ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-80-94

Константа Линника меньше 5

Xylouris Triantafyllos — Франкфурт-на-Майне, Германия.
e-mail: t.xylouris@gmail.com

Аннотация

Пусть a и q — положительные, целые числа. В 1944 г. Ю. В. Линник показал, что наименьшее простое число в арифметической прогрессии $modq$ меньше Cq^L с положительными константами C и L.

Основываясь на работе Хис-Брауна, мы доказываем, что $L = 5$ допустимо.

Ключевые слова: Константа Линника.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:
T. Xylouris, Linniks Konstante ist kleiner als 5 // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 80–94.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-80-94

Linniks Konstante ist kleiner als 5

Xylouris Triantafyllos — Frankfurt am Main, Germany.
e-mail: t.xylouris@gmail.com

Abstract

Seien a und q zwei teilerfremde, positive, ganze Zahlen. In 1944 bewies Y. Linnik, dass die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Progression $mod\ q$ kleiner als Cq^L ist mit positiven Konstanten C und L.

Aufbauend auf einer Arbeit von Heath-Brown beweisen wir, dass $L = 5$ zulässig ist.

Keywords: Linniks Konstante.

Bibliography: 24 titles.

For citation:
T. Xylouris, 2018, "Linniks Konstante ist kleiner als 5", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 80–94.

1. Einführung

Seien a und q zwei teilerfremde, positive, ganze Zahlen und

$$P(a,q) := \min\{p \equiv a(\mod q) \,|\, p \text{ Primzahl}\}.$$

In 1944 bewies Y. Linnik [15, 16]

$$P(a,q) < Cq^L$$

mit effektiv berechenbaren, positiven Konstanten C und L. Dies wird als Linniks Theorem und L als Linniks Konstante bezeichnet. Wir verweisen auf [12, §18], [11, S.265-270] und [24, §2.2] für eine weitergehende Einführung und Motivation. Mehrere Autoren haben zulässige Werte für L bewiesen:

Tabelle 1. Zulässige Werte für L

L	Jahr	Autor	Verweis
10000	1957	Pan	[18]
5448	1958	Pan	[19]
777	1965	Chen	[2]
630	1971	Jutila	[20, S.370]
550	1970	Jutila	[13]
168	1977	Chen	[3]
80	1977	Jutila	[14]
36	1977	Graham	[8]
20	1981	Graham	[10]
17	1979	Chen	[4]
16	1986	Wang	[21]
13.5	1989	Chen und Liu	[5]
11.5	1991	Chen und Liu	[6]
8	1991	Wang	[22]
5.5	1992	Heath-Brown	[11]
5.18	2011	Xylouris	[23]
5	2011	Xylouris	[24]

In [23] verwenden wir mehrere Verbesserungspotentiale, die Heath-Brown in [11, S.332f] beschreibt und beweisen Linniks Theorem mit $L = 5.18$. Unsere Arbeit [24] beinhaltet [23], sowie vier weitere technische Verbesserungen:

- Kleinere Anpassungen bei der Herleitung (fast) nullstellenfreier Regionen (§3 der vorliegenden Arbeit)
- Verwendung allgemeinerer Siebgewichte in einem Nullstellendetektor - es folgen bessere Abschätzungen der Nullstellendichte für Nullstellen weit weg von $s = 1$ (§4)
- Verallgemeinerung und Optimierung von Abschätzungen der Nullstellendichte für Nullstellen nahe $s = 1$ (§5)
- Verwendung einer allgemeineren Gewichtsfunktion in jener expliziten Formel, die Ausgangspunkt für unseren Beweis von Linniks Theorem ist (§6)

Die vorliegende Arbeit ist eine Zusammenfassung dieser vier technischen Verbesserungen aus [24]. Unser Hauptresultat lautet:

Theorem 1. *Seien a und q zwei teilerfremde, positive, ganze Zahlen. Dann ist*

$$P(a,q) < Cq^5$$

mit einer effektiv berechenbaren Konstanten C.

Genauer erhalten wir anstelle von 5 einen Wert, der geringfügig kleiner als 5 ist. Wenn wir unsere Computerberechnungen stark erweitern würden, dann vermuten wir, dass wir Linniks Theorem mit $L = 4.96$ beweisen könnten. Weiterhin erhalten wir nicht nur die Existenz einer Primzahl, sondern von $q^{3.21}$ Primzahlen, welche kleiner als q^5 sind für q groß genug [24, Lemma 6.2]. Ähnliche Aussagen folgen auch aus anderen Arbeiten zu Linniks Theorem.

Ausgangspunkt für den Beweis von Theorem 1 ist eine explizite Formel, welche die Primzahlen in arithmetischen Progressionen mit den Nullstellen Dirichletscher L-Funktionen nahe $s = 1$ in Verbindung bringt. Je weniger Dirichletsche L-Funktionen *mod* q eine Nullstelle nahe $s = 1$ haben, und je weiter weg diese potentiellen Nullstellen von $s = 1$ sind, desto mehr bedingt dies die Existenz kleiner Primzahlen ($< q^L$) in einer arithmetischen Progression *mod* q.

Ähnlich zu [11] verwenden wir Computerberechnungen. Diese haben wir mit der Software Maple und einem handelsüblichen Laptop im Jahr 2011 durchgeführt.

Ich möchte meinem Doktorvater Prof. Dr. B. Z. Moroz für seine konstante Unterstützung eingehend danken.

2. Notation

Für $q \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ bezeichne χ einen Dirichlet-Charakter *mod* q, χ_0 den Hauptcharakter *mod* q und $L(s, \chi)$ die zugehörige Dirichletsche L-Funktion. $(\operatorname{ord} \chi)$ bezeichne die Ordnung von χ in der Gruppe der Dirichlet-Charaktere *mod* q, $[x] := \max\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq x\}$ und

$$\mathscr{L} := \log q.$$

Für den Realteil einer komplexen Zahl z schreiben wir $\Re\{z\}$ und für den Imaginärteil $\Im\{z\}$. Die Resultate in dieser Arbeit werden meist für $q \geq q_0$ bewiesen, wobei q_0 eine effektiv berechenbare Konstante ist.

