля F:

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F)=\sum_{(\omega)}|N(\omega)|^{-\alpha},$$

тогда

$$\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F)=(-1)^{\nu}\sum_{(\omega)}\ln^{\nu}|N(\omega)||N(\omega)|^{-\alpha},\quad \nu\geqslant 1.$$

Теорема 1. *При $t>e^a$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)=\frac{2(\det\Lambda)^{\alpha}}{R(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-1}C_{s-1}^{\nu}\frac{(\ln\det\Lambda(t)-\ln\det\Lambda)^{s-1-\nu}(-1)^{\nu}\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^{\alpha}}+R(\Lambda,\alpha,\theta),\qquad(12)$$

где

$$R(\Lambda,\alpha,\theta)=O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det\Lambda(t))}{(\det\Lambda(t))^{\alpha}}\right)\quad \textit{и}\quad R\ \textit{– регулятор поля.}$$

Доказательство. Согласно лемме 4 имеем

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)=2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}A(\omega)\quad \text{и}\quad A(\omega)=\sum_{p=1}^{s}\sum_{\vec{j}\in D(p)}A(\vec{j},p).$$

По лемме 7

$$A(\vec{j},p,-1)\leqslant A(\vec{j},p)\leqslant A(\vec{j},p,1).$$

Отсюда следует, что справедливы неравенства

$$2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}\sum_{p=1}^{s}\sum_{\vec{j}\in D(p)}A(\vec{j},p,-1)\leqslant\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)\leqslant 2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}\sum_{p=1}^{s}\sum_{\vec{j}\in D(p)}A(\vec{j},p,1).$$

Так как величины $A(\vec{j},p,\theta)$ непрерывно, монотонно возрастают при изменении θ от -1 до 1, то найдётся значение $\theta=\theta(\Lambda(t),\alpha)$ с $-1\leqslant\theta\leqslant 1$, такое что

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)=2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}\sum_{p=1}^{s}\sum_{\vec{j}\in D(p)}A(\vec{j},p,\theta).$$

Из лемм 8, 9, 1 следует, что при $t>e^a$

$$A(\vec{j},s,\theta)=\frac{1}{R}I_{s-1}(\ln t^s+\ln|N(\omega)|+s\cdot\theta a)=\frac{(\ln t^s+\ln|N(\omega)|+s\cdot\theta a)^{s-1}}{R\cdot(s-1)!}=$$

$$=\frac{(\ln t^s+\ln|N(\omega)|)^{s-1}}{R\cdot(s-1)!}+\frac{1}{R\cdot(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-2}C_{s-1}^{\nu}(\ln t^s+\ln|N(\omega)|)^{\nu}(s\cdot\theta a)^{s-1-\nu}. \tag{13}$$

Из лемм 8, 9, 2 следует, что при $1\leqslant p\leqslant s-1$

$$A(\vec{j},p,\theta)=\frac{C(\vec{j},p)e^{\theta(s-p)\alpha a}}{R}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(s-m)!C_{p-1}^{m}\cdot(\ln t^s+\ln|N(\omega)|+\theta(2p-s)a)^m}{(p-1)!(s-p-1)!\alpha^{s-m+1}}. \tag{14}$$

Объединяя оценки (13) и (14), получим

$$\zeta(\Lambda(t)|\alpha)=2\sum_{(\omega)}\frac{1}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}\frac{(\ln t^s+\ln|N(\omega)|)^{s-1}}{R\cdot(s-1)!}+R(\Lambda,\alpha,\theta),$$

где

$$R(\Lambda,\alpha,\theta)=\frac{1}{R\cdot(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-2}C_{s-1}^{\nu}(\ln t^s+\ln|N(\omega)|)^{\nu}(s\cdot\theta a)^{s-1-\nu}+$$

$$+\sum_{(\omega)}\frac{2}{(t^s|N(\omega)|)^\alpha}\sum_{p=1}^{s-1}\sum_{\vec{j}\in D(p)}\frac{C(\vec{j},p)e^{\theta(s-p)\alpha a}}{R}\sum_{m=0}^{p-1}\frac{(s-m)!C_{p-1}^{m}\cdot(\ln t^s+\ln|N(\omega)|+\theta(2p-s)a)^m}{(p-1)!(s-p-1)!\alpha^{s-m+1}},$$

$$R(\Lambda,\alpha,\theta)=O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det\Lambda(t))}{(\det\Lambda(t))^\alpha}\right).$$

