ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 2

УДК 512.542+514.12

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-446-475

О разбиениях усечённого икосаэдра на паркетогранники¹**Е. С. Карпова** — Красноярский государственный педагогический университет*e-mail: a.v.timofeenko62@mail.ru***Тимофеев Алексей Викторович** — доктор физико-математических наук, доцент, Красноярский государственный педагогический университет*e-mail: a.v.timofeenko62@mail.ru*

Аннотация

Изучение паркетогранников началось сразу после завершения классификации выпуклых многогранников с правильными гранями полвека назад. Паркетогранником назовём выпуклый многогранник, обладающий правильными или паркетными гранями. Напомним, паркетным называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников. Паркетные многоугольники классифицированы: существует 23 их типа. Четыре из них могут быть представлены правильными многоугольниками, а ещё пять имеют равносторонние представители, составленные так из правильных многоугольников, что каждая вершина такого правильного многоугольника служит и вершиной паркетного. Около десяти лет назад стали известны с точностью до подобия все паркетогранники, которые кроме правильных могут обладать и указанными пятью паркетными гранями. Выдвинута гипотеза, приводящая нахождению всех равнорёберных паркетогранников. Без рассмотрения соединений по однотипным граням невозможно получить все типы паркетогранников, т.е. закрыть основную проблему: "Каковы все типы паркетогранников?" В настоящей работе рассмотрена часть требуемых для решения этой проблемы соединений правильногранной пятиугольной пирамиды M_3 с единичными рёбрами, усечённой по средним линиям боковых треугольных граней пирамиды M_{3a} , тел M_{19a} и M_{19b} , полученных из усечённого икосаэдра M_{19} отсечением двух и трёх семигранников M_{3a} соответственно. Рёбра трёх последних тел и рёбра соединений имеют длины один и два. В настоящее время этот результат может представлять самостоятельный интерес для квазикристаллографии. В частности, архимедово тело M_{19} с правильными пятиугольником и двумя шестиугольниками в каждой вершине является представителем фуллеренов. Кроме того, объём уже сделанных вычислений показывает необходимость привлечения в существенно больших масштабах программирования и компьютерной графики, для которых выполненная работа послужит хорошим тестом.

Ключевые слова: паркетный многоугольник, паркетогранник, группа симметрий, усечённый икосаэдр.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:

Е. С. Карпова, А. В. Тимофеев. О разбиениях усечённого икосаэдра на паркетогранники // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 446–475.

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края, Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научного проекта №16-41-240670.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 2

UDC 512.542+514.12

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-446-475

About the partitions of a truncated icosahedron for parquet-hedra**E. S. Karpova** — Krasnoyarsk state pedagogical University*e-mail: a.v.timofeenko62@mail.ru***Timofeenko Alexey Viktorovich** — doctor of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Krasnoyarsk state pedagogical University*e-mail: a.v.timofeenko62@mail.ru***Abstract**

The study of parquet-facets began immediately after the classification of convex polyhedra with the regular faces half a century ago was completed. Parquet-Hedron will be called a convex polyhedron with regular or parquet faces. Recall, a parquet is a convex polygon made up of a finite and larger unit of the number of equiangular polygons. Parquet polygons are classified: there are 23 of their type. Four of them can be represented by regular polygons, and five more have equilateral representatives, composed as from regular polygons, that each vertex of such a regular polygon serves as the vertex of the parquet. About ten years ago, all parquet-facets became known to within the similarity, which apart from the right ones can also have the five parquet faces. A hypothesis has been put forward, which leads to the finding of all equilateral parquethedra. Without consideration of joints on the same faces, it is impossible to obtain all types of parquet facets, i.e. to close the main problem: "What are all types of parquethedra?" In this paper, we consider some of the connections required for the solution of this problem of a regular-angled pentagonal pyramid M_3 with single edges, truncated along the middle lines of the lateral triangular faces of the pyramid M_{3a} , bodies M_{19a} and M_{19b} , obtained from the truncated icosahedron M_{19} by cutting off M_{3a} by two and three planes, respectively. The edges of the last three bodies and the edges of the junction have lengths one and two. At present, this result may be of independent interest for quasicrystallography. In particular, the Archimedean body M_{19} with regular pentagons and two hexagons at each vertex is a representative of fullerenes. In addition, the amount of the calculations already done shows the need to attract programming and computer graphics for substantially larger scales, for which the work done will serve as a good test.

Keywords: parquet polygon, parquet-hedron, symmetry group, truncated icosahedron.

Bibliography: 18 titles.

For citation:

E. S. Karpova, A. V. Timofeenko, 2018, "About the partitions of a truncated icosahedron for parquet-hedra", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 446–475.