Um Linniks Konstante zu verbessern, genügt es die vorhandenen Abschätzungen zur Lage der Nullstellen Dirichletscher L-Funktionen im Rechteck

$$R := R(l) := \left\{ \sigma + it \in \mathbb{C} \mid 1 - \frac{\log \log \mathscr{L}}{3\mathscr{L}} \leq \sigma \leq 1,\ |t| \leq l \right\}$$

zu verbessern. Dabei ist $l \leq \mathscr{L}/10$ die positive Zahl aus [11, Lemma 6.1]. Diese Wahl für l garantiert, dass es keine Nullstellen leicht oberhalb oder unterhalb von R gibt, was die Berechnungen vereinfacht. Für ein festes q betrachten wir alle Nullstellen $\rho \in R$ von

$$P(s) := \prod_{\substack{\chi \pmod q \\ \chi \neq \chi_0}} L(s, \chi). \tag{1}$$

Sei ρ_1 eine Nullstelle von $P(s)$ in R, für die $\Re\{\rho_1\}$ maximal ist und sei χ_1 ein Charakter mit $L(\rho_1, \chi_1) = 0$. Wir führen diesen Prozess weiter, indem wir im k'ten Schritt ($k \geq 2$) die Nullstellen $\rho \in R$ von

$$\frac{P(s)}{L(s, \chi_1) L(s, \overline{\chi_1}) \cdot \ldots \cdot L(s, \chi_{k-1}) L(s, \overline{\chi_{k-1}})}$$

betrachten und eine Nullstelle ρ_k wählen mit maximalem Realteil und ein χ_k mit $L(\rho_k, \chi_k) = 0$. Wir führen dies weiter fort bis im betrachteten Produkt keine weiteren Dirichletschen L-Funktionen auftauchen. Es ist

$$\chi_i \neq \chi_j, \overline{\chi_j} \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Wir setzen

$$\rho_k = \beta_k + i\gamma_k, \quad \beta_k = 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda_k, \quad \gamma_k = \mathscr{L}^{-1}\mu_k.$$

Wir benennen noch eine weitere, potentielle Nullstelle ρ' von $L(s, \chi_1)$ wie folgt:

1. Wenn ρ_1 eine mehrfache Nullstelle ist, dann wähle $\rho' = \rho_1$.
2. Wenn χ_1 reell und ρ_1 komplex ist, dann wähle ρ' aus den Nullstellen in $R\backslash\{\rho_1, \overline{\rho_1}\}$, so dass $\Re\{\rho'\}$ maximal ist.
3. Ansonsten wähle ρ' aus den Nullstellen in $R\backslash\{\rho_1\}$, so dass $\Re\{\rho'\}$ maximal ist.

Analog zu vorher schreiben wir

$$\rho' = \beta' + i\gamma', \quad \beta' = 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda', \quad \gamma' = \mathscr{L}^{-1}\mu'.$$

Für Abschätzungen zur Nulstellendichte genügt es nur Nullstellen mit $\Im(\rho) \leq 1$ zu betrachten. Wir definieren

$$N(\lambda) := \#\{\chi \pmod q \mid \chi \neq \chi_0,\ L(s,\chi) \text{ hat eine Nullstelle in } \sigma \geq 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda,\ |t| \leq 1\}$$

und bezeichnen die $N(\lambda)$ dazugehörigen Charaktere durch

$$\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \ldots, \chi^{(N(\lambda))}.$$

Zu jedem der $N(\lambda)$ Charaktere χ wählen wir eine Nullstelle $\rho(\chi) = \rho^{(k)}$ mit maximalem Realteil und schreiben

$$\rho^{(k)} = \beta^{(k)} + i\gamma^{(k)}, \quad \beta^{(k)} = 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda^{(k)}.$$

Wir werden an vielen Stellen die Gewichtsfunktion

$$f(t) = \begin{cases} \int_{t-\gamma}^{\gamma} g(x)g(t-x)\,dx = -\frac{1}{30}t^5 + \frac{2\gamma^2}{3}t^3 - \frac{4\gamma^3}{3}t^2 + \frac{16\gamma^5}{15} & \text{falls } t \in [0, 2\gamma), \\ 0 & \text{falls } t \geq 2\gamma. \end{cases} \tag{2}$$

benutzen, sowie ihre Laplace-Transformierte

$$F(z) = \begin{cases} \frac{16\gamma^5}{15}z^{-1} - \frac{8\gamma^3}{3}z^{-3} + 4\gamma^2(1 + e^{-2\gamma z})z^{-4} & \\ \qquad\qquad +4(-1 + e^{-2\gamma z} + 2\gamma z e^{-2\gamma z})z^{-6} & \text{falls } z \neq 0, \\ \frac{8\gamma^6}{9} & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$

Die Funktion $f(t)$ ist nicht-negativ und erfüllt zwei Regularitätsbedingungen, die in [24, § 3.1.2] genauer beschrieben werden. Außerdem ist $F(z)$ als Laplace-Transformierte einer nicht-negativen Funktion monoton fallend in z.

3. Kleinere Anpassungen (fast) nullstellenfreier Regionen

Für $\lambda_1 < 0.348$ haben wir Linniks Theorem für $L = 4.9$ [11, Lemma 14.2]. Um Theorem 1 für den verbleibenden Fall $\lambda_1 \geq 0.348$ zu beweisen, benutzen wir eine Ungleichung der Form (vergleiche [23, (4.10), (4.17), (4.18)])

$$\sum_{\substack{p \text{ prim} \\ p \equiv a (\bmod q) \\ p \leq q^5}} w(p) > g_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda') \tag{3}$$

wobei g_1 monoton wachsend in λ_1, λ_2, λ_3 und λ' ist. Wir müssen zeigen, dass die rechte Seite von (3) positiv ist. Um diese nach unten abzuschätzen, können wir Abschätzungen der Form (vergleiche [23, Tabellen 1-10])

$$\lambda_1 \in [\lambda_{11}, \lambda_{12}] \Longrightarrow \lambda_1 \geq \widetilde{\lambda_{11}}, \quad \lambda_2 \geq \lambda_{21}, \quad \lambda_3 \geq \lambda_{31}, \quad \lambda' \geq \lambda'_{11}$$

verwenden mit konkreten Werten für λ_{11}, λ_{12}, λ_{21}, λ_{31} und λ'_{11}. Solche Abschätzungen sind äquivalent zu nullstellenfreien Regionen (im Fall von λ_1) oder fast nullstellenfreier Regionen (in den anderen Fällen) der Funktion $P(s)$ aus (1).