Преобразуя главный член по t, окончательно находим

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha)=\frac{2}{R(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-1}C_{s-1}^{\nu}\frac{\ln^{s-1-\nu}t^s}{t^{s\alpha}}\sum_{(\omega)}\frac{\ln^{\nu}|N(\omega)|}{|N(\omega)|^\alpha}+R(\Lambda,\alpha,\theta)=$$

$$=\frac{2(\det\Lambda)^\alpha}{R(s-1)!}\sum_{\nu=0}^{s-1}C_{s-1}^{\nu}\frac{(\ln\det\Lambda(t)-\ln\det\Lambda)^{s-1-\nu}(-1)^{\nu}\zeta_{D_0}^{(\nu)}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^\alpha}+R(\Lambda,\alpha,\theta),$$

что и требовалось доказать. □

3. Асимптотическая формула для числа точек решётки

Вывод нового варианта асимптотической формулы для числа точек решётки в гиперболическом кресте мы будем проводить тем же методом, что и получение асимптотической формулы для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки. Далее везде предполагаем, что размерность $s \geqslant 2$.

3.1. Вспомогательные леммы о многомерных областях и интегралах

Пусть $\vec{\lambda_j} = (\lambda_{j1}, ..., \lambda_{js})$ $(j = 1, ..., s)$ — произвольный фиксированный базис решетки Λ и

$$A = A(\vec{\lambda_1}, ..., \vec{\lambda_s}) = \max_{1\leqslant j\leqslant s} 1/2 \sum_{\nu=1}^{s} |\lambda_{\nu j}|; \tag{15}$$

$\vec{\lambda}_j^* = (\lambda_{j1}^*, ..., \lambda_{js}^*)$ $(j = 1, ..., s)$ — взаимный базис взаимной решетки Λ^* (как известно, взаимный базис задается соотношениями

$$(\vec{\lambda_i}, \vec{\lambda}_j^*) = \sum_{\nu=1}^{s} \lambda_{i\nu}\lambda_{j\nu}^* = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j \end{cases}, \tag{16}$$

а взаимная решетка Λ^* однозначно определяется решеткой Λ).

Определим следующие области

$$\Pi(T \mid \Lambda) = \left\{ \vec{t} \left| \prod_{j=1}^{s} \overline{\sum_{\nu=1}^{s} \lambda_{\nu j} t_\nu + \sum_{\nu=1}^{s} \lambda_{\nu j}(1/2 - \{t_\nu + 1/2\})} \leqslant T \right. \right\}, \tag{17}$$

для целого вектора $\vec{m}$

$$\Pi(\vec{m}) = \{\vec{t} \mid [t_\nu + 1/2] = m_\nu \, (\nu = 1, ..., s)\}, \tag{18}$$

$$\Pi^*(T \mid \Lambda) = \left\{ \vec{y} \mid \prod_{j=1}^{s} \overline{y_j + \sum_{\nu=1}^{s} \lambda_{\nu j}(1/2 - \{1/2 + \sum_{k=1}^{s} y_k \lambda_{\nu k}^*\})} \leqslant T \right\}, \tag{19}$$

при $a \geqslant 0$, $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ положим

$$u(y, \theta a) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad |y| + \theta a \leqslant 1, \\ |y| + \theta a & \text{при} \quad |y| + \theta a \geqslant 1 \end{cases} \tag{20}$$

и области

$$\Pi_1(T, a) = \left\{ \vec{y} \mid \prod_{j=1}^{s} \overline{|y_j| + a} \leqslant T \right\}, \tag{21}$$

$$\Pi_2(T, a) = \left\{ \vec{y} \mid \prod_{j=1}^{s} u(y_j, -a) \leqslant T \right\}, \tag{22}$$

$$\Pi(T, \theta a) = \left\{ \vec{y} \mid \prod_{j=1}^{s} u(y_j, \theta a) \leqslant T \right\}. \tag{23}$$

Ясно, что

$$\Pi_1(T, a) = \Pi(T, a) \subset \Pi_2(T, a) = \Pi(T, -a).$$

Заметим, что $\Pi_1(T,0)=\Pi_2(T,0)=K(T)$.
Пусть при $a\geqslant 0$, $T\geqslant 0$, $-1\leqslant\theta\leqslant 1$

$$I_s(a,T)=\int\limits_{\substack{\prod_{j=1}^s(y_j+a)\leqslant T\\ y_1,\cdots,y_s\geqslant 0}} d\vec{y}, \tag{24}$$

$$J_s(a,T)=\int\limits_{\substack{\prod_{j=1}^s u(y_j,-a)\leqslant T\\ y_1,\cdots,y_s\geqslant 0}} d\vec{y}, \tag{25}$$

$$I_s(a,T,\theta)=\int\limits_{\substack{\prod_{j=1}^s u(y_j,a\theta)\leqslant T\\ y_1,\cdots,y_s\geqslant 0}} d\vec{y}. \tag{26}$$