1. Введение

Паркетогранником назовём выпуклый многогранник, обладающий правильными или паркетными гранями. Напомним, *паркетным* называется выпуклый многоугольник, составленный из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников, [1]. Поскольку углы паркетного многоугольника такие, как у правильных многоугольников, то каждой вершине паркетного многоугольника можно приписать число сторон правильного многоугольника с углами, равными углу в данной вершине паркетного. «Чередование углов при обходе вершины паркетного многоугольника называем его типом и характеризуем одним символом,» [1]. Например, символ $(3, 6, 3, 6)$ означает, что у многоугольника 4 вершины, углы при которых последовательно равны углам правильных треугольника, шестиугольника, треугольника, шестиугольника. Очевидно, равносторонний многоугольник такого типа сложен из двух правильных треугольников, а представителем типа $(3^2, 6^2)$ служит трапеция, сложенная из трёх правильных треугольников. Известно, что существует 23 типа паркетных многоугольников и только четырем из них соответствуют правильные многоугольники. Изображения представителей оставшихся 19 типов можно найти в работе [2].

Изучение паркетогранников началось сразу после завершения классификации выпуклых многогранников с правильными гранями, [3, 4]. На стр. 8 работы [3] её автор отмечает: «Ю. А. Пряхин уже осуществил в основном отыскание на основе излагаемых нами результатов поиск всех простых правильных многогранников с «условными рёбрами» (см. §4)». Напомним, *правильногранный* многогранник называется *простым*, если он не допускает расщепления плоскостью на два других правильногранных многогранника. (Такое сечение должно идти по рёбрам). В противном случае правильногранный многогранник называем *составным*. Это определение в точности переносится и на класс равнорёберных паркетогранников. Полный список простых паркетогранников без фиктивных вершин дополнил список простых правильногранных тел шесть лет спустя после классификации последних, [3, 5, 6]:

$$A_4, A_5, \dots; \Pi_3, \Pi_4, \dots; M_1, M_2, \dots, M_{28}; Q_1, Q_2, \dots, Q_5, Q_6.$$

Содержащие «условные рёбра» тела $Q_1, Q_2, \dots, Q_5$ называют *многогранниками Иванова* и тело Q_6 — *многогранником Пряхина*. Их алгебраические модели расположены в работе [7]. *Многогранники Залгаллера* $M_1, M_2, \dots, M_{28}$ содержат правильногранные пирамиды M_1, M_2, M_3 , додекаэдр M_{15} , архимедовы тела, среди которых отметим усечённый икосаэдр M_{19} с правильными пятиугольником и двумя шестиугольниками в каждой вершине, сечения архимедовых и платоновых тел, а также многогранники $M_8, M_{20}, M_{21}, \dots, M_{25}, M_{28}$, алгебраические модели которых можно найти в работе [8]. Статьи [7, 8] содержат изображения и алгебраические модели призм Π_i и антипризм $A_i, i = 3, 4, \dots$. К ним относятся составленный из четырёхугольных пирамид M_2 октаэдр $A_3 = M_2 + M_2$ и куб Π_4 , изображённые на рис. 1. У куба закраше-

Рис. 1: Октаэдр A_3 и куб Π_4

на одна грань потому, что, действуя на неё его симметриями, получаем остальные грани, а применение двух цветов для окраски граней октаэдра говорит о его составленности из двух простых тел. На конференции [9] сформулирована гипотеза о том, что кроме собранных из

Рис. 2: 7c

Рис. 3: 8c

Рис. 4: 9b

Рис. 5: 10b

указанных выше простых тел правильных тел и паркетогранников без фиктивных вершин существует с точностью до подобия только четыре равнорёберных паркетогранника с фиктивными вершинами, причём все они простые и являются призмами с изображёнными на рис. 2–5 основаниями типов: $(4, 12, 6, 12, 4, 12^2)$, $(6^2, 12^2, 6^2, 12^2)$, $(6, 12^2, 6, 12^2, 6, 12^2)$ и $(6, 12^4, 6, 12^4)$. Эти типы получили (вместе с остальными восемнадцатью) в работе [10] более короткие обозначения, применённые в подписях к рисункам.

Соединяя одинаковыми гранями правильные простые тела, можно доказать следующую теорему.

Теорема (Л. Н. Есаулова, В. А. ЗАЛГАЛЛЕР, Н. Джонсон, 1946–1967). *Кроме призм P_n и антипризм A_n , $n = 3, 4, \dots$, существует ровно 108 выпуклых многогранников с правильными гранями:*

- а) *правильные тетраэдр, икосаэдр и додекаэдр;*
- б) *13 архимедовых тел,*
- в) *92 многогранника Джонсона, [3].*

Собственно перебор соединений правильных простых тел, приводящий к этой теореме, был опубликован позднее в работе [11]. Составные тела с правильными и составленными из правильных многоугольников гранями типов $(3, 6, 3, 6)$, $(3, 12, 4^2, 12)$, $(3, 12^2, 3, 12^2)$, $(3, 30, 5^3, 30)$, $(3, 30, 5, 30, 3, 30^2)$ с изображёнными на рис. 6 представителями получают соединением тридцати простых паркетогранников:

$$P_3, P_4, P_5, P_6, P_8, P_{10}; A_4, A_5, A_6, A_8, A_{10}; M_1, \dots, M_{15}, M_{20}, M_{22}; Q_4, Q_6.$$

Оно приводит к следующей теореме.

