ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-95-108

О моноиде квадратичных вычетов[1]

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственного университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Калинина Алина Олеговна — студентка механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: kalininaalina2008@rambler.ru
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Геофизического центр РАН.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе изучается дзета-функция моноида квадратичных вычетов по простому модулю p. Моноид квадратичных вычетов задается равенством

$$M_{p,2}=\left\{a\in\mathbb{N}\left|\left(\frac{a}{p}\right)=1\right.\right\}=\bigcup_{\nu=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(r_\nu+p\mathbb{N}_0\right),$$

где $\mathbb{N}_0=\{0\}\bigcup\mathbb{N}$ и $r_1<r_2<\ldots<r_{\frac{p-1}{2}}$ — наименьшая положительная система квадратичных вычетов по модулю p, соответственно, $r_{\frac{p+1}{2}}<\ldots<r_{p-1}$ — наименьшая положительная система квадратичных невычетов по модулю p.

Множество простых элементов моноида $M_{p,2}$ состоит из множества простых чисел $\mathbb{P}_p^{(1)}$ и множества псевдопростых чисел $\mathbb{P}_p^{(2)}\cdot\mathbb{P}_p^{(2)}$:

$$P(M_{p,2})=\mathbb{P}_p^{(1)}\bigcup\left(\mathbb{P}_p^{(2)}\cdot\mathbb{P}_p^{(2)}\right),$$

где множество простых чисел $\mathbb{P}$ разбивается на два бесконечных подмножества $\mathbb{P}_p^{(\nu)}$ $(\nu=1,2)$ и одноэлементное множество $\{p\}$:

$$\mathbb{P}=\mathbb{P}_p^{(1)}\bigcup\mathbb{P}_p^{(2)}\bigcup\{p\},\quad \mathbb{P}_p^{(\nu)}=\left\{q\in\mathbb{P}\left|\left(\frac{q}{p}\right)=3-2\nu\right.\right\}\quad(\nu=1,2).$$

Моноид $M_{p,2}$ разлагается в произведение двух взаимно простых моноидов $M_{p,2}=M_{p,2}^{(1)}\cdot M_{p,2}^{(2)}$, где

$$M_{p,2}^{(\nu)}=\left\{a\in M_{p,2}\left|a=\prod_{j=1}^{n}q_j^{\alpha_j},\,q_j\in\mathbb{P}_p^{(\nu)}\right.\right\},\quad \nu=1,2.$$

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

В статье изучаются свойства функции распределения простых элементов $\pi_{M^{(\nu)}_{p,2}}(x)$ для $\nu = 1, 2$. Отметим, что $\pi_{M_{p,2}}(x) = \pi_{M^{(1)}_{p,2}}(x) + \pi_{M^{(2)}_{p,2}}(x)$. Показано, что

$$\pi_{M^{(1)}_{p,2}}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{2} + \frac{p-1}{2} x e^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right)$$

и

$$\pi_{M^{(2)}_{p,2}}(x) = \frac{x\ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}\right),$$

где β_1 — исключительный ноль исключительного характера χ_1 по модулю p.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, А. О. Калинина, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 3, С. 95–108.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-95-108

On the monoid of quadratic residues

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate Professor of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry of Tula state pedagogical University L. N. Tolstoy.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Kalinina Alina Olegovna — student of mechanics and mathematics faculty of Moscow state University named after M. V. Lomonosov.
e-mail: kalininaalina2008@rambler.ru
Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Geophysical centre of RAS.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

In this paper we study the Zeta function of the monoid of quadratic residues modulo a simple p. The monoid of quadratic residues is given by

$$M_{p,2} = \left\{a \in \mathbb{N} \,\middle|\, \left(\frac{a}{p}\right) = 1\right\} = \bigcup_{\nu=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(r_\nu + p\mathbb{N}_0\right),$$

where $\mathbb{N}_0 = \{0\}\bigcup\mathbb{N}$ and $r_1 < r_2 < \ldots < r_{\frac{p-1}{2}}$ — the smallest positive system of quadratic residues modulo p, respectively, $r_{\frac{p+1}{2}} < \ldots < r_{p-1}$ — the smallest positive system of quadratic residuals modulo p.