Лемма 10. *Справедливо равенство*

$$\sum_{\prod_{j=1}^s\overline{\lambda_{1j}m_1+\cdots+\lambda_{sj}m_s}\leqslant T}\ \int\limits_{\Pi(\vec{m})} d\vec{t}=\int\limits_{\Pi(T|\Lambda)} d\vec{t}. \tag{27}$$

Доказательство. См. [26]. □

Лемма 11. *Справедливы равенства*

$$\int\limits_{\Pi(T|\Lambda)} d\vec{t}=\frac{1}{\det\Lambda}\int\limits_{\Pi^*(T|\Lambda)} d\vec{y}, \tag{28}$$

$$\int\limits_{\Pi_1(T,a)} d\vec{y}=2^sI_s(a,T)\qquad \text{при } a\geqslant 1, \tag{29}$$

$$\int\limits_{\Pi_2(T,a)} d\vec{y}=2^sJ_s(a,T)\qquad \text{при } a\geqslant 0. \tag{30}$$

Доказательство. См. [26]. □

Лемма 12. *При $a>0$, $T\geqslant a^s$ справедливо равенство*

$$I_s(a,T)=(-1)^{s+1}(T-a^s)+T\sum_{n=1}^{s-1}\frac{(\ln T-s\ln a)^n(-1)^{s-1-n}}{n!}. \tag{31}$$

Доказательство. См. [26]. □

Лемма 13. *При $a\geqslant 0$, $T\geqslant 1$, $s\geqslant 1$ справедливо равенство*

$$J_s(a,T)=a^s+\sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!}\sum_{k=0}^{s-1-n}C_s^kC_{s-k-1}^n a^k. \tag{32}$$

Доказательство. См. [26]. □

Следствие 1. *При $a>1$, $T\geqslant 3$ справедливо неравенство*

$$I_s(a,T)\geqslant\frac{T\ln^{s-1}T}{(s-1)!}-ea^sT\ln^{s-2}T-a^s. \tag{33}$$

Доказательство. См. [26]. □

Следствие 2. *Справедливо неравенство*

$$J_s(a,T) \leqslant \frac{T\ln^{s-1}T}{(s-1)!} + (a+2)^s T\ln^{s-2}T + a^s. \tag{34}$$

Доказательство. См. [26]. □

Лемма 14. *При $a>0$, $T\geqslant a^s$, $-1\leqslant\theta\leqslant 1$ справедливо равенство*

$$I_s(a,T,\theta) = \begin{cases} (-1)^{s+1}(T-(\theta a)^s) + T\sum\limits_{n=1}^{s-1}\frac{(\ln T - s\ln(\theta a))^n(-1)^{s-1-n}}{n!}, & \text{при } \theta a\geqslant 1,\\[2ex] (-\theta a)^s + \sum\limits_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!}\sum\limits_{k=0}^{s-1-n} C_s^k C_{s-k-1}^n(-\theta a)^k, & \text{при } \theta a\leqslant 1. \end{cases} \tag{35}$$

Доказательство. Из определения $I_s(a,T,\theta)$ имеем:
при $a\theta\geqslant 1$ будет $I_s(a,T,\theta)=I_s(a\theta,T$ и в силу леммы 12

$$I_s(a,T,\theta) = (-1)^{s+1}(T-(a\theta)^s) + T\sum_{n=1}^{s-1}\frac{(\ln T - s\ln(a\theta))^n(-1)^{s-1-n}}{n!};$$

при $a\theta\leqslant 1$

$$I_s(a,T,\theta) = \int\limits_0^{1-a\theta} dy_s \int\limits_{\substack{y_1,\cdots,y_{s-1}\geqslant 0\\ u(y_1,a)\cdot\ldots\cdot u(y_{s-1},a)\leqslant T}} dy_1\cdots dy_{s-1} +$$

$$+\int\limits_{1-a\theta}^{T-a\theta} dy_s \int\limits_{\substack{y_1,\cdots,y_{s-1}\geqslant 0\\ u(y_1,a)\cdot\ldots\cdot u(y_{s-1},a)\leqslant \frac{T}{y+a\theta}}} dy_1\cdots dy_{s-1} =$$

$$= (1-a\theta)I_{s-1}(a,T,\theta) + \int\limits_1^T I_{s-1}\left(a,\frac{T}{y},\theta\right)dy. \tag{36}$$

Далее проведем индукцию по s, используя рекуррентное равенство (36).

При $s=1$

$$I_1(a,T,\theta) = \int\limits_{\substack{y\geqslant 0\\ u(y,a\theta)\leqslant T}} dy = \int\limits_0^{1-a\theta} dy + \int\limits_{1-a\theta}^{T-a\theta} dy = 1-a\theta+T-1 = T-a\theta$$

и равенство (35) выполнено.