In [23] haben wir Abschätzungen für λ' hergeleitet mittels Ungleichungen der Form [23, Lemma 3.1]

$$\lambda' \geq g_2(\min(\lambda', \lambda_2)) \tag{4}$$

wobei g_2 monoton wachsend in $\min(\lambda', \lambda_2)$ ist. Sobald wir also eine untere Abschätzung für λ' beweisen, können wir diese wieder in (4) einsetzen und eventuell die untere Abschätzung für λ' weiter verbessern: Genauer benutzen wir vermöge [23, Table 7] ein größeres $\lambda^\star$ in den Berechnungen, die zu [23, Table 2] führen. Weiterhin benutzen wir $\lambda_1 \geq 0.44$ vermöge [23, Theorem 1.2]. Damit verbessern wir [23, Table 2] zu [24, Tabelle 2'], welche wir weiter unten notieren.

Um darüber hinaus den Beweis der Zulässigkeit von $L = 5$ im Fall von $\lambda_1 \in [0.68, 0.78]$ zu ermöglichen, unterscheiden wir mehrere Fälle in den Berechnungen, die zu [23, Table 9] führen. Damit erhalten wir [24, Tabelle 9]. Die erhöhte Anzahl der Fälle spiegelt sich in der erhöhten Anzahl der Zeilen in letzterer Tabelle wieder. Schlussendlich verändern wir die in [23, Table 10] betrachteten Fälle leicht und reduzieren das $\delta = 0.001$ zu $\delta = 0.0001$ in den entsprechenden Berechnungen. Damit erhalten wir [24, Tabelle 10].

Tabelle 2'. Verbesserte λ'-Abschätzungen.
(χ_1 oder ρ_1 komplex)

$\lambda_1 \leq$	$\lambda' >$	$\lambda^\star$	$C \leq$
0.46	1.85	1.56	0.0797
0.48	1.76	1.45	0.0598
0.50	1.67	1.36	0.0455
0.52	1.59	1.27	0.0332
0.54	1.51	1.19	0.0235
0.56	1.44	1.11	0.0150
0.58	1.36	1.04	0.0084
0.60	1.29	0.97	0.0026
0.62	1.22	0.91	0.0016
0.64	1.15	0.85	0.0010
0.66	1.08	0.79	0.0008
0.68	1.02	0.74	0.0007
0.70	0.96		-
0.72	0.93		-
0.74	0.91		-
0.76	0.89		-
0.78	0.86		-
0.80	0.84		-
0.82	0.83		-
0.827	0.827		-

Tabelle 9. λ_3-Abschätzungen.
(χ_1 komplex)

$\lambda_1 \in$	Bedingung	$\lambda_3 >$
$[0.62, 0.64]$	-	0.902
$[0.64, 0.66]$	-	0.898
$[0.66, 0.68]$	-	0.893
$[0.68, 0.70]$	-	0.888
$[0.68, 0.70]$	$\lambda_2 \leq 0.745$	1.054
$[0.70, 0.71]$	-	0.886
$[0.70, 0.71]$	$\lambda_2 \leq 0.745$	1.048
$[0.71, 0.72]$	-	0.883
$[0.71, 0.72]$	$\lambda_2 \leq 0.75$	1.036
$[0.72, 0.74]$	-	0.878
$[0.72, 0.74]$	$\lambda_2 \leq 0.76$	1.012
$[0.74, 0.78]$	-	0.868
$[0.74, 0.78]$	$\lambda_2 \leq 0.78$	0.996

Tabelle 10. λ_3-Abschätzungen
(χ_1 und ρ_1 reell)

$\lambda_1 \in$	$\lambda_3 >$
$[0.44, 0.60]$	1.176
$[0.60, 0.70]$	1.055
$[0.70, 0.80]$	0.952

4. Verbesserung der Nullstellendichte-Abschätzung für großes λ

Wir beweisen Linniks Theorem ausgehend von einer Ungleichung vom Typ (3), wobei g_1 von den Nullstellen der Charaktere χ_1, χ_2, χ_3 abhängt. Darüber hinaus hängt g_1 auch von den Nullstellen aller weiteren Dirichletschen L-Funktionen *mod* q ab (siehe [24, (6.31), (6.32)]). Deren Beitrag kann mit Hilfe von Abschätzungen der Nullstellendichte beschränkt werden, die in ihrer klassischen Form die maximale Anzahl aller Nullstellen aller Dirichletschen L-Funktionen modulo einem festen q beschränken.

Um Linniks Konstante zu verbessern, benutzt Heath-Brown eine angepasste Abschätzung, die nur eine Nullstelle (jene, deren Realteil am Nähesten zu $s = 1$ ist) für jede Dirichletsche L-Funktion betrachtet [11, Lemma 11.1]. Um Heath-Browns Abschätzung weiter zu verbessern, benutzen wir allgemeinere 'Siebgewichte' ψ_d im verwendeten 'Nullstellendetektor' [24, (3.28)]

$$1 \leq \left| \sum_{U<n<X\mathscr{L}} \Big(\sum_{d|n} \psi_d\Big)\Big(\sum_{d|n} \theta_d\Big)\chi(n) n^{-\rho(\chi)} e^{-n/X} \right| + O(\mathscr{L}^{-1}).$$

Letztere Abschätzung wird Nullstellendetektor genannt, weil nicht für zu viele, unterschiedliche ρ, diese Ungleichung gültig sein kann. Im Folgenden beschreiben wir kurz unseren Ansatz und das resultierende Lemma. Für mehr Details verweisen wir auf [24, §3.2, §5.1].

Seien $0 < u < v < x$ und $U = q^u$, $V = q^v$, $X = q^x$. Der Nullstellendetektor beinhaltet Gewichte ψ_d ($d \in \mathbb{N}$), die

$$\begin{aligned} \psi_d &= \mu(d) \qquad (1 \leq d \leq U), \\ \psi_d &= 0 \qquad (d \geq V), \\ \psi_d &\ll 1 \end{aligned}$$

erfüllen müssen. Um Linniks Konstante zu verbessern, sind die ψ_d so zu wählen, dass

$$\sum_{U<n\leq X} \Big(\sum_{d|n} \psi_d\Big)^2 n^{-1} \tag{5}$$

möglichst klein ausfällt. Heath-Brown wählt

$$\psi_d = \psi_d^{U,V} := \begin{cases} \mu(d) & \text{falls } 1 \leq d \leq U, \\ \mu(d)\frac{\log(V/d)}{\log(V/U)} & \text{falls } U \leq d \leq V, \\ 0 & \text{falls } V \leq d, \end{cases}$$

was ziemlich optimal wäre, falls $U = V$ (vergleiche [1]). Da aber $U < V$, gibt es hier eventuell die Möglichkeit die Wahl der ψ_d weiter zu optimieren. In der Tat ist dies möglich, indem eine passende Linearkombination

$$\psi_d = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \psi_d^{U_{i-1},U_i}$$

gewählt wird, mit $M \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{M} \alpha_i = 1$ und $U_i = q^{u_i}$ für $u_i = u + i \cdot (v-u)/M$.