The set of simple elements of a monoid $M_{p,2}$ consists of a set of Prime numbers $\mathbb{P}_p^{(1)}$ and a set of pseudo-Prime numbers $\mathbb{P}_p^{(2)}\cdot\mathbb{P}_p^{(2)}$:

$$P(M_{p,2}) = \mathbb{P}_p^{(1)}\bigcup\left(\mathbb{P}_p^{(2)}\cdot\mathbb{P}_p^{(2)}\right),$$

where the Prime set $\mathbb{P}$ is split into two infinite subsets $\mathbb{P}_p^{(\nu)}$ $(\nu = 1,2)$ and the singleton set $\{p\}$:

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_p^{(1)}\bigcup\mathbb{P}_p^{(2)}\bigcup\{p\},\quad \mathbb{P}_p^{(\nu)} = \left\{q\in\mathbb{P}\,\middle|\,\left(\frac{q}{p}\right) = 3-2\nu\right\}\quad (\nu = 1,2).$$

The monoid $M_{p,2}$ decomposes into a product of two mutually simple monoids $M_{p,2} = M_{p,2}^{(1)}\cdot M_{p,2}^{(2)}$, where

$$M_{p,2}^{(\nu)} = \left\{a\in M_{p,2}\,\middle|\,a = \prod_{j=1}^{n} q_j^{\alpha_j},\ q_j\in\mathbb{P}_p^{(\nu)}\right\},\quad \nu = 1,2.$$

The paper studies the properties of the distribution function of simple elements $\pi_{M_{p,2}^{(\nu)}}(x)$ for $\nu = 1,2$. Note that $\pi_{M_{p,2}}(x) = \pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x) + \pi_{M_{p,2}^{(2)}}((x)$. It is shown that

$$\pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{li}x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{2} + \frac{p-1}{2}xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right)$$

and

$$\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x) = \frac{x\ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}\right),$$

where β_1 — exceptional zero of exceptional character χ_1 modulo p.

In conclusion, the actual problems with Zeta functions of monoids of natural numbers requiring further research are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.

1. Введение

Пусть $p > 2$ — простое число и $\mathbb{Z}_p = \left\{\overline{\overline{0}},\ldots,\overline{\overline{p-1}}\right\}$ — простое поле классов вычетов[2] по модулю p. $\mathbb{Z}_p^* = \left\{\overline{\overline{1}},\ldots,\overline{\overline{p-1}}\right\}$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{Z}_p$ и через $\mathbb{Z}_{p,2}^*$ будем обозначать подгруппу квадратичных вычетов по модулю p, которая, как хорошо известно, имеет индекс $\left[\mathbb{Z}_p^* : \mathbb{Z}_{p,2}^*\right] = 2$. Через $r_1 < r_2 < \ldots < r_{\frac{p-1}{2}}$ будем обозначать наименьшую положительную систему квадратичных вычетов по модулю p, соответственно, через $r_{\frac{p+1}{2}} < \ldots < r_{p-1}$ — наименьшую положительную систему квадратичных невычетов по модулю p.

В работах [6], [7] начато исследование дзета-функций мультипликативных моноидов натуральных чисел. В данной работе нас будет интересовать моноид $M_{p,2}$ всех натуральных чисел,

[2]Здесь и далее через $\overline{\overline{a}}$ обозначается класс вычетов чисел сравнимых с a по модулю p.

являющихся квадратичными вычетами по модулю p. Таким образом[3],

$$M_{p,2} = \left\{ a \in \mathbb{N} \,\middle|\, \left(\frac{a}{p}\right) = 1 \right\} = \bigcup_{\nu=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(r_\nu + p\mathbb{N}_0 \right),$$

где $\mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N}$.

При изучении моноидов натуральных чисел существенную роль играют простые элементы моноида. Если M — произвольный моноид натуральных чисел, то $P(M)$ — множество его простых элементов состоит из тех элементов моноида M отличных от единицы, которые нельзя представить в виде произведения других неединичных элементов моноида M. Таким образом, если простое число $p \in M$, то $p \in P(M)$, но, вообще говоря, не все элементы из $P(M)$ являются простыми числами. В $P(M)$ могут входить и псевдопростые числа. Элемент q из M, являющийся составным числом, будет псевдопростым числом в M, если ни один его собственный делитель не является элементом из M.