Пусть

$$Q_{s,n}(a\theta) = \sum_{k=0}^{s-1-n} C_s^k C_{s-k-1}^n (-a\theta)^k$$

и

$$I_s(a,T,\theta) = (-a\theta)^s + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T\ln^n T}{n!} Q_{s,n}(a\theta),$$

тогда

$$I_{s+1}(a,T,\theta) = (1-a\theta)I_s(a,T,\theta) + \int_1^T I_s\left(a,\frac{T}{y},\theta\right)dy =$$

$$= (1-a\theta)(-a\theta)^s + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T\ln^n T}{n!} Q_{s,n}(a)(1-a\theta) + \int_1^T \left((-a\theta)^s + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T/y\ln^n(T/y)}{n!} Q_{s,n}(a\theta)\right)dy =$$

$$= (-a\theta)^{s+1} + (-a\theta)^s + T(-a\theta)^s - (-a\theta)^s + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T\ln^n T}{n!} Q_{s,n}(a)(1-a\theta) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T}{n!} Q_{s,n}(a\theta) \frac{\ln^{n+1} T}{n+1} = (-a\theta)^{s+1} + T((-a\theta)^s + Q_{s,0}(a\theta)(1-a\theta)) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{s-1} \frac{T\ln^n T}{n!} \left(Q_{s,n}(a\theta)(1-a\theta) + Q_{s,n-1}(a\theta)\right) + \frac{T\ln^s T}{s!} Q_{s,s-1}(a\theta) =$$

$$= (-a\theta)^{s+1} + \sum_{n=0}^{s} \frac{T\ln^n T}{n!} Q_{s+1,n}(a\theta),$$

где

$$Q_{s+1,0}(a\theta) = (-a\theta)^s + (1-a\theta)\sum_{k=0}^{s-1} C_s^k(-a\theta)^k = \sum_{k=1}^{s} C_s^{k-1}(-a\theta)^k + \sum_{k=0}^{s-1} C_s^k(-a\theta)^k + (-a\theta)^s =$$

$$= s(-a\theta)^s + \sum_{k=1}^{s-1}(C_s^{k-1} + C_s^k)(-a\theta)^k + 1 = \sum_{k=0}^{s} C_{s+1}^k(-a\theta)^k = \sum_{k=0}^{(s+1)-1-0} C_{s+1}^k C_{s+1-k-1}^0(-a\theta)^k;$$

$$Q_{s+1,s}(a\theta) = Q_{s,s-1}(a\theta) = 1 = \sum_{k=0}^{(s+1)-1-s} C_{s+1}^k C_{s+1-k-1}^s(-a\theta)^k;$$

и при $1 \leqslant n \leqslant s-1$

$$Q_{s+1,n}(a\theta) = Q_{s,n}(a\theta)(1-a\theta) + Q_{s,n-1}(a\theta) =$$

$$= (1-a\theta)\sum_{k=0}^{s-1-n} C_s^k C_{s-k-1}^n(-a\theta)^k + \sum_{k=0}^{s-1-(n-1)} C_s^k C_{s-k-1}^{n-1}(-a\theta)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{s-n} C_s^{k-1} C_{s-(k-1)-1}^n(-a\theta)^k + \sum_{k=0}^{s-1-n} C_s^k(C_{s-k-1}^n + C_{s-k-1}^{n-1})(-a\theta)^k + C_s^{s-n}C_{n-1}^{n-1}(-a\theta)^{s-n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{s-n} C_s^{k-1} C_{s-k}^n(-a\theta)^k + \sum_{k=0}^{s-n} C_s^k C_{s-k}^n(-a\theta)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{s-n}(C_s^{k-1} + C_s^k)C_{s-k}^n(-a\theta)^k + C_s^0 C_{s-0}^n(-a\theta)^0 = \sum_{k=0}^{s-n}(C_{s+1}^k C_{(s+1)-1-k}^n)(-a\theta)^k$$

и, значит, $I_{s+1}(a,T,\theta)$ удовлетворяет равенству (35).