Рис. 6: Равносторонние паркетные многоугольники без фиктивных вершин

Теорема (А. М. Гурин, В. А. Залгаллер, А. В. Тимофеев, 2008–2011). *Если отличное от правильного выпуклое тело имеет грани либо правильные, либо составленные так из правильных многоугольников, что каждая вершина такого многоугольника служит и вершиной грани, то оно подобно одному из 78 многогранников, построенных явно: <http://tupelo-schneck.org/polyhedra/>, [12, 13, 14, 15].*

Если верить напечатанной выше гипотезе, то теорема усиливается до 82 равнорёберных паркетогранников. Эти паркетогранники обладают правильными и какими-нибудь неправильными гранями типов, представители которых изображены на рис. 2–6. Каждому из оставшихся десяти типов не может соответствовать равносторонний многоугольник. При построении паркетогранников с такими гранями возникает вопрос: «Каким минимальным количеством чисел

измеряются длины рёбер паркетогранника, типы некоторых граней которого не могут быть представлены равносторонним многоугольником?» Известен тип паркетогранников, каждый представитель которого имеет не менее четырёх различных рёбер.

Переход от равнорёберных паркетогранников к телам с различными рёбрами требует классификации типов паркетогранников, а не рассмотрения их с точностью до подобия. Ещё в 1974 г. замечено, [1], что классификацию типов паркетогранников можно провести по схеме, которая привела к нахождению всех правильных выпуклых тел, [3]. Однако путь от схемы до самого доказательства не выглядит коротким.

Предположив, что известны типы всех простых паркетогранников, читатель понимает, без рассмотрения соединений по однотипным граням невозможно получить все типы паркетогранников, т.е. закрыть основную проблему: «Каковы все типы паркетогранников?» В настоящей работе рассмотрена часть требуемых для решения этой проблемы соединений правильногранной пятиугольной пирамиды M_3 с единичными рёбрами, усечённой (по средним линиям боковых треугольных граней) пирамиды M_{3a} , рис. 7 и тел M_{19a} и M_{19b} , полученных из усечённого икосаэдра M_{19} отсечением двух и трёх семигранников M_{3a} соответственно, рис. 8 и 9. Рёбра трёх последних тел и рёбра соединений имеют длины 1 и 2.

2. Основной результат

В настоящем исследовании существенную роль играет группа симметрий каждого изучаемого многогранника. Для конечных групп движений трёхмерного евклидова пространства применены обозначения, опубликованные в работе [4]. С более детальными пояснениями этот список выложен на странице вебинара «Группы и правильногранники» 9 марта 2018 г.² Ниже в теореме обозначение каждого многогранника состоит из двух частей: буквы с одним или двумя нижними индексами и группы его симметрий. Привлечение сюда обозначения группы позволяет иногда опускать штрих, который указывает на различие тел, составленных из одинаковых многогранников.

Рис. 7: $M_{3a}[5]$ под $M_3[5]$

Рис. 8: $M_{19a}[2^+, 10]$

Рис. 9: $M_{19b}[3]$

Теорема. *Выпуклый многогранник сложен из тел*

$$M_3[5], M_{3a}[5], M_{19a}[2^+, 10], M_{19b}[3] \quad (1)$$

соединением по одинаковым граням при условии, что любые два ребра каждого соединения либо равны, либо одно вдвое короче другого тогда и только тогда, когда он является одним из следующих соединений $Q_{i,j}$, расположенного в списке (i) на j-м месте, а число соединяемых