Für festes M wird der Ausdruck (5) durch

$$\alpha_i := \left(\sum_{1 \leq j \leq M} \frac{C(M) - i}{C(M) - j} \right)^{-1} \qquad (i = 1, \cdots, M)$$

minimiert mit

$$C(M) := \frac{1}{2} + M \frac{x - u_0}{u_M - u_0}.$$

Je größer wir M wählen, desto besser die resultierende Abschätzung. Computerberechnungen lassen vermuten, dass der zusätzliche Gewinn mit wachsendem M sehr schnell fällt. Wir wählen später $M = 10$. Mit diesen neuen Gewichten ψ_d erhalten wir die folgende Verbesserung von [23, Lemma 3.4] (welches selbst eine Verallgemeinerung von [11, Lemma 11.1] ist).

Lemma 1. *Sei $M \in \mathbb{N}$, ε, c_1, $c_2 > 0$ und $\lambda_0 = \frac{1}{3} \log\log \mathscr{L}$. Sei*

$$u_i := \frac{1}{3} + 2c_1 + \frac{i \cdot c_2}{M} \quad (i \in \{0, \ldots, M\})$$

und

$$x := \frac{2}{3} + 3c_1 + c_2.$$

Sei $w_0 : [u_0, x] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, welche stetig differenzierbar ist bis auf endliche viele Stellen. Weiterhin erfülle diese Funktion

$$1 \ll w_0(t) \ll 1 \quad \textit{und} \quad w_0'(t) \ll 1$$

mit gewissen absoluten impliziten Konstanten. Dann gibt es ein q_0, welches von allen gewählten Konstanten abhängt, so dass für $q \geq q_0$

$$\sum_{1 \leq k \leq N(\lambda_0)} \left(\int_{u_0}^{x} w_0(t)^2 e^{2\lambda^{(k)} t} \, dt \right)^{-1}$$
$$\leq \frac{M^2 + \varepsilon}{c_1 c_2^2} \sum_{i=1}^{M} \alpha_i^2 \int_{u_{i-1}}^{x} w_0(t)^{-2} \min\{t - u_{i-1}, u_i - u_{i-1}\} \, dt.$$

Speziell erhalten wir für $w_0(t) \equiv 1$, $c_1 = \frac{1}{10}$, $c_2 = \frac{1}{4}$ und $M = 10$, dass für $q \geq q_0$ und $\lambda \leq \lambda_0$

$$N(\lambda) \leq \frac{10.98}{\lambda} (e^{\frac{73\lambda}{30}} - e^{\frac{16\lambda}{15}}).$$

5. Verbesserung der Nullstellendichte-Abschätzung für kleine λ

Um Linniks Konstante zu verbessern, müssen wir eine Summe über Nullstellen (vergleiche (14))

$$\sum_{c_1 < \lambda^{(k)} \leq c_2} g_3(\lambda^{(k)})$$

nach oben abschätzen, wobei g_3 eine monoton fallende Funktion ist. Lemma 1 liefert eine Abschätzung

$$\sum_{c_1<\lambda^{(k)}\leq c_2} g_4(\lambda^{(k)}) \leq C$$

für eine fallende Funkiton g_4, womit

$$\sum_{c_1<\lambda^{(k)}\leq c_2} g_3(\lambda^{(k)}) \leq C \cdot \sup_t \frac{g_3(t)}{g_4(t)}.$$

Eine Alternative zu letzterer Vorgehensweise ist wie folgt: Haben wir hinreichend gute Abschätzungen $N(\lambda) \leq N_0(\lambda)$, dann kann die folgende Abschätzung besser sein (setze $\delta = (c_2 - c_1)/10$):

$$\begin{aligned}\sum_{c_1<\lambda^{(k)}\leq c_2} g_3(\lambda^{(k)}) &\leq \sum_{j\geq 0}^{9}(N(c_1+(j+1)\delta) - N(c_1+j\delta))g_3(c_1+j\delta)\\ &\leq N_0(c_1)\cdot g_3(c_1) + \sum_{j\geq 0}^{9}(N_0(c_1+(j+1)\delta) - N_0(c_1+j\delta))g_3(c_1+j\delta).\end{aligned}$$

Heath-Brown leitet Abschätzungen $N(\lambda) \leq N_0(\lambda)$ her [11, Lemma 12.1], welche für kleine λ (ungefähr $\lambda \leq 1.3$) bessere Resultate liefern als Lemma 1. Wir haben Heath-Browns Lemma in [23, Lemma 3.5] leicht verallgemeinert. Darüber hinaus setzen wir jetzt Verbesserungspotential 2 ein (vergleiche [11, S.332]) und führen eine weitere Verallgemeinerung ein, um unsere späteren Berechnungen durch mehrere Fallunterscheidungen weiter zu optimieren. Es folgt [24, Lemma 5.3], welches wir hier notieren:

Lemma 2. *Seien B_1, D_1 nicht-negative, ganze Zahlen. Seien b, d, λ und $\lambda^\star$ positive Zahlen, $C \geq 0$, $\lambda_{12} \in (0,\infty]$ und f eine Funktion, die Bedingungen 1 und 2 aus [11, S. 280, 286] erfüllt. Sei F die Laplace-Transformierte von f und setze*

$$m(\chi_1) := \begin{cases} 0 & \textit{falls } \lambda_{12} \geq b, \\ 1 & \textit{falls } \lambda_{12} \leq b \textit{ und } \chi_1 \textit{ reell,} \\ 2 & \textit{falls } \lambda_{12} \leq b \textit{ und } \chi_1 \textit{ komplex,}\end{cases}$$

$$E(\chi_1) := \begin{cases} 1 & \textit{falls } \chi_1 \textit{ reell und } \rho_1 \textit{ komplex,} \\ 0 & \textit{sonst}\end{cases}$$

und

$$\begin{aligned}a_0 :=& - D_1F(\lambda-\lambda^\star) + (D_1 - B_1)F(d-\lambda^\star)\\ &+ (B_1 - m(\chi_1))F(b-\lambda^\star) + m(\chi_1)F(\lambda_{12}-\lambda^\star) - E(\chi_1)\cdot C,\\ a_1 :=& F(-\lambda^\star)\frac{f(0)}{6} - \left(F(\lambda-\lambda^\star) - \frac{f(0)}{6}\right)^2,\\ a_2 :=& F(-\lambda^\star)\left(F(-\lambda^\star) - \frac{f(0)}{6} + 2C\right) - 2a_0\left(F(\lambda-\lambda^\star) - \frac{f(0)}{6}\right),\\ a_3 :=& - a_0^2 - 2C\cdot F(-\lambda^\star).\end{aligned}$$

Angenommen die benutzten Parameter erfüllen

$$\lambda^\star \leq b \leq d \leq \lambda \leq 2, \quad \lambda_1 \leq \lambda_{12}, \quad \lambda^\star \leq \min\{\lambda', \lambda_2\}, \qquad a_1 < 0,$$

$$F(\lambda - \lambda^\star) > \frac{f(0)}{6} + E(\chi_1) \cdot C,$$

$$C \geq \sup_{t \in \mathbb{R}} \{-\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + it)\}\},$$

$$B_1 \leq N(b), \quad D_1 \leq N(d).$$

Dann haben wir für $q \geq q_0$

$$N(\lambda) \leq \max\left\{0, \left[\frac{a_2 + \sqrt{|a_2^2 - 4a_1a_3|}}{-2a_1}\right]\right\}. \tag{6}$$

Proof. Wir führen den Beweis analog zum Beweis von [11, Lemma 12.1]. Sei $l = l(q) \in [1, \mathscr{L}]$ die Zahl aus [11, Lemma 6.1] und

$$N := \widetilde{N}(\lambda) := \#\{\chi \mid \chi(\mod q), L(s,\chi) \text{ hat eine Nullstelle in } \sigma \geq 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda,\ |t| \leq l\}.$$

Seien $\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(N)}$ die verschiedenen Charaktere aus der Definition von N. Wähle zu jedem Charakter $\chi^{(j)}$ eine entsprechende Nullstelle $\rho^{(j)}$ von $L(s, \chi^{(j)})$ mit

$$\sigma \geq 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda, \qquad |t| \leq l.$$

Für $\chi^{(j)} = \chi_1$ wählen wir die Nullstelle ρ_1 und, falls χ_1 komplex ist, so wählen wir für $\chi^{(j')} = \overline{\chi_1}$ die Nullstelle $\overline{\rho_1}$.

Wir erinnern daran, dass die Laplace-Transformierte F monoton fallend ist. Da $b \leq d \leq \lambda$, folgt

$$F(\lambda - \lambda^\star) \leq F(d - \lambda^\star) \leq F(b - \lambda^\star).$$

Mit $\lambda_1 \leq \lambda_{12}$, $B_1 \leq N(b)$, $D_1 \leq N(d)$ folgt

$$\begin{aligned}(N - D_1)&F(\lambda - \lambda^\star) + (D_1 - B_1)F(d - \lambda^\star) \\ &+ (B_1 - m(\chi_1))F(b - \lambda^\star) + m(\chi_1)F(\lambda_{12} - \lambda^\star) - N(\frac{f(0)}{6} + \varepsilon) - E(\chi_1) \cdot C \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\leq &(N - \max\{D_1, B_1, m(\chi_1)\})F(\lambda - \lambda^\star) + (\max\{D_1, B_1, m(\chi_1)\} - \max\{B_1, m(\chi_1)\})F(d - \lambda^\star) \\ &+ (\max\{B_1, m(\chi_1)\} - m(\chi_1))F(b - \lambda^\star) + m(\chi_1)F(\lambda_{12} - \lambda^\star) - N(\frac{f(0)}{6} + \varepsilon) - E(\chi_1) \cdot C.\end{aligned}$$

Da F monoton fallend ist, ist Letzteres

$$\leq \sum_{j \leq N} F(\lambda^{(j)} - \lambda^\star) - N(\frac{f(0)}{6} + \varepsilon) - E(\chi_1) \cdot C. \tag{8}$$

Sei

$$K(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \Re\left\{\frac{\chi(n)}{n^s}\right\} f(\mathscr{L}^{-1} \log n).$$

Vermöge [23, Lemma 2.1] mit $\beta^\star = 1 - \mathscr{L}^{-1}\lambda^\star$ folgt

$$K(\beta^\star + i\gamma^{(j)}, \chi^{(j)}) \leq \begin{cases} -\mathscr{L}F(\lambda^{(j)} - \lambda^\star) + \mathscr{L} \cdot E(\chi_1) \cdot C + \mathscr{L}\left(\frac{f(0)}{6} + \varepsilon\right) & \text{falls } \chi^{(j)} = \chi_1, \\ -\mathscr{L}F(\lambda^{(j)} - \lambda^\star) + \mathscr{L}\left(\frac{f(0)}{6} + \varepsilon\right) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist (8)

$$\leq \mathscr{L}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\beta^\star} f(\mathscr{L}^{-1} \log n) \left| \sum_{j \leq N} \frac{\chi^{(j)}(n)}{n^{i\gamma^{(j)}}} \right|. \tag{9}$$