Для полноты изложения покажем что при $a\theta = 1$ обе формулы в (35) задают одно и тоже значение
$$I_s(a,T,\theta) = (-1)^s + T\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(-1)^{s-1-n}\ln^n T}{n!}.$$
Действительно, в этом случае имеем:
$$I_{s+1}(a,T,\theta) = \int\limits_1^T I_s\left(a,\frac{T}{y},\theta\right)dy = \int\limits_1^T\left((-1)^s + \frac{T}{y}\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(-1)^{s-1-n}\ln^n\frac{T}{y}}{n!}\right) =$$
$$= (-1)^s(T-1) + \sum_{n=0}^{s-1}\frac{T}{n!}(-1)^{s-1-n}\frac{\ln^{n+1}T}{n+1} = (-1)^{s+1} + T\sum_{n=0}^{s}\frac{(-1)^{s-n}\ln^n T}{n!},$$
что и и завершает доказательство леммы. □

Следствие 3. *Объем гиперболического креста задается равенством*
$$V(K(T)) = 2^s\sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!}C_{s-1}^n.$$

Доказательство. Действительно, $\Pi_1(T,0) = \Pi_2(T,0) = K(T)$. По леммам 11, 13 имеем:
$$V(K(T)) = 2^s J_s(0,T) = 2^s\sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!}C_{s-1}^n$$
и следствие доказано. □

Лемма 15. *При $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ справедливо неравенство*
$$|2^s I_s(a,T,\theta) - V(K(T))| \leqslant \begin{cases}\max\left(T(2+2\ln a) - a^2, 2(\ln a)T + a^2\right) & \text{при } s=2,\\ T\frac{c_1(a,s)\ln^{s-2}T}{(s-2)!} + c_2(a,s)T\ln^{s-3}T + a^s, & \text{при } s>2\end{cases},$$
где
$$c_1(a,s) = \max\left(2+s\ln a, s-2+s\ln a\right), \quad c_2(a,s) = \max\left(e(a^s+1),(a+2)^s\right).$$

Доказательство. Действительно, $V(K(T)) = 2^s I_s(a,T,0)$ и
$$I_s(a,T) = I_s(a,T,1) \leqslant I_s(a,T,\theta) \leqslant I_s(a,T,-1) = J_s(a,T),$$
поэтому
$$\left|I_s(a,T,\theta) - 2^{-s}V(K(T))\right| \leqslant \max\left(2^{-s}V(K(T)) - I_s(a,T), J_s(a,T) - 2^{-s}V(K(T))\right),$$
в силу монотонного убывания величины $I_s(a,T,\theta)$ при изменении θ от -1 до 1.

Для первой разности под знаком максимума, которую обозначим через M_1, имеем:
$$M_1 = 2^{-s}V(K(T)) - I_s(a,T) = \sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!} - (-1)^{s+1}(T-a^s) - T\sum_{n=1}^{s-1}\frac{(\ln T - s\ln a)^n(-1)^{s-1-n}}{n!} =$$
$$= (-1)^{s+1}a^s + T(1+(-1)^s) + \sum_{n=1}^{s-1}\frac{T\ln^n T(1+(-1)^{s-n})}{n!} +$$
$$+ T\sum_{n=1}^{s-1}\frac{(-1)^{s-n}}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k(-1)^{n-k}(s\ln a)^{n-k}\ln^k T.$$

Располагая по степеням $\ln^k T$, получим:

$$M_1 = (-1)^{s+1}a^s + T\left(1+(-1)^s\left(1+\sum_{n=1}^{s-1}\frac{1}{n!}(s\ln a)^n\right)\right) + \sum_{n=1}^{s-2}\frac{T\ln^n T(1+(-1)^{s-n})}{n!}+$$
$$+T\sum_{k=1}^{s-2}(-1)^{s-k}\ln^k T\sum_{n=k+1}^{s-1}\frac{C_n^k(s\ln a)^{n-k}}{n!} = (-1)^{s+1}a^s + T\left(1+(-1)^s\left(1+\sum_{n=1}^{s-1}\frac{1}{n!}(s\ln a)^n\right)\right)+$$
$$+T\sum_{n=1}^{s-2}\frac{\ln^n T}{n!}\left(1+(-1)^{s-n}\left(1+\sum_{k=1}^{s-1-n}\frac{(s\ln a)^k}{k!}\right)\right) = (-1)^{s+1}a^s + T\frac{(2+s\ln a)\ln^{s-2}T}{(s-2)!}+$$
$$+T\sum_{n=0}^{s-3}\frac{\ln^n T}{n!}\left(1+(-1)^{s-n}\left(1+\sum_{k=1}^{s-1-n}\frac{(s\ln a)^k}{k!}\right)\right) \leqslant T\frac{(2+s\ln a)\ln^{s-2}T}{(s-2)!}+e(a^s+1)T\ln^{s-3}T+a^s.$$