Разобьём множество простых чисел $\mathbb{P}$ на два бесконечных подмножества $\mathbb{P}_p^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2)$ и одноэлементное множество $\{p\}$:

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_p^{(1)} \bigcup \mathbb{P}_p^{(2)} \bigcup \{p\}, \quad \mathbb{P}_p^{(\nu)} = \left\{ q \in \mathbb{P} \,\middle|\, \left(\frac{q}{p}\right) = 3 - 2\nu \right\} \quad (\nu = 1, 2).$$

Нетрудно понять, что множество простых элементов моноида $M_{p,2}$ состоит из множества простых чисел $\mathbb{P}_p^{(1)}$ и множества псевдопростых чисел $\mathbb{P}_p^{(2)} \cdot \mathbb{P}_p^{(2)}$:

$$P(M_{p,2}) = \mathbb{P}_p^{(1)} \bigcup \left(\mathbb{P}_p^{(2)} \cdot \mathbb{P}_p^{(2)} \right).$$

Это разбиение соответствует разложению моноида $M_{p,2}$ в произведение двух взаимно простых моноидов $M_{p,2} = M_{p,2}^{(1)} \cdot M_{p,2}^{(2)}$, где

$$M_{p,2}^{(\nu)} = \left\{ a \in M_{p,2} \,\middle|\, a = \prod_{j=1}^{n} q_j^{\alpha_j},\, q_j \in \mathbb{P}_p^{(\nu)} \right\}, \quad \nu = 1, 2.$$

Ясно, что при $\nu = 1$ показатели степени $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные натуральные числа, а при $\nu = 2$ они удовлетворяют дополнительному условию четности суммы:

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n \equiv 0 \pmod 2.$$

В работе [7] дано описание общего вида моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы. В случае произвольного моноида M натуральных чисел общий вид $P(M)$ множества его простых элементов очень просто описать. А именно, $P(M)$ является максимальным множеством элементов из M таким, что ни один элемент из $P(M)$ не делится ни на какой другой элемент из $P(M)$. Через $\pi_M(x)$ будем обозначать количество простых элементов в моноиде M, не превосходящих x.

Если $\mathbb{P}^*$ — произвольное подмножество простых чисел, то простейшим примером моноида с однозначным разложением на простые множители является моноид $M(\mathbb{P}^*)$, образованный множеством простых $\mathbb{P}^*$:

$$M(\mathbb{P}^*) = \left\{ a \in \mathbb{N} \,\middle|\, a = \prod_{j=1}^{n} p_j^{\alpha_j},\, p_j \in \mathbb{P}^* \right\}.$$

[3]Здесь и далее, как обычно, $\left(\frac{a}{p}\right)$ — символ Лежандра числа a по модулю p.

Так как множество простых элементов $P(M)$ может содержать псевдопростые числа, то можно определить порядок простого элемента $q \in P(M)$ как величину $V(q)$ — общее число простых делителей числа q с учетом их кратности.

Таким образом, простые числа p из $P(M)$ выделяются среди всех простых элементов q, как те, у которых порядок равен 1.

Согласно предыдущему определению все простые элементы в моноиде $M_{p,2}^{(1)}$ имеют порядок 1, то есть являются обычными простыми числам, которые одновременно являются квадратичными вычетами по модулю p, таким образом, $M_{p,2}^{(1)} = M\left(\mathbb{P}_p^{(1)}\right)$. А все простые элементы из моноида $M_{p,2}^{(2)}$ имеют порядок 2 и являются псевдопростыми числами, то есть составными числами, равными произведению двух простых чисел, каждое из которых квадратичный невычет по модулю p. Таким образом, справедливо равенство $M_{p,2}^{(2)} = M\left(\mathbb{P}_p^{(2)} \cdot \mathbb{P}_p^{(2)}\right)$.

Если через A^n обозначать произведение числовых множеств $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ из n сомножителей, которое состоит из всевозможных произведений $a_1 a_2 \ldots a_n$ чисел из A, то можно записать равенства:

$$M_{p,2}^{(1)} = \{1\} \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}_p^{(1)}\right)^n, \quad M_{p,2}^{(2)} = \{1\} \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{P}_p^{(2)}\right)^{2n}.$$

Обозначим через $\zeta(M|\alpha)$ дзета-функцию моноида M:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда, а через $P(M|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{q \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{q^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha) \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M.$$

В частности,

$$\zeta\left(M_{p,2}^{(1)} \middle| \alpha\right) = P\left(M_{p,2}^{(1)} \middle| \alpha\right), \quad \sigma_{M_{p,2}^{(1)}} = 1.$$

Будем называть каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел представление вида

$$x = q_1^{\alpha_1} \ldots q_k^{\alpha_k}, \quad 1 < q_1 < \ldots < q_k, \quad q_1, \ldots, q_k \in P(M).$$

Через $k(x)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа x, тогда эйлерово произведение $P(M|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}.$$

Таким образом, равенство эйлерова произведения и дзета-функции моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде.