Kombiniert man (7) - (9) und benutzt man Cauchys Ungleichung, so erhält man

$$\mathscr{L}^2 \Big((N - D_1) F(\lambda - \lambda^\star) + (D_1 - B_1) F(d - \lambda^\star) + (B_1 - m(\chi_1)) F(b - \lambda^\star) \\ + m(\chi_1) F(\lambda_{12} - \lambda^\star) - N(\frac{f(0)}{6} + \varepsilon) - E(\chi_1) \cdot C \Big)^2 \leq \Sigma_1 \Sigma_2 \tag{10}$$

wobei

$$\Sigma_1 := \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \chi_0(n) n^{-\beta^\star} f(\mathscr{L}^{-1} \log n) = K(\beta^\star, \chi_0)$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\beta^\star} f(\mathscr{L}^{-1} \log n) \left| \sum_{j \leq N} \frac{\chi^{(j)}(n)}{n^{i\gamma^{(j)}}} \right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\beta^\star} f(\mathscr{L}^{-1} \log n) \sum_{j,k \leq N} \frac{\chi^{(j)}(n)}{n^{i\gamma^{(j)}}} \frac{\overline{\chi^{(k)}}(n)}{n^{-i\gamma^{(k)}}} \\ &= \sum_{j,k \leq N} K(\beta^\star + i(\gamma^{(j)} - \gamma^{(k)}), \chi^{(j)} \overline{\chi^{(k)}}). \end{aligned}$$

Für Σ_1 und die N Terme in Σ_2 mit $j = k$ haben wir gemäß [11, Lemma 5.3]

$$K(\beta^\star, \chi_0) \leq \mathscr{L}(F(-\lambda^\star) + \varepsilon). \tag{11}$$

Wir benutzen [23, Lemma 2.1] für die verbleibenden Terme. Wir müssen zuerst die Anzahl der Elemente in der Menge

$$\{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \quad | \quad 1 \leq j \neq k \leq N, \quad \chi^{(j)} \overline{\chi^{(k)}} \in \{\chi_1, \overline{\chi_1}\}\} \tag{12}$$

abschätzen. Gemäß der Definitionen tauchen χ_1 und $\overline{\chi_1}$ beide innerhalb der N Charaktere $\chi^{(j)}$ auf. Außerdem haben wir

$$\chi^{(j)} \overline{\chi^{(k_1)}} = \chi^{(j)} \overline{\chi^{(k_2)}} \quad \Longrightarrow \quad k_1 = k_2.$$

Wähle nun ein festes j.

Fall 1: χ_1 ist reell.

Fall 1.1: $\chi^{(j)} = \chi_1$. Dann ist $\chi^{(j)} \overline{\chi^{(k)}} \notin \{\chi_1, \overline{\chi_1}\}$ für jedes $k \neq j$.

Fall 1.2: $\chi^{(j)} \neq \chi_1$. Dann ist $\chi^{(j)} \overline{\chi^{(k)}} \in \{\chi_1, \overline{\chi_1}\} = \{\chi_1\}$ für maximal ein $k \neq j$.

Wenn also χ_1 reell ist, dann gibt es maximal (wir können $N \geq 1$ annehmen)

$$N - 1 \leq 2N - 2$$

Elemente in (12).

Fall 2: χ_1 ist komplex.

Fall 2.1: $\chi^{(j)} = \chi_1$ oder $\chi^{(j)} = \overline{\chi_1}$. Dann ist $\chi^{(j)} \overline{\chi^{(k)}} \in \{\chi_1, \overline{\chi_1}\}$ für maximal ein $k \neq j$.

Fall 2.2: $\chi^{(j)} \neq \chi_1, \overline{\chi_1}$. Dann ist $\chi^{(j)} \overline{\chi^{(k)}} \in \{\chi_1, \overline{\chi_1}\}$ für maximal zwei $k \neq j$.

Wenn also χ_1 komplex ist, so gibt es maximal

$$2 \cdot 1 + (N-2) \cdot 2 = 2N - 2$$

Elemente in (12).

Die Menge $A_1 = A_1(\chi)$ aus [23, Lemma 2.1] erfüllt offensichtlich

$$A_1 \subseteq \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \chi \neq \chi_1, \overline{\chi_1}, \\ \{\rho_1\} & \text{falls } \chi = \chi_1 \text{ und } \chi_1 \text{ reell, } \rho_1 \text{ reell,} \\ \{\rho_1, \overline{\rho_1}\} & \text{falls } \chi = \chi_1 \text{ und } \chi_1 \text{ reell, } \rho_1 \text{ komplex,} \\ \{\rho_1\} & \text{falls } \chi = \chi_1 \text{ und } \chi_1 \text{ komplex,} \\ \{\overline{\rho_1}\} & \text{falls } \chi = \overline{\chi_1} \text{ und } \chi_1 \text{ komplex.} \end{cases}$$

Mit [24, (3.38)]

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \Re(F(\sigma + it)) \geq 0$$

schließen wir

$$\sum_{\substack{j,k \leq N \\ j \neq k}} K(\beta^\star + i(\gamma^{(j)} - \gamma^{(k)}), \chi^{(j)}\overline{\chi^{(k)}})$$

$$\leq \mathscr{L} \cdot (2N-2) \cdot \sup_{t \in \mathbb{R}} \{-\Re\{F(\lambda_1 - \lambda^\star + it)\}\} + \mathscr{L}(N^2 - N)(\frac{f(0)}{6} + \varepsilon). \quad (13)$$

Das Lemma folgt nach der Wahl eines hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ (beachte, dass f und F beschränkt sind, genauso wie N gemäß wohlbekannten Nullstellendichte-Abschätzungen) aus (10), (11), (13) und dem Lösen der sich ergebenden quadratischen Ungleichung. □

Mit $B_1 = D_1 = 0$, $\lambda_{12} = \infty$, $\lambda^\star = \lambda_1$ und $C = 0$ folgt das Ausgangslemma von Heath-Brown [11, Lemma 12.1].

6. Beweis von Theorem 1

Um Linniks Theorem zu beweisen, betrachtet Heath-Brown [11, S.323]

$$\Sigma := \sum_{p \equiv a (\mod q)} \frac{\log p}{p} h(\mathscr{L}^{-1} \log p),$$

wobei

$$h(t) := h_{L,K}(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq L - 2K, \\ t - (L-2K) & \text{falls } L - 2K \leq t \leq L - K, \\ L - t & \text{falls } L - K \leq t \leq L, \\ 0 & \text{falls } t \geq L, \end{cases}$$

für gewisse positive Konstanten L, K. Wir optimieren diesen Ansatz, indem wir $h_{L,K}$ durch eine passende Linearkombination $\sum_i \alpha_i h_{L_i,K_i}$ ersetzen. Die Parameter α_i, L_i, K_i müssen sorgfältig gewählt werden, damit der Beweis geführt werden kann. Für Details zur Herleitung unserer Wahl der Parameter verweisen wir auf [24, §3.4, §6.1, §6.2].