При $s=2$ справедливо более точное утверждение:

$$M_1 = T(2+2\ln a) - a^2.$$

Перейдём ко второй разности под знаком максимума, которую обозначим через M_2, имеем:

$$M_2 = J_s(a,T) - 2^{-s}V(K(T)) = a^s + \sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!}\sum_{k=0}^{s-1-n}C_s^k C_{s-k-1}^n a^k - \sum_{n=0}^{s-1}\frac{T\ln^n T}{n!} =$$
$$= a^s + \sum_{n=0}^{s-2}\frac{T\ln^n T}{n!}\left(\sum_{k=0}^{s-1-n}C_s^k C_{s-k-1}^n a^k - 1\right) = a^s + T\frac{(s-2+s\ln a)\ln^{s-2}T}{(s-2)!}+$$
$$+\sum_{n=0}^{s-3}\frac{T\ln^n T}{n!}\left(\sum_{k=0}^{s-1-n}\frac{s!(s-k-1)!}{k!(s-k)!n!(s-k-n-1)!}a^k - 1\right) = a^s + T\frac{(s-2+s\ln a)\ln^{s-2}T}{(s-2)!}+$$
$$+T\sum_{n=0}^{s-3}\frac{\ln^n T}{n!}\left(C_s^n\sum_{k=0}^{s-1-n}\frac{s-n}{s-k}C_{s-n-1}^k a^k - 1\right) \leqslant a^s + T\frac{(s-2+s\ln a)\ln^{s-2}T}{(s-2)!}+$$
$$+T\sum_{n=0}^{s-3}\frac{\ln^n T}{n!}C_s^n\frac{s-n}{n+1}(a+1)^{s-n-1} \leqslant a^s + T\frac{(s-2+s\ln a)\ln^{s-2}T}{(s-2)!} + (a+2)^s T\ln^{s-3}T.$$

При $s=2$ справедливо более точное утверждение:

$$M_2 = 2\ln aT + a^2.$$

Объединяя рассмотренные случаи, получаем утверждение леммы. □

3.2. Асимптотическая формула для числа точек в гиперболическом кресте

Рассмотрим произвольный базис решетки Λ:

$$\overrightarrow{\lambda}_j = (\lambda_{j1},\ldots,\lambda_{js}) \quad (j=1,\ldots,s)$$

и величину

$$A(\overrightarrow{\lambda}_1,\ldots,\overrightarrow{\lambda}_s) = \frac{1}{2}\max_{1\leqslant j\leqslant s}\sum_{\nu=1}^{s}|\lambda_{\nu j}|. \qquad (1)$$

Определим величину —

$$a(\Lambda) = \min_{\overrightarrow{\lambda}_1,\ldots,\overrightarrow{\lambda}_s}\max(1, A(\overrightarrow{\lambda}_1,\ldots,\overrightarrow{\lambda}_s)), \qquad (2)$$

где минимум берется по всем базисам $\vec{\lambda}_1, ..., \vec{\lambda}_s$ решетки Λ.

Далее до конца параграфа зафиксируем базис $\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s$ решетки Λ, для которого величина $A(\vec{\lambda}_1, \ldots, \vec{\lambda}_s)$ — минимальна, то есть $a(\Lambda) = \max(1, A(\vec{\lambda}_1, ..., \vec{\lambda}_s))$.

Для величины $D(T|\Lambda)$—количества ненулевых точек решетки Λ, лежащих в гиперболическом кресте $K(T)$, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Для любой решетки Λ справедливо асимптотическое равенство при $T \geqslant 3$*

$$D(T \mid \Lambda) = 2^s \sum_{n=0}^{s-1} \frac{T \ln^n T}{n!} C_{s-1}^n - 1 + \Theta C_1(\Lambda, T), \quad |\Theta| \leqslant 1, \tag{37}$$

где

$$C_1(\Lambda, T) = \begin{cases} \max\left(T(2+2\ln a) - a^2, 2(\ln a)T + a^2\right) & \text{при } s = 2, \\ T\frac{c_1(a,s)\ln^{s-2} T}{(s-2)!} + c_2(a,s) T \ln^{s-3} T + a^s, & \text{при } s > 2 \end{cases} \tag{38}$$

и

$$c_1(a,s) = \max\left(2 + s\ln a, s - 2 + s\ln a\right), \quad c_2(a,s) = \max\left(e(a^s + 1), (a+2)^s\right).$$

Доказательство. Из определения величины $D(T \mid \Lambda)$ следует, что

$$D(T \mid \Lambda) + 1 = \sum_{\substack{\vec{x} \in \Lambda \\ \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_s \leqslant T}} 1 = \sum_{\prod_{j=1}^s \overline{\lambda_{1j} m_1 + \cdots + \lambda_{sj} m_s} \leqslant T} 1 = \int\limits_{\Pi(T|\Lambda)} d\vec{t} \tag{39}$$

в силу леммы 10.