Так как в моноиде $M_{p,2}^{(2)}$ нет однозначности разложения на простые элементы, то

$$\zeta\left(M_{p,2}^{(2)}\middle|\alpha\right)\neq P\left(M_{p,2}^{(2)}\middle|\alpha\right).$$

Из равенства для моноидов $M_{p,2}=M_{p,2}^{(1)}\cdot M_{p,2}^{(2)}$ в силу их взаимной простоты следует равенство для дзета-функций:

$$\zeta(M_{p,2}|\alpha)=\zeta\left(M_{p,2}^{(1)}\middle|\alpha\right)\cdot\zeta\left(M_{p,2}^{(2)}\middle|\alpha\right).$$

В моноиде $M_{p,2}^{(2)}$ есть подмоноид $M_{p,2}^{(2,2)}$ с однозначным разложение на простые элементы — это моноид, образованный из квадратов простых чисел, квадратичных невычетов по модулю p:

$$M_{p,2}^{(2,2)}=\left\{a\in\mathbb{N}\middle|a=p_1^{2\alpha_1}\dots p_n^{2\alpha_n},\quad p_1,\dots,p_n\in\mathbb{P}_p^{(2)}\right\}.$$

Если через $R_{p,2}^{(2)}$ обозначить множество радикалов четного порядка[4], образованное из простых чисел, квадратичных невычетов по модулю p:

$$R_{p,2}^{(2)}=\left\{a\in\mathbb{N}\middle|a=p_1\dots p_{2n},\quad p_1<\dots<p_{2n}\in\mathbb{P}_p^{(2)}\right\},$$

то будут справедливы равенства:

$$M_{p,2}^{(2)}=M_{p,2}^{(2,2)}\cdot R_{p,2}^{(2)},\quad \zeta\left(M_{p,2}^{(2)}\middle|\alpha\right)=\zeta\left(M_{p,2}^{(2,2)}\middle|\alpha\right)\cdot\zeta\left(R_{p,2}^{(2)}\middle|\alpha\right),\quad \zeta\left(M_{p,2}^{(2,2)}\middle|\alpha\right)=P\left(M_{p,2}^{(2,2)}\middle|\alpha\right).$$

Заметим, что справедливо интересное равенство эйлеровых произведений:

$$P\left(M_{p,2}^{(2,2)}\middle|\alpha\right)=P\left(M\left(\mathbb{P}_p^{(2)}\right)\middle|2\alpha\right),$$

из которого следует, что $\zeta\left(M_{p,2}^{(2,2)}\middle|\alpha\right)$ не имеет нулей при $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$.

Цель данной статьи — изучить свойства функции распределения простых элементов $\pi_{M_{p,2}^{(\nu)}}(x)$ для $\nu=1,2$. Отметим, что $\pi_{M_{p,2}}(x)=\pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x)+\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x)$.

2. Общие формулы для числа простых и псевдопростых

Пусть, как обычно, $\pi(x,a,p)$ — количество простых чисел q, не превосходящих x, для которых $q\equiv a\pmod p$, тогда с помощью этих обозначений можно легко написать выражение для $\pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x)$ и $\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x)$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x)=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}\pi(x,r_j,p).$$

[4]Термин радикал мы используем как современный синоним понятия бесквадратное число. Таким образом, число n — радикал, если оно равно своему радикалу, то есть все простые делители числа n входят в него в первой степени.

Доказательство. Действительно, если

$$q \leqslant x, \quad q \equiv r_j \pmod p, \quad j = 1, \ldots, \frac{p-1}{2},$$

то $q \in \mathbb{P}_p^{(1)}$.

Если $q \leqslant x$ и $q \in \mathbb{P}_p^{(1)}$, то найдется единственный квадратичный вычет r_j по модулю p такой, что

$$q \equiv r_j \pmod p.$$

Отсюда следует утверждение леммы.
□

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x) = \sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \sum_{\substack{q_1 \leqslant \sqrt{x}, \\ q_1 \equiv r_j \pmod p}} \sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \left(\pi\left(\frac{x}{q_1}, r_i, p\right) - \pi\left(q_1 - 1, r_i, p\right) \right).$$

Доказательство. Действительно, псевдопростое число $q \in P(M_{p,2}^{(2)})$, и непревосходящее x, имеет вид $q = q_1 q_2$, $1 < q_1 \leqslant \sqrt{x}$, $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \frac{x}{q_1}$, $q_1 \equiv r_j \pmod p$, $q_2 \equiv r_i \pmod p$, где $\frac{p+1}{2} \leqslant i, j \leqslant p-1$.