Für $L = 5$ und $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$, $K < 1/3$ wählen wir

$$h(t) := h_{L,K}(t) + \beta_1^2 h_{L-2K,K}(t) + \beta_2^2 h_{L-4K,K}(t)$$
$$+ 2\beta_1 h_{L-K,K}(t) + 2\beta_2 h_{L-2K,K}(t) + 2\beta_1\beta_2 h_{L-3K,K}(t).$$

Die Laplace-Transformierte von $h(t)$ ist gegeben durch

$$H(z) = \begin{cases} e^{-(L-2K)z} \left(z^{-1}(1 + \beta_1 e^{Kz} + \beta_2 e^{2Kz})(1 - e^{-Kz})\right)^2 & \text{falls } z \neq 0, \\ K^2(1 + \beta_1 + \beta_2)^2 & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$

Es folgt (wir lassen die nicht-trivialen Details aus) für festes $\varepsilon > 0$ und $C_0 = C_0(\varepsilon)$, $q \geq q_0 = q_0(\varepsilon)$:

$$\Sigma \geq \frac{\mathscr{L}}{\varphi(q)} \left(H(0) - \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{\rho \in R_0} |H((1-\rho)\mathscr{L})| - \varepsilon \right)$$

wobei

$$R_0 := \{\sigma + it \in \mathbb{C} \mid 1 - \mathscr{L}^{-1} C_0 \leq \sigma \leq 1,\ |t| \leq \mathscr{L}^{-1} C_0\}.$$

Wir können die Summe über alle Nullstellen abschätzen, indem wir nur jene Nullstelle für jede Funktion $L(s,\chi)$ betrachten, die den kleinsten Abstand zu $s = 1$ hat:

$$H(0)^{-1} \sum_{\chi \neq \chi_0} \sum_{\rho \in R_0} |H((1-\rho)\mathscr{L})| \leq \sum_k e^{-(L-6K)\lambda^{(k)}} B(\lambda^{(k)}) - n(\chi_1)A(\chi_1) + \varepsilon, \tag{14}$$

wobei

$$B(\lambda) := H(0)^{-1} \left(F_1^\lambda(-\lambda) + \frac{f_1^\lambda(0)}{6} \right),$$

$$f_1^C(t) := \begin{cases} \frac{-1}{\lambda} \sinh(|C| - t)\lambda & \text{falls } 0 \leq t \leq |C|, \\ 0 & \text{falls } t \geq |C|, \end{cases}$$

$$F_1^C(z) := \frac{(z-\lambda)e^{|C|\lambda} - (z+\lambda)e^{-|C|\lambda} + 2\lambda e^{-|C|z}}{2\lambda(\lambda^2 - z^2)},$$

$$A(\chi_1) := \begin{cases} \max\{0, (e^{-(L-6K)\lambda_1} - e^{-(L-6K)\lambda'})(B(\lambda_1) - \frac{\alpha(\chi_1)H_2(\lambda_1)}{H(0)})\} & \text{falls } \rho_1 \in R_0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$H_2(z) := e^{(L-2K-2K_2)z} H(z),$$

$$\alpha(\chi_1) := \begin{cases} 2 & \text{falls } \chi_1 \text{ reell und } \rho_1 \text{ komplex,} \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$n(\chi_1) = \begin{cases} 2 & \text{falls } \chi_1 \text{ komplex,} \\ 1 & \text{falls } \chi_1 \text{ reell.} \end{cases}$$

Für den Beweis von Theorem 1 verbleibt zu Zeigen, dass für $L = 5$ die rechte Seite von (14) echt kleiner als 1 ist. Für $\lambda_1 < 0.348$ haben wir bereits Linniks Theorem mit $L = 4.9$ gemäß [11, Lemma 14.2]. Wir können also $\lambda_1 \geq 0.348$ annehmen.

Wir unterscheiden die Fälle χ_1 reell oder komplex, ρ_1 reell oder komplex und unterteilen den Beweis außerdem in verschiedene Fälle (vergleiche [24, §6]):

$$\lambda_1 \in [0.348, 0.44], [0.44, 0.58], \cdots, [0.78, 0.82], [0.82, \infty).$$

Wir wählen $L = 5$, $K = 0.13$, $\beta_1 = 0.65$, $\beta_2 = 0.33$ und schätzen die rechte Seite von (14) wie folgt ab:

Der Beitrag der Nullstellen ρ_1, ρ' und ρ_2 (sowie deren entsprechenden, eventuell existierenden, komplex konjugierten Nullstellen) wird abgeschätzt durch die Tabellen in [23] und [11], welche Abschätzungen der Form

$$\lambda_1 \in [\lambda_{11}, \lambda_{12}] \quad \Longrightarrow \quad \lambda' \geq \lambda'_{11}, \quad \lambda_2 \geq \lambda_{21}$$

beinhalten.

Der Beitrag der Nullstellen mit großem $\lambda (= \lambda^{(k)})$, sagen wir

$$\lambda \geq \Lambda := 1.11 + 0.35 \cdot \lambda^\star \approx 1.3$$

mit $\lambda^\star := \min\{\lambda'_{11}, \lambda_{21}\}$, wird abgeschätzt mit Hilfe von Lemma 1. Dabei wählen wir die Parameter $c_1 = 0.11$, $c_2 = 0.27$, $M = 10$, $\theta = 1.15$ und

$$w_0(t) := e^{-\frac{\theta}{2}t} \min\{t - u + 10^{-7}, v - u + 10^{-7}\}^{\frac{1}{4}}.$$

Sei $\lambda_{31} \leq \lambda_3$ gemäß Tabellen 9 und 10. Für die verbleibenden Nullstellen, also jene mit

$$\lambda_{31} \leq \lambda \leq \Lambda \tag{15}$$

benutzen wir Lemma 2, wobei f aus (2) gewählt wird mit

$$\gamma = 1.62 - 0.55\lambda^\star$$

und

$$\begin{aligned} b =& \lambda_{31} + \frac{\Lambda - \lambda_{31}}{3} - 0.01, \\ d =& \lambda_{31} + 2 \cdot \frac{\Lambda - \lambda_{31}}{3} - 0.01. \end{aligned}$$