²<https://icm.krasn.ru/seminar.php?id=reghedra&year=2018>

тел для каждого такого $Q_{i,j}$ минимально:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3[2, 5], \quad M_3 + M_{3a}[5], \quad M_3 + M_{19a}[], \quad M_3 + M_{19b}[], \quad M_3 + M'_{19b}[], \\ & M_3 + M''_{19b}[], \quad M_{3a} + M_{3a}[2, 5], \quad M_{3a} + M_{19a}[5], \quad M_{3a} + M_{19b}[]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & Q_{2,2} + M_{3a}[5], \quad Q_{2,2} + M_{19a}[5], \quad Q_{2,2} + M_{19b}[], \quad Q_{2,3} + M_3[2]^+, \quad Q_{2,3} + M_3[], \\ & Q_{2,3} + M_3[2^+, 2], \quad Q_{2,3} + M_{3a}[], \quad Q_{2,3} + M'_{3a}[], \quad Q_{2,4} + M_3[]^+, \quad Q_{2,4} + M_3[], \\ & Q_{2,4} + M'_3[]^+, \quad Q_{2,4} + M_{3a}[]^+, \quad Q_{2,5} + M_3[], \quad Q_{2,5} + M_3[]^+, \quad Q_{2,5} + M_{3a}[], \\ & Q_{2,5} + M'_{3a}[], \quad Q_{2,8} + M_3[5], \quad Q_{2,8} + M_{3a}[3, 5]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}_{3,1} + \mathbf{M}_3[2, 5], \quad Q_{3,2} + M_3[], \quad Q_{3,2} + M_{3a}[5], \quad Q_{3,3} + M_3[]^+, \quad Q_{3,3} + M_3[], \\ & Q_{3,3} + M'_3[], \quad Q_{3,4} + M_3[]^+, \quad Q_{3,4} + M_{3a}[]^+, \quad Q_{3,5} + M_{3a}[], \quad Q_{3,5} + M'_{3a}[], \\ & Q_{3,6} + M_{3a}[], \quad Q_{3,9} + M_3[]^+, \quad Q_{3,9} + M_{3a}[], \quad Q_{3,9} + M_{3a}[]^+, \quad Q_{3,10} + M_{3a}[2]^+, \\ & Q_{3,11} + M_{3a}[]^+, \quad Q_{3,11} + M_{3a}[], \quad Q_{3,11} + M'_{3a}[]^+, \quad Q_{3,13} + M_3[], \quad Q_{3,13} + M_3[3], \\ & Q_{3,13} + M_{3a}[]^+, \quad Q_{3,13} + M_{3a}[], \quad Q_{3,14} + M_3[]^+; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & Q_{4,2} + M_3[], \quad Q_{4,2} + M_{3a}[2], \quad \mathbf{Q}_{4,3} + \mathbf{M}_3[2^+, 10], \quad Q_{4,4} + M_3[]^+, \quad Q_{4,7} + M_{3a}[], \\ & Q_{4,7} + M_{3a}[], \quad Q_{4,12} + M_{3a}[]^+, \quad Q_{4,12} + M_{3a}[], \quad Q_{4,19} + M_{3a}[]; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}_{5,1} + \mathbf{M}_{3a}[3]. \quad (6)$$

3. Доказательство.

Тела списка (i), $i = 2, 3, \dots, 6$; которые требует теорема, будут получены на i -м шаге следующего алгоритма.

3.1. Шаг 1, входные данные.

Находим группу симметрий каждого многогранника списка (1). Учитывая, что ось совмещающего с собой многогранник поворота содержит либо вершину, либо середину ребра, либо центр грани, находим все эти оси и повороты. Поскольку все конечные группы поворотов известны, то полученных сведений об осях достаточно, чтобы определить какую именно группу эти повороты образуют, см. начало раздела. Группа поворотов (собственных симметрий, симметрий первого рода) тела либо совпадает с группой его симметрий либо является её подгруппой индекса два. Напомним, диэдральная группа [5] порождена отражениями от двух плоскостей, пересекающихся по оси пирамиды под углом $\pi/5$. Группой диэдра десятого порядка является и подгруппа $[2, 5]^+$ поворотов тела M_{19a} группы $[2^+, 10]$ его симметрий, а сама группа $[2^+, 10]$ есть расширение диэдральной группы $[2, 5]^+$ отражением от плоскости, перпендикулярной большим пятиугольным граням паркетогранника M_{19a} . Группы симметрий тел M_{19a} и A_5 равны. Группой симметрий тела M_{19b} служит порождённая отражениями от плоскостей, пересекающихся под углом $\pi/6$, группа диэдра [3] порядка шесть.

Будем рассматривать соединения тел списка (1) по фундаментальным граням. Напомним, что *фундаментальным* называется такое минимальное по мощности подмножество множества граней многогранника, что действуя группой симметрий на эти грани, получаем каждую грань многогранника. Если из множества фундаментальных граней удалить те, по которым соединения с любым многогранником теоремы приведут к нарушению ее условий, то оставшиеся грани назовём *сверхфундаментальными*. Поскольку двугранные углы между смежными боковыми гранями пирамиды M_3 столь велики, что соединение этого двугранного угла и любого двугранного угла паркетогранника приведет к углу, большему π и таким же свойством обладают двугранные углы, образованные: смежными трапециями усечённой пирамиды M_{3a} ,

Рис. 10: $M_3 + M_{19a} = Q_{2,3}[]$

шестиугольными гранями усечённого икосаэдра M_{19} и его сечений M_{19a} и M_{19b} . Поэтому на рисунках закрашены оранжевым цветом сверхфундаментальные грани, рёбра которых не являются рёбрами указанных выше двугранных углов. Фундаментальные, но не сверхфундаментальные пятиугольные грани закрашены серым цветом, либо прозрачны.

3.2. Шаг 2.

Строим все выпуклые соединения из двух многогранников списка (1). Берем первый многогранник из списка (1) и находим все его выпуклые соединения с ним самим и телами, стоящими правее его в этом списке. Полученные так тела будем называть *2-составными*.

Шаг 2.1. Соединения с пирамидой M_3 . Эта пирамида обладает двумя фундаментальными гранями. Сверхфундаментальной является только пятиугольное основание. Поэтому соединение такими основаниями дает единственное выпуклое соединение, стоящее первым в списке (2), т.е. $M_3 + M_3 = Q_{2,1}, [2, 5]$.

Справедливо равенство $M_3 + M_{3a} =^2 M_3$, левая часть которого получает второе место в списке (2).