Применяя лемму 11, получим

$$D(T \mid \Lambda) + 1 = \frac{1}{\det \Lambda} \int\limits_{\Pi^*(T|\Lambda)} d\vec{t} \tag{40}$$

Пусть $a = a(\Lambda)$, тогда справедливы включения

$$\Pi_1(T, a) \subseteq \Pi^*(T \mid \Lambda) \subseteq \Pi_2(T, a), \tag{41}$$

так как

$$\prod_{j=1}^s u(|y_j|, a) \leqslant \prod_{j=1}^s \overline{y_j + \sum_{\nu=1}^s \lambda_{\nu j}(1/2 - \{1/2 + \sum_{k=1}^s y_k \lambda_{\nu k}^*\})} \leqslant \prod_{j=1}^s (|y_j| + a).$$

Из этого включения и леммы 11 следуют неравенства

$$\frac{2^s I_s(a, T, 1)}{\det \Lambda} = \frac{2^s I_s(a, T)}{\det \Lambda} \leqslant D(T \mid \Lambda) + 1 \leqslant \frac{2^s J_s(a, T)}{\det \Lambda} = \frac{2^s I_s(a, T, -1)}{\det \Lambda}. \tag{42}$$

Так как $I_s(a, T, \theta)$ непрерывно зависит от θ при $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$, то найдется θ с $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$ такое, что

$$D(T \mid \Lambda) + 1 = \frac{2^s I_s(a, T, \theta)}{\det \Lambda}.$$

Применяя оценку из леммы 15, получим

$$|D(T \mid \Lambda) + 1 - V(K(T))| \leqslant \begin{cases} \max\left(T(2+2\ln a) - a^2, 2(\ln a)T + a^2\right) & \text{при } s = 2, \\ T\frac{c_1(a,s)\ln^{s-2} T}{(s-2)!} + c_2(a,s) T \ln^{s-3} T + a^s, & \text{при } s > 2 \end{cases},$$

где

$$c_1(a,s) = \max\left(2 + s\ln a, s - 2 + s\ln a\right), \quad c_2(a,s) = \max\left(e(a^s + 1), (a+2)^s\right).$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. □

4. Заключение

В данной работе методом, который можно назвать методом параметрических множеств, получены две новые асимптотические формулы из теории гиперболической дзета-функции решёток.

Суть метода состоит в том, что для оценки числа точек решётки в некоторой области находится система вложенных множеств, параметризованная параметром, изменяющимся от -1 до 0, при этом при нулевом значении параметра имеем исходное множество. Так как при крайних значениях параметра имеем оценки сверху и снизу, то объем одного из множеств в точности равен искомому числу точек, а объем исходного множества задает главный член.

Данный метод позволил найти новые формы для главного члена асимптотических формул, отличный от работ [19] и [26] с более точной оценкой остаточного члена.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

2. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

3. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник 2017 Т. 18, вып. 4(64). С. 6–85.

4. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с. http://elibrary.ru/item.asp? id=20905960

5. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

6. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90–98.

7. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 13:4(2) (2013), 47–52.

8. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник 2006. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.

9. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // ДАН. Т. 412, № 3, Январь 2007. С. 302–304.

10. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.

11. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

12. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.

13. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. / Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

14. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: / Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

15. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

16. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

17. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

18. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. О гиперболической дзета-функции алгебраических решёток. // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. республик. конф. Ташкент, 1990. С. 22.

19. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета-функция алгебраических решёток. / Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, N 2327–В90.

20. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

21. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сб., 2015. Т. 16, вып. 4. С. 100–149.

22. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. Т. 63, вып. 4. 1998. С. 522–526.

23. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

24. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.

25. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2, вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77–87.

26. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.

27. Добровольский Н. Н. О числе целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып.1. С. 91–95.

28. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

29. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

30. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.

31. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

32. Реброва И. Ю. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток Тез. докл. III Междунар. конф. // Современные проблемы теории чисел: Тула: Изд-во ТГПУ, 1996. С. 119.

33. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

34. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. / Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.

35. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

36. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

37. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. 188 с.

38. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

39. Hua Loo Keng, Wang Yuan Applications of Number Theory to Numerical Analysis, – Springer–Verlag Berlin, 1981.

40. Griebel, M, "Sparse grids for the Schrodinger equation", ESAIM-Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modelisation Mathematique et Analyse Numerique, 41:2 (2007), 215

41. Adcock B., "Multivariate Modified Fourier Series and Application to Boundary Value Problems", Numer. Math., 115:4 (2010), 511–552

42. Shen J., Wang L.-L., "Sparse Spectral Approximations of High-Dimensional Problems Based on Hyperbolic Cross", SIAM J. Numer. Anal., 48:3 (2010), 1087–1109

43. Huybrechs D., Iserles A., Norsett S.P., "From High Oscillation to Rapid Approximation IV: Accelerating Convergence", IMA J. Numer. Anal., 31:2 (2011), 442–468

44. Shen J., Wang L.-L., Yu H., "Approximations By Orthonormal Mapped Chebyshev Functions For Higher-Dimensional Problems in Unbounded Domains", J. Comput. Appl. Math., 265 (2014), 264–275

45. Chernov A., Duong Pham, "Sparse Tensor Product Spectral Galerkin Bem For Elliptic Problems With Random Input Data on a Spheroid", Adv. Comput. Math., 41:1 (2015), 77–104

46. Chernov A., Dung D., "New Explicit-in-Dimension Estimates For the Cardinality of High-Dimensional Hyperbolic Crosses and Approximation of Functions Having Mixed Smoothness", J. Complex., 32:1 (2016), 92–121

47. Luo X., Xu X., Rabitz H., "On the fundamental conjecture of HDMR: a Fourier analysis approach", J. Math. Chem., 55:2 (2017), 632–660

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

2. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

3. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник 2017 Т. 18, вып. 4(64). С. 6–85.

4. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с. http://elibrary.ru/item.asp? id=20905960

5. Dobrovol'skaja L. P., Dobrovol'skij M. N., Dobrovol'skij N. M., Dobrovol'skij N. N., 2012, "Giperbolicheskie dzeta-funkcii setok i reshjotok i vychislenie optimal'nyh kojefficientov" *Chebyshevskii Sbornik* vol 13, №4(44) pp. 4–107.

6. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения» Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90–98.

7. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 13:4(2) (2013), 47–52.

8. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник 2006. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.

9. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok" , *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.

10. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.

11. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

12. Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6091–84.

13. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения. / Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

14. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: / Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

15. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

16. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

17. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

18. Добровольский Н. М., Ванькова В. С. О гиперболической дзета-функции алгебраических решёток. // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. республик. конф. Ташкент, 1990. С. 22.

19. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета-функция алгебраических решёток. / Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, N 2327–В90.

20. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 17, № 3 pp. 72–105.

21. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сб., 2015. Т. 16, вып. 4. С. 100–149.

22. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. Т. 63, вып. 4. 1998. С. 522–526.

23. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

24. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.

25. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2, вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77–87.

26. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.

27. Добровольский Н. Н. О числе целых точек в гиперболическом кресте при значениях параметра $1 \leqslant t < 21$ // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып.1. С. 91–95.

28. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

29. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

30. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.

31. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

32. Реброва И. Ю. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток Тез. докл. III Междунар. конф. // Современные проблемы теории чисел: Тула: Изд-во ТГПУ, 1996. С. 119.

33. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

34. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. / Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.

35. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

36. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

37. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

38. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

39. Hua Loo Keng, Wang Yuan Applications of Number Theory to Numerical Analysis, – Springer–Verlag Berlin, 1981.

40. Griebel, M, “Sparse grids for the Schrodinger equation”, ESAIM-Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modelisation Mathematique et Analyse Numerique, 41:2 (2007), 215

41. Adcock B., “Multivariate Modified Fourier Series and Application to Boundary Value Problems”, Numer. Math., 115:4 (2010), 511–552

42. Shen J., Wang L.-L., "Sparse Spectral Approximations of High-Dimensional Problems Based on Hyperbolic Cross", SIAM J. Numer. Anal., 48:3 (2010), 1087–1109
43. Huybrechs D., Iserles A., Norsett S.P., "From High Oscillation to Rapid Approximation IV: Accelerating Convergence", IMA J. Numer. Anal., 31:2 (2011), 442–468
44. Shen J., Wang L.-L., Yu H., "Approximations By Orthonormal Mapped Chebyshev Functions For Higher-Dimensional Problems in Unbounded Domains", J. Comput. Appl. Math., 265 (2014), 264–275
45. Chernov A., Duong Pham, "Sparse Tensor Product Spectral Galerkin Bem For Elliptic Problems With Random Input Data on a Spheroid", Adv. Comput. Math., 41:1 (2015), 77–104
46. Chernov A., Dung D., "New Explicit-in-Dimension Estimates For the Cardinality of High-Dimensional Hyperbolic Crosses and Approximation of Functions Having Mixed Smoothness", J. Complex., 32:1 (2016), 92–121
47. Luo X., Xu X., Rabitz H., "On the fundamental conjecture of HDMR: a Fourier analysis approach", J. Math. Chem., 55:2 (2017), 632–660

Получено 04.07.2018
Принято к печати 15.10.2018