Hier führen wir eine weitere Fallunterscheidung ein: Für zwei nicht-negative ganze Zahlen B_1, D_1 und einem $\lambda > 0$, sei

$$N_0(\lambda; B_1, D_1)$$

die resultierende obere Abschätzung aus (6). Wir benutzen die Symbole $\wedge$ für 'logisches UND', $\vee$ für 'logisches ODER', sowie

$$N_b := N_0(b; 0, 0).$$

Dann teilen wir den Ausgangsfall in die folgenden Fälle ein:

$$\begin{aligned} & \Big(N(b) \in [0,4] && \wedge \ \big(N(d) \in [0,4] \ \vee \ N(d) = 5 \ \vee \ \ldots \ \vee \ N(d) = N_0(d; 0, 0)\big)\Big) \\ \vee & \Big(N(b) = 5 && \wedge \ \big(N(d) = 5 \ \vee \ N(d) = 6 \ \vee \ \ldots \ \vee \ N(d) = N_0(d; 5, 0)\big)\Big) \\ & \vdots \\ \vee & \Big(N(b) = N_b && \wedge \ \big(N(d) = N_b \ \vee \ N(d) = N_b + 1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ N(d) = N_0(d; N_b, 0)\big)\Big). \end{aligned}$$

Wir haben also unsere Ausgangssituation in

$$(N_0(d;0,0)-3)+(N_0(d;5,0)-4)+\ldots+(N_0(d;N_b,0)-N_b+1)$$

verschiedene Fälle aufgeteilt. Jeder Fall wird durch das Tupel $(B_1, B_2, D_1, D_2) \in \mathbb{N}_0^4$ charakterisiert, wobei

$$B_1 \leq N(b) \leq B_2 \quad \text{und} \quad D_1 \leq N(d) \leq D_2$$

(wir haben meist $B_1 = B_2$ und $D_1 = D_2$). Für jedes Tupel benutzen wir die obere Abschätzung

$$N(\lambda) \leq N_0(\lambda) := \begin{cases} \min\{B_2, N_0(\lambda;0,0)\} & \text{falls } \lambda \leq b, \\ \min\{D_2, N_0(\lambda;B_1,0)\} & \text{falls } b < \lambda \leq d, \\ N_0(\lambda;B_1,D_1) & \text{falls } d < \lambda. \end{cases}$$

Damit schätzen wir den Anteil der Nullstellen in (15) ab.

Mit Hilfe aller oben genannten Abschätzungen, und in allen betrachteten Fällen, berechnen wir, dass die rechte Seite von (14) kleiner als 1 ist. Es folgt Theorem 1. Wir haben viele Details ausgelassen, für die wir auf [24, §6] verweisen.

REFERENCES

1. Barban M.B., Vehov P.P., *On an extremal problem (Russian)*, Trans. Moscow Math. Soc. 18 (1968), 91-99; see also Trudy Moskov. Mat. Obsc. 18 (1968) 83-90.

2. J. Chen, *On the least prime in an arithmetical progression*, Sci. Sinica 14 (1965), 1868-1871.

3. J. Chen, *On the least prime in an arithmetical progression and two theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions*, Sci. Sinica 20 (1977), no. 5, 529-562.

4. J. Chen, *On the least prime in an arithmetical progression and theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions II*, Sci. Sinica 22 (1979), no. 8, 859-889.

5. J. Chen, J. M. Liu, *On the least prime in an arithmetical progression (III), (IV)*, Science in China Ser. A 32 (1989) no. 6-7, 654-673 and 792-807.

6. J. Chen, J. M. Liu, *On the least prime in an arithmetical progression and theorems concerning the zeros of Dirichlet's L-functions (V)*, International Symposium in Memory of Hua Loo Keng Vol. I (Beijing, 1988), Springer-Verlag, Berlin (1991), 1942.

7. D. D. Goldston, C. Y. Yıldırım, 'Higher correlations of divisor sums related to primes III: k-Correlations', *arXiv:math/0209102v1 [math.NT] 10 Sep 2002.*

8. S. W. Graham, *Applications of sieve methods*, Ph.D. Thesis, University of Michigan, 1977.

9. S. W. Graham, 'An asymptotic estimate related to Selberg's sieve', *J. Number Theory* 10 (1978) 83–94.

10. S. W. Graham, *On Linnik's constant*, Acta Arith. 39 (1981), no. 2, 163-179.

11. D. R. Heath-Brown, *Zero-free regions for Dirichlet L-functions, and the least prime in an arithmetic progression*, Proc. London Math. Soc. (3) 64 (1992), no. 2, 265-338.

12. H. Iwaniec, E. Kowalski, *Analytic Number Theory*, 2004, AMS Colloquium Publications, vol. 53.

13. M. Jutila, *A new estimate for Linnik's constant*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I No. 471, 1970, 8 pp.

14. M. Jutila, *On Linnik's constant*, Math. Scand. 41 (1977), no. 1, 45-62.

15. Yu. V. Linnik, *On the least prime in an arithmetic progression I. The basic theorem*, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. 15(57) (1944), 139-178.

16. Yu. V. Linnik, *On the least prime in an arithmetic progression II. The Deuring-Heilbronn phenomenon*, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. 15(57) (1944), 347-368.

17. M. C. Liu, T. Wang, *A numerical bound for small prime solutions of some ternary linear equations*, Acta Arith. 86 (1998), no. 4, 343-383.

18. C. D. Pan, *On the least prime in an arithmetical progression*, Sci. Record (N.S.) 1 (1957), 311-313.

19. C. D. Pan, *On the least prime in an arithmetical progression*, Acta Sci. Natur. Univ. Pekinensis 4 (1958), 1-34.

20. P. Turán, *On some recent results in the analytic theory of numbers*, Number Theory Institute, 1969, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 20 (American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971), 359-374.

21. W. Wang, *On the least prime in an arithmetic progression*, Acta Math. Sinica 29 (1986), no. 6, 826-836.

22. W. Wang, *On the least prime in an arithmetic progression*, Acta Math. Sinica 7 (1991), no. 3, 279-289.

23. T. Xylouris, *On the least prime in an arithmetic progression and estimates for the zeros of Dirichlet L-functions*, *Acta Arith.* 150, 1 (2011), 65-91.

24. T. Xylouris, *Über die Nullstellen der Dirichletschen L-Funktionen und die kleinste Primzahl in einer arithmetischen Progression*, *Bonner Mathematische Schriften* Nr. 404, Bonn, 2011, 1–110.

Получено 18.06.2018
Принято к печати 10.10.2018