Рассмотрим соединения тел M_3 и M_{19a} . У них одинаковыми являются только пятиугольные грани с единичными ребрами, причем в множестве фундаментальных граней каждого из этих тел содержится ровно по одному такому пятиугольнику. Следовательно, существует только одно соединение $M_3 + M_{19a}$, стоящее третьим в списке (2), см. рис. 10.

Многогранник M_{19b} имеет три фундаментальных пятиугольника с единичными сторонами. Поэтому существует всего три выпуклых соединения этого тела с пирамидой M_3 . Их отличия видны на рис. 11, 12, 13, а формулы отличаются штрихами и занимают в списке (2) места с четвертого по шестое.

Шаг 2.2. Соединения с усечённой пирамидой M_{3a} . Она обладает тремя фундаментальными гранями. Сверхфундаментальными из них являются параллельные пятиугольники. Поэтому соединения по этим пятиугольникам приводят к телам, занимающим в списке (2) места с седьмого по девятое, см. рис. 14, 15.

Шаги 2.3 и 2.4. Не существует выпуклых соединений $M_{19a} + M_{19a}$, $M_{19a} + M_{19b}$, $M_{19b} + M_{19b}$.

3.3. Шаг 3.

Все многогранники, полученные соединением многогранника списка (2) с многогранником из списка (1), будем называть *3-составными* телами. Берем первый многогранник из списка

Рис. 11: $Q_{2,4}[]$ Рис. 12: $Q_{2,5}[]$ Рис. 13: $Q_{2,6}[]$ Рис. 14: $M_{3a} + M_{19a} = Q_{2,8}[5]$ Рис. 15: $M_{3a} + M_{19b} = Q_{2,9}[]$

(2) и находим все его выпуклые соединения с многогранниками списка (1).

Шаг 3.1. Многогранник $Q_{2,1}$ не обладает сверхфундаментальными гранями, поэтому он в списке закрашен и попадает в таблицу многогранников.

Шаг 3.2. Многогранник $Q_{2,2}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с рёбрами длины 2. Соединение $Q_{2,2}$ и M_{3a} приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,1}$. Соединение $Q_{2,2}$ и M_{19a} приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,2}$, см. рис. 16. Соединение $Q_{2,2}$ и M_{19b} приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,3}$, см. рис. 17.

Шаг 3.3. Многогранник $Q_{2,3}$ обладает тремя сверхфундаментальными гранями с единичными рёбрами и двумя – с рёбрами длины 2. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с такой шестиугольной гранью, которая, в свою очередь, смежная с неправильным пятиугольником. Номер два получает пересекающийся с плоскостью симметрии пятиугольник. Оставшемуся пятиугольнику дадим номер три. Соединение $Q_{2,3}$ и M_3 по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,4}$, см. рис. 18. Соединение $Q_{2,3}$ и M_3 по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,5}$, см. рис. 19. Соединение $Q_{2,3}$ с M_3 по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,6}$, см. рис. 20. Занумеруем сверхфундаментальные грани с рёбрами длины 2. Первый номер получает грань, смежная с тремя трапециями и двумя параллелограммами, второй номер присвоен пятиугольнику, смежному с пятью трапециями. Соединение $Q_{2,3}$ и M_{3a} по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,7}$, см. рис. 21. Соединение $Q_{2,3}$ и M_{3a} по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,8}$, см. рис. 22.

Рис. 16: $Q_{2,2} + M_{19a} = Q_{3,2}[5]$ Рис. 17: $Q_{2,2} + M_{19b} = Q_{3,3}[]$ Рис. 18: $Q_{3,4}[2]^+$ Рис. 19: $Q_{3,5}[]$ Рис. 20: $Q_{3,6}[2^+, 2]$

Шаг 3.4. Многогранник $Q_{2,4}$ обладает пятью сверхфундаментальными гранями, три из которых имеют единичные рёбра, а две обладают в два раза большими рёбрами. Номер три получает не пересекающийся с плоскостью симметрии пятиугольник. Второй номер получает пятиугольник, смежный с шестиугольником, соседями которого служат три трапеции. Первый номер приписан оставшемуся пятиугольнику, высота которого лежит в плоскости симметрии, а у смежного шестиугольника есть только две соседние трапеции. Первый номер из двух больших пятиугольников получает тот, который смежен с тремя трапециями. Второй номер присвоен пятиугольнику, окруженному пятью трапециями. Соединение $Q_{2,4}$ и M_3 по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,9}$, см. рис. 23. Соединение $Q_{2,4}$ и M_3 по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,10}$, см. рис. 24. Соединение $Q_{2,4}$ и M_3 по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,11}$, см. рис. 25. Соединение $Q_{2,4}$ и M_{3a} по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани с рёбрами длины 2 приводит к многограннику $Q_{3,3}$. Соединение $Q_{2,4}$ и M_{3a} по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,12}$, см. рис. 26.