Так как количество q_2, удовлетворяющих условиям $q_2 \equiv r_i \pmod p$ и $q_1 \leqslant q_2 \leqslant \frac{x}{q_1}$, равно $\pi\left(\frac{x}{q_1}, r_i, p\right) - \pi(q_1 - 1, r_i, p)$, то лемма доказана. □

3. Вспомогательные утверждения

Прежде всего, сформулируем неравенство Чебышёва. 24 мая 1848 г. П. Л. Чебышёв представил в Санкт-Петербургскую Академию наук мемуар “Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины” (Полн. собр. соч., т. I, с. 173–190). Таким образом, в этом году исполнилось 170 лет со дня выхода этой принципиальной работы, с которой началась современная теория распределения простых чисел.

Во втором мемуаре он доказал оценки

$$(0,92\ldots)\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant (1,105\ldots)\frac{x}{\ln x}. \tag{1}$$

Обозначим через $c_1 = 0,92\ldots$ и $c_2 = 1,105\ldots$ константы из неравенств Чебышёва для функции $\pi(x)$.

Заметим, что конечная разность $\Delta\pi(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$ является на множестве натуральных чисел характеристической функцией множества простых чисел. Аналогично, конечная разность $\Delta\pi(n, l, p) = \pi(n, l, p) - \pi(n-1, l, p)$ является на множестве натуральных чисел характеристической функцией множества простых чисел q вида $q = l + kp$.

Ещё нам потребуются следующие асимптотические равенства, которые уже стали классическими и получены с помощью дзета-функции Римана и L-функций Дирихле. Пусть β_1 — исключительный ноль исключительного характера χ_1 по модулю k, тогда $\frac{3}{4} \leqslant \beta_1 < 1$ (см. [11], стр. 150–151, 157).

Теорема 1. *Равенство*

$$\pi(x, l, k) = \frac{1}{\varphi(k)} \operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{\varphi(k)} + x e^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right) \tag{2}$$

выполняется равномерно при $k \leqslant \exp(c_{10}\sqrt{\ln x})$.

Доказательство. См. [11], стр. 157. □

Теорема 2. *При постоянном* k

$$\pi(x,l,k)=\frac{1}{\varphi(k)}\,\mathrm{li}\,x+O\left(xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right), \tag{3}$$

в частности,

$$\pi(x,l,k)\sim\frac{x}{\varphi(k)\ln x},\quad x\to\infty. \tag{4}$$

Доказательство. См. [11], стр. 157. □

Теорема 3. *При постоянном* k

$$\pi(x,l,k)=\frac{x}{\varphi(k)\ln x}\left(1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right),\quad x\to\infty. \tag{5}$$

Доказательство. См. [11], стр. 158. □

Теорема 4. *При* $x\to\infty$ *имеют место соотношения*

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+a+O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{6}$$

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}=B\ln x+O\left(1\right). \tag{7}$$

Здесь a *и* B *— некоторые константы, причём* $B>0$.

Доказательство. См. [11], стр. 28–30. На стр. 92 дается вариант теоремы с более точным остаточным членом чем в формуле (6):

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+\gamma-\sum_{p}\sum_{m\geqslant 2}\frac{1}{mp^m}+O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right).$$

На стр. 94 дается более точное выражение формулы (7) в виде

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{e^{-\gamma}}{\ln x}\left(1+O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)\right).$$

Здесь γ — константа Эйлера,

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}-\ln n\right)=\int\limits_0^1\frac{1-e^{-u}}{u}du-\int\limits_1^\infty\frac{e^{-u}}{u}du.$$

□

Из теорем 3 и 4 докажем следующий результат.

Теорема 5. *При постоянном* k *и* $\frac{3}{4}\leqslant\beta_1<1$ *справедливы соотношения:*

$$\sum_{\substack{q\leqslant x,\\ q\equiv l\pmod k}}\frac{1}{q}=\frac{1}{\varphi(k)}\left(\ln\ln x+a_1+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right),\quad x\to\infty, \tag{8}$$

$$\sum_{l=1,\,(l,k)=1}^{k-1}\ \sum_{\substack{q\leqslant x,\\ q\equiv l\pmod k}}\frac{1}{q^{\beta_1}}=O\left(\frac{x^{1-\beta_1}}{(1-\beta_1)\ln x}\right), \tag{9}$$

где a_1 *— некоторая константа.*

Доказательство. Действительно, пользуясь теоремой 3, получим:

$$\sum_{\substack{q\leqslant x,\\ q\equiv l \pmod k}} \frac{1}{q} = \sum_{n\leqslant x} \frac{\Delta\pi(n,l,k)}{n} = \frac{\pi([x],l,k)}{[x]} + \sum_{n=2}^{[x]-1} \pi(n,l,k)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)\ln[x]}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) + \sum_{n=2}^{[x]-1} \frac{1}{\varphi(k)(n+1)\ln n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)}\left(\ln\ln x + a_1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)$$

и соотношение (8) доказано.