Шаг 3.5. Многогранник $Q_{2,5}$ обладает тремя сверхфундаментальными пятиугольными гранями с единичными рёбрами и двумя сверхфундаментальными пятиугольными гранями с рёбрами длины 2. Первый номер присвоим пятиугольнику, смежному с двумя трапециями. Второй номер получает пятиугольник, ближайший к первому. Оставшемуся пятиугольнику дадим номер три. Соединение $Q_{2,5}$ и M_3 по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{3,9}$. Соединение $Q_{2,5}$ и M_3 по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,13}$, см. рис. 27.

Рис. 21: $Q_{2,3} + M_{3a} = Q_{3,7}[]$ Рис. 22: $Q_{2,3} + M'_{3a} = Q_{3,8}[]$ Рис. 23: $Q_{3,9}[]^+$ Рис. 24: $Q_{3,10}[]$ Рис. 25: $Q_{3,11}[]^+$

Соединение $Q_{2,5}$ и M_3 по третьей сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,14}$, см. рис. 28. Первый номер из двух больших пятиугольников получает тот, который смежен с тремя трапециями. Второй номер присвоен пятиугольнику окруженному пятью трапециями. Соединение $Q_{2,5}$ и M_{3a} по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани с рёбрами длины 2 приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,15}$, см. рис. 29. Соединение $Q_{2,5}$ и M_{3a} по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,16}$, см. рис. 30.

Шаг 3.6. Многогранник $Q_{2,6}$ обладает тремя сверхфундаментальными пятиугольными гранями с единичными рёбрами. Первый номер присвоим пятиугольнику, высота которого принадлежит плоскости отражения на себя тела $Q_{2,6}$. Второй номер получает пятиугольник с четырьмя смежными трапециями.

Оставшемуся пятиугольнику дадим номер три. Большому пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и с двумя параллелограммами, присвоим номер один. Другой пятиугольник с рёбрами длины два, занумеруем номером два. Соединение $Q_{2,6}$ и M_3 по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{3,10}$. Соединение $Q_{2,6}$ и M_3 по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{3,14}$. Соединение $Q_{2,6}$ с M_3 по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{3,11}$, точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{2,6}$ и M_{3a} по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани с рёбрами длины 2 приводит к многограннику $Q_{3,2}$, точнее — к его образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{2,6}$ и M_{3a} по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику $Q_{3,16}$.

Шаг 3.7. Многогранник $Q_{2,7}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными рёбрами. Поэтому существует единственное выпуклое соединение, которое приводит к много-

Рис. 26: $Q_{2,4} + M_{3a} = Q_{3,12}[]^+$ Рис. 27: $Q_{2,5} + M_3 = Q_{3,13}[]$ Рис. 28: $Q_{2,5} + M_3 = Q_{3,14}[]^+$

граннику $Q_{3,1}$.

Шаг 3.8. Многогранник $Q_{2,8}$ обладает тремя сверхфундаментальными пятиугольными гранями с единичными рёбрами. Занумеруем их в порядке удаления от плоскости пятиугольной грани с рёбрами длины 2. Пусть первый пятиугольник имеет общую с большим пятиугольником вершину, а третий пятиугольник параллелен этой плоскости. Соединение $Q_{2,8}$ и M_3 по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{3,8}$. Соединение $Q_{2,8}$ и M_3 по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{3,7}$. Соединение $Q_{2,8}$ и M_3 по третьему пятиугольнику приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{3,17}$, см. рис. 31. Соединение $Q_{2,8}$ и M_{3a} по большой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{3,18}$, см. рис. 32.

Шаг 3.9. Группа симметрий тела $Q_{2,9}$ порождена отражениями от перпендикулярных плоскостей, одна из которых содержит общее ребро трапеций, смежных с пятиугольными гранями. Напротив этого ребра расположена общая сторона шестиугольных граней. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани в порядке их удаления от этого ребра, которое обозначим буквой r :

- 0-я грань содержит вершину ребра r ,
- 1-я грань смежна с шестиугольником, одна из сторон которого есть ребро r ,
- 2-я грань не смежна с двумя смежными трапециями и не смежна с пятиугольником, одна из сторон которого есть ребро r ,
- 3-я грань смежна с двумя смежными трапециями.

Рис. 29: $Q_{2,5} + M_{3a} = Q_{3,15}[]$ Рис. 30: $Q_{2,5} + M'_{3a} = Q_{3,16}[]$ Рис. 31: $Q_{2,8} + M_3 = Q_{3,17}[5]$ Рис. 32: $Q_{2,8} + M_{3a} = Q_{3,18}[3, 5]$

Соединение $Q_{2,9}$ с M_3 по нулевой грани приводит к многограннику $Q_{3,12}$. Соединение по первой грани равно многограннику $Q_{3,15}$. Соединение $Q_{2,9}$ и M_3 по второй грани даёт тело $Q_{3,12}$. Наконец, справедливо равенство $Q_{2,9} + M_3 = Q_{3,16}$ при соединении по третьему фундаментальному пятиугольнику тела $Q_{2,9}$. Таким образом, соединения многогранника $Q_{2,9}$ и пирамиды M_3 к новым многогранникам не приводят.

Чтобы завершить третий шаг алгоритма, остаётся заметить, что $Q_{2,9} + M_{3a} = Q_{2,8}$.