Аналогично, получим

$$\sum_{\substack{q\leqslant x,\\ q\equiv l \pmod k}} \frac{1}{q^{\beta_1}} = \sum_{n\leqslant x} \frac{\Delta\pi(n,l,k)}{n^{\beta_1}} = \frac{\pi([x],l,k)}{[x]^{\beta_1}} + \sum_{n=2}^{[x]-1} \pi(n,l,k)\left(\frac{1}{n^{\beta_1}} - \frac{1}{(n+1)^{\beta_1}}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[x]^{1-\beta_1}}{\varphi(k)\ln[x]}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) + \sum_{n=2}^{[x]-1} \frac{\beta_1}{\varphi(k)n^{\beta_1}\ln n}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right) = \frac{1}{\varphi(k)}O\left(\frac{x^{1-\beta_1}}{(1-\beta_1)\ln x}\right)$$

и теорема полностью доказана. □

4. Количество простых

Сначала выведем асимптотическую формулу для числа простых в моноиде $M_{p,2}^{(1)}$.

Теорема 6. *Для количества простых чисел в моноиде* $M_{p,2}^{(1)}$ *при* $p < \exp(c_{10}\sqrt{\ln x})$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x) = \frac{1}{2}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{2} + \frac{p-1}{2} x e^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right).$$

Доказательство. Так как $p < \exp(c_{10}\sqrt{\ln x})$, то $r_j < \exp(c_{10}\sqrt{\ln x})$ для $1 \leqslant j \leqslant p-1$. Поэтому по теореме 1 имеем:

$$\pi(x, r_j, p) = \frac{1}{p-1}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{p-1} + x e^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right).$$

Применяя лемму 1, получим:

$$\pi_{M_{p,2}^{(1)}}(x) = \sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\left(\frac{1}{p-1}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{p-1} + x e^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x^{\beta_1}}{2} + \frac{p-1}{2} x e^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right)$$

и теорема доказана. □

5. Количество псевдопростых

Перейдём к выводу асимптотической формулы для числа псевдопростых чисел в моноиде $M_{p,2}^{(2)}$. Для этого перепишем утверждение леммы 2 в виде

$$\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x) = S_1(x,p) - S_2(x,p),$$

где

$$S_1(x,p)=\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\pi\left(\frac{x}{q_1},r_i,p\right),$$

$$S_2(x,p)=\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\pi\left(q_1-1,r_i,p\right).$$

Сумму $S_2(x,p)$ оценим грубо с помощью неравенства Чебышёва.

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$S_2(x,p)\leqslant 4c_2^2\frac{x}{\ln^2 x}.$$

Доказательство. Действительно, при $q_1\leqslant\sqrt{x}$ имеем:

$$\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\pi\left(q_1-1,r_i,p\right)\leqslant\pi\left(\sqrt{x}\right),$$

поэтому

$$S_2(x,p)\leqslant\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\pi\left(\sqrt{x}\right)\leqslant\pi^2\left(\sqrt{x}\right)\leqslant\left(c_2\frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}\right)^2=4c_2^2\frac{x}{\ln^2 x}.$$

□

Введём обозначения

$$S_3(x,p)=\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\frac{1}{p-1}\operatorname{li}\left(\frac{x}{q_1}\right)=\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\frac{1}{2}\operatorname{li}\left(\frac{x}{q_1}\right),$$

$$S_4(x,p)=\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\sum_{i=\frac{p+1}{2}}^{p-1}O\left(\frac{\left(\frac{x}{q_1}\right)^{\beta_1}}{p-1}+\left(\frac{x}{q_1}\right)e^{-c_9\sqrt{\ln\left(\frac{x}{q_1}\right)}}\right)=$$

$$=\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}O\left(\frac{\left(\frac{x}{q_1}\right)^{\beta_1}}{2}+\frac{p-1}{2}\left(\frac{x}{q_1}\right)e^{-c_9\sqrt{\ln\left(\frac{x}{q_1}\right)}}\right).$$