3.4. Шаг 4.

4-составной многогранник можно получить соединением 3-составного тела и многогранника из списка (1).

Шаг 4.1. Многогранник $Q_{4,1} = Q_{3,1} + M_3$ подобен телу $Q_{2,1}$. Других выпуклых соединений тела $Q_{3,1}$ с многогранниками списка (1) не существует.

Шаг 4.2. Многогранник $Q_{4,2} = Q_{3,2} + M_3$, см. рис. 33. К большой сверхфундаментальной грани присоединяем усеченную пирамиду M_{3a} и получаем тело $Q_{4,3} = Q_{3,2} + M_{3a}$, см. рис. 34. Его можно получить соединением пирамиды M_3 и архимедова тела $M_{19} = Q_{3,18}$. Выпуклых соединений тела $Q_{3,2}$ с многогранниками M_{19a} и M_{19b} не существует.

Шаг 4.3. Многогранник $Q_{3,3}$ обладает тремя сверхфундаментальными гранями с единич-

Рис. 33: $Q_{3,2} + M_3 = Q_{4,2}[]$ Рис. 34: $Q_{3,2} + M_{3a} = Q_{4,3}[5]$

ными ребрами. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с такой шестиугольной гранью, каждая смежная грань которой есть правильный многоугольник. Наиболее удалён-

Рис. 35: $Q_{4,4}[]^+$ Рис. 36: $Q_{4,5}[]$ Рис. 37: $Q_{4,6}[]$

ный от этого шестиугольника сверхфундаментальный пятиугольник назовём третьим, и пусть между первым и третьим расположена вторая сверхфундаментальная пятиугольная грань. Присоединяя к этим пятиугольникам в указанном порядке пирамиды M_3 , получим тела

$$Q_{3,3} + M_3, []^+, Q_{3,3} + M_3, [], Q_{3,3} + M'_3, [],$$

см. рис. 35, 36, 37. Наконец, $Q_{3,3} + M_{3a} = Q_{3,7}$.

Шаг 4.4. Многогранник $Q_{3,4}$ обладает двумя сверхфундаментальными пятиугольными гранями: с единичными рёбрами и рёбрами длины 2. Получаем $Q_{4,7} = Q_{3,4} + M_3$, см. рис. 38 и $Q_{4,8} = Q_{3,4} + M_{3a}$, см. рис. 39.

Шаг 4.5. Соединение $Q_{3,5}$ с M_3 по сверхфундаментальной пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{4,7}$. Соединение $Q_{3,5}$ с M_{3a} по грани, ближайшей к двум присоединённым пирамидам M_3 , приводит к новому многограннику $Q_{4,9}$, см. рис. 40. Многогранник $Q_{4,10}$ получается соединением $Q_{3,5}$ с M_{3a} по другой грани, см. рис. 41.

Шаг 4.6. Многогранник $Q_{3,6}$ обладает одной сверхфундаментальной пятиугольной гранью с рёбрами длины 2. Получаем $Q_{4,11} = Q_{3,6} + M_{3a}$, см. рис. 42.

Рис. 38: $Q_{3,4} + M_3 = Q_{4,7}[^+]^+$ Рис. 39: $Q_{3,4} + M_{3a} = Q_{4,8}[^+]^+$ Рис. 40: $Q_{4,9}[]$ Рис. 41: $Q_{4,10}[]$ Рис. 42: $Q_{4,11}[]$

Шаг 4.7. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с единичными рёбрами многогранника $Q_{3,7}$ следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, не имеющий общих вершин с большим пятиугольником. Из двух сверхфундаментальных пятиугольников, имеющих такие вершины, номер два присвоим тому, который расположен ближе к вершине с пятью неправильными пятиугольниками. Оставшейся пятиугольник получает номер три. Соединение $Q_{3,7}$ и M_3 по первой сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,9}$. Соединение $Q_{3,7}$ и M_3 по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,8}$. Соединение $Q_{3,7}$ и M_3 по третьему пятиугольнику приводит к многограннику $Q_{4,11}$. Соединение $Q_{3,7}$ и M_{3a} по сверхфундаментальной пятиугольной грани с рёбрами длины 2 приводит к многограннику $Q_{4,3}$.

Шаг 4.8. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с единичными рёбрами многогранника $Q_{3,8}$ следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, имеющий общую вершину с большим пятиугольником. Из трёх оставшихся сверхфундаментальных пятиугольников два не параллельны большой пятиугольной грани. Номер два присвоим тому, который расположен ближе к вершине с тремя неправильными пятиугольниками. А оставшейся пятиугольник получает номер три. Пятиугольник, параллельный большому пятиугольнику, занумеруем четвёртым номером. Соединение $Q_{3,8}$ и M_3 по первой сверхфундаментальной пя-

Рис. 43: $Q_{3,9} + M_3 = Q_{4,12}[]^+$

тиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,10}$. Соединение $Q_{3,8}$ и M_3 по второй сверхфундаментальной пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,8}$. Соединение $Q_{3,8}$ и M_3 по третьему пятиугольнику приводит к многограннику $Q_{4,11}$. Соединение $Q_{3,8}$ и M_3 по четвёртому пятиугольнику приводит к многограннику $Q_{4,2}$. Соединение $Q_{3,8}$ и M_{3a} по сверхфундаментальной пятиугольной грани с рёбрами длины 2 приводит к многограннику $Q_{4,3}$.

Шаг 4.9. Соединение $Q_{3,9}$ с M_3 по сверхфундаментальной пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{4,12}$, см. рис. 43. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с рёбрами длины 2 многогранника $Q_{3,9}$ следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с двумя параллелограммами, каждый из которых смежен с неправильной пятиугольной гранью. Оставшемуся пятиугольнику с рёбрами длины 2 дадим второй номер. Соединение $Q_{3,9}$ с M_{3a} по первой пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{4,13}$, см. рис. 44. Соединение $Q_{3,9}$ с

Рис. 44: $Q_{3,9} + M_{3a} = Q_{4,13}[]$ Рис. 45: $Q_{3,9} + M'_{3a} = Q_{4,14}[]^+$

M_{3a} по второй пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{4,14}$, см. рис. 45.

Шаг 4.10. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с рёбрами длины 2 многогранника $Q_{3,10}$ следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с двумя параллелограммами, каждый из которых смежен с неправильной пятиугольной гранью. Оставшемуся пятиугольнику с рёбрами длины 2 дадим второй номер. Соединение $Q_{3,10}$ с M_{3a} по первой пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{4,5}$.

Рис. 46: $Q_{3,10} + M_3 = Q_{4,15}[2]^+$

Соединение $Q_{3,10}$ с M_{3a} по второй пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{4,15}$, см. рис. 46.

Шаг 4.11. Соединение $Q_{3,11}$ с M_3 по пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{4,12}$. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с рёбрами длины 2 многогранника $Q_{3,11}$ следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с пятью трапециями. Второй номер получит пятиугольник, смежный с двумя параллелограммами. Оставшемуся пятиугольнику с рёбрами длины 2 дадим третий номер. Соединение

Рис. 47: $Q_{4,16}[]^+$

Рис. 48: $Q_{4,17}[]$

Рис. 49: $Q_{4,18}[]^+$

$Q_{3,11}$ с M_{3a} по первой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,16}$, см. рис. 47. Соединение $Q_{3,11}$ с M_{3a} по второй пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,17}$, см. рис. 48. Соединение $Q_{3,11}$ с M_{3a} по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,18}$, см. рис. 49.

Шаг 4.12. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными рёбрами многогранника $Q_{3,12}$ следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с

пятью правильными шестиугольниками. Второй номер получает пятиугольник смежный с четырьмя трапециями. Третий номер получает сверхфундаментальный пятиугольник, который из оставшихся трёх ближе всех расположен к приклеенной пирамиде M_3 . Номер четыре получает сверхфундаментальный пятиугольник, лежащий ближе к третьему пятиугольнику. Оставшейся занумеруем пятым номером. Соединение $Q_{3,12}$ с M_3 по первой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,18}$. Соединение $Q_{3,12}$ с M_3 по второй пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,15}$, точнее к его образу при отражении от плоскости, которое меняет местами большие пятиугольные грани. Соединение $Q_{3,12}$ с M_3 по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,13}$. Соединение $Q_{3,12}$ с M_3 по четвертой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,14}$. Соединение $Q_{3,12}$ с M_3 по пятой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,12}$.

Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с рёбрами длины 2 многогранника $Q_{3,12}$ следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с пятью трапециями. Второй номер получит пятиугольник, смежный с двумя параллелограммами. Соединение $Q_{3,12}$ с M_{3a} по первой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{3,8}$, а по второй – к многограннику $Q_{3,7}$.

Шаг 4.13. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными рёбрами многогранника $Q_{3,13}$ следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с шестиугольной гранью, которая смежна с тремя трапециями. Номер два получит оставшийся пятиугольник. Занумеруем фундаментальные пятиугольные грани с ребрами длины 2 многогранника $Q_{3,13}$ следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с двумя параллелограммами и тремя трапециями. Оставшимся пятиугольнику с рёбрами длины 2 дадим второй номер. Соединение $Q_{3,13}$ с M_3 по первой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,19}$, см. рис. 50. Соединение $Q_{3,13}$ с M_3 по второй пятиугольной грани приводит

Рис. 50: $Q_{3,13} + M_3 = Q_{4,19}[]$ Рис. 51: $Q_{3,13} + M'_3 = Q_{4,20}[3]$

к многограннику, который будем обозначать $Q_{4,20}$, см. рис. 51. Соединение $Q_{3,13}$ с M_{3a} по первой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,21}$, см. рис. 52. Соединение $Q_{3,13}$ с M_{3a} по второй пятиугольной грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{4,22}$, см. рис. 53.

Шаг 4.14. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными рёбрами многогранника $Q_{3,14}$ следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с тремя шестиугольными гранями. Номер два получит оставшийся пятиугольник. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с ребрами длины 2