Ясно, что в силу теоремы 1

$$S_1(x,p)=S_3(x,p)+S_4(x,p).$$

Лемма 4. *Справедлива оценка*

$$S_4(x,p)=O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}+\frac{p-1}{4}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\ln\ln\sqrt{x}\right).$$

Доказательство. Действительно,

$$e^{-c_9\sqrt{\ln\left(\frac{x}{q_1}\right)}} \leqslant e^{-c_9\sqrt{\ln(\sqrt{x})}} = e^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}.$$

Поэтому

$$S_4(x,p) = O\left(\frac{x^{\beta_1}}{2}\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\frac{1}{q_1^{\beta_1}} + \frac{p-1}{2}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\frac{1}{q_1}\right).$$

Воспользуемся теоремой 5, получим

$$S_4(x,p) = O\left(\frac{x^{\beta_1}}{2}\frac{x^{1-\beta_1}}{(1-\beta_1)\ln x} + \frac{p-1}{2}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\frac{1}{2}\left(\ln\ln\sqrt{x} + a_1 + O\left(\frac{1}{\ln\sqrt{x}}\right)\right)\right) =$$
$$= O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x} + \frac{p-1}{4}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\ln\ln\sqrt{x}\right).$$

□

Лемма 5. *Справедлива оценка*

$$S_3(x,p) = \frac{x\ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{2\ln x}\right).$$

Доказательство. Действительно, имеем:

$$\sum_{\substack{q_1\leqslant\sqrt{x},\\ q_1\equiv r_j \pmod p}}\frac{1}{2}\,\mathrm{li}\left(\frac{x}{q_1}\right) = \pi(\sqrt{x}, r_j, p)\frac{1}{2}\,\mathrm{li}\left(\sqrt{x}\right) + \int_2^{\sqrt{x}}\frac{\pi(t,r_j,p)x}{t^2\ln\left(\frac{x}{t}\right)}dt =$$

$$= O\left(\frac{x}{2(p-1)\ln^2 x}\right) + \int_2^{\sqrt{x}}\frac{tx}{(p-1)(\ln t)t^2\ln\left(\frac{x}{t}\right)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\ln t}\right)\right)dt =$$

$$= O\left(\frac{x}{2(p-1)\ln^2 x}\right) + O\left(\int_2^{\sqrt{x}}\frac{x}{(p-1)(\ln^2 t)t\ln\left(\frac{x}{t}\right)}dt\right) + \int_2^{\sqrt{x}}\frac{x}{(p-1)(\ln t)t\ln\left(\frac{x}{t}\right)}dt =$$

$$= O\left(\frac{x}{2(p-1)\ln^2 x}\right) + O\left(\frac{x}{(p-1)\ln x}\right) + \frac{x}{p-1}\int_{\ln 2}^{\ln\sqrt{x}}\frac{du}{u(\ln x - u)} =$$
$$= \frac{x\ln\ln x}{(p-1)\ln x} + O\left(\frac{x}{(p-1)\ln x}\right).$$

Отсюда следует, что

$$S_3(x,p) = \sum_{j=\frac{p+1}{2}}^{p-1}\left(\frac{x\ln\ln x}{(p-1)\ln x} + O\left(\frac{x}{(p-1)\ln x}\right)\right) =$$
$$= \frac{x\ln\ln x}{2\ln x} + O\left(\frac{x}{2\ln x}\right).$$

□

Теорема 7. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x)=\frac{x\ln\ln x}{2\ln x}+O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}\right).$$

Доказательство. Действительно, по леммам 3–5 имеем:

$$\pi_{M_{p,2}^{(2)}}(x)=S_1(x,p)-S_2(x,p)=S_1(x,p)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)=S_3(x,p)+$$
$$+O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}+\frac{p-1}{4}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\ln\ln\sqrt{x}\right)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)=$$
$$=\frac{x\ln\ln x}{2\ln x}+O\left(\frac{x}{2\ln x}\right)+O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}+\frac{p-1}{4}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\ln\ln\sqrt{x}\right)+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)=$$
$$=\frac{x\ln\ln x}{2\ln x}+O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}+\frac{p-1}{4}xe^{-\frac{c_9}{\sqrt{2}}\sqrt{\ln x}}\ln\ln\sqrt{x}\right)=\frac{x\ln\ln x}{2\ln x}+O\left(\frac{x}{(1-\beta_1)\ln x}\right).$$

□

6. Заключение

1. В работе рассмотрен моноид $M_{p,2}$ натуральных чисел, образованный подгруппой всех квадратичных вычетов по заданному простому модулю p. Для такого моноида множество простых элементов очень просто описывается: либо это простое число, которое является квадратичным вычетом по модулю p, либо это псевдопростое число, которое является произведением двух простых квадратичных невычетов. Поэтому для этого моноида оказалось возможным найти асимптотический закон распределения простых элементов.

2. Пусть $1<g_1<\ldots<g_{\varphi(p-1)}<p$ — наименьшая положительная система первообразных корней по модулю p. Можно рассмотреть $\varphi(p-1)$ моноидов $M(\mathbb{P}_{p,g})$ с однозначным разложением на простые множители:

$$\mathbb{P}_{p,g}=\{q\in\mathbb{P}\,|\,q\equiv g\pmod p\},$$

где g — произвольный первообразный корень по модулю p.

Рассмотрим моноид $M_1(\mathbb{P}_{p,g})=M(\mathbb{P}_{p,g})\bigcap\overline{\overline{1}}$, который уже не обладает однозначным разложением на простые элементы. Нетрудно понять, что множество его простых элементов $P(M_1(\mathbb{P}_{p,g}))$ задается равенством

$$P(M_1(\mathbb{P}_{p,g}))=(\mathbb{P}_{p,g})^{p-1},$$

то есть состоит из псевдопростых чисел порядка $p-1$. Таким образом, интересная задача нахождения асимптотического закона распределения простых элементов для этого моноида существенно усложняется. Мы надеимся в одной из следующих работ решить эту задачу.

3. Рассмотрим бесконечные множества $A_k(\mathbb{P}_{p,g})$ при $k=1,\ldots,p-1$, заданные равенствами

$$A_k(\mathbb{P}_{p,g})=\left\{a\in M(\mathbb{P}_{p,g})\,|\,a\equiv g^k\pmod p\right\}.$$

Ясно, что $A_{p-1}(\mathbb{P}_{p,g})=M_1(\mathbb{P}_{p,g})$.

На наш взгляд очень интересным является вопрос об аналогах теоремы Дэвенпорта–Хейльбронна для каждого из множеств $A_k(\mathbb{P}_{p,g})$ $1\leqslant k\leqslant p-1$.

В заключении авторы выражают свою благодарность за полезные обсуждения и внимание к работе профессору В. Н. Чубарикову.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.

2. С. М. Воронин Избранные труды: Математика / Под ред. А. А. Карацубы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. — 480 с.

3. С. М. Воронин, А. А. Карацуба Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

4. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Доклады академии наук 2007. Т. 412, № 3. С. 302–304.

5. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

6. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

7. Н. Н. Добровольский О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.

8. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 142–150.

9. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 106–123.

10. Н. Н. Добровольский, А. О. Калинина, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. ???–???.

11. К. Прахар Распределение простых чисел. — М.: МИР. 1967, 511 с.

12. И. Ю. Реброва, А. В. Кирилина Н. М. Коробов и теория гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. ???–???.

13. К. Хооли Применение методов решета в теории чисел. — М.: Наука, 1987, 20 с.

14. Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений, т. I–V. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1944–1951.

15. Чебышёв П. Л. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1955, 926 с.

16. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

17. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, “Around the Davenport–Heilbronn function”, *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.

2. Voronin S. M., 2006, *Izbrannye trudy: Matematika. Pod red. A. A. Karacuby*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moskva, 480 p.

3. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

4. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok" , *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.

5. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 17, № 3 pp. 72–105.

6. Dobrovolsky N. N., 2017, *The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, № 4. P. 187–207.

7. Dobrovolsky N. N., 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, № 1. P. 79–105.

8. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 142–150.

9. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 106–123.

10. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. ???–???.

11. Prahar K., 1967, *Raspredelenie prostyh chisel, per. s nem*, Izd-vo Mir, Moskva, 511 p.

12. I. Yu. Rebrova, A. V. Kirilina 2018, "N. M. Korobov and the theory of the hyperbolic zeta function of lattices" , //*Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2. P. ???–???.

13. C. Hooley 1987, "Applications of seive methods to the theory of numbers " ,*M.: Nauka*, 20 p.

14. Chebyshev P. L. 1944–1951 "Complete works, v. I–V. " , *M.-L.: Izd-vo AN SSSR*.

15. Chebyshev P. L. 1955, "Selected works." , *M.: Izd-vo AN SSSR*, 926 p.

16. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series" , *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

17. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

Получено 30.06.2018
Принято к печати 15.10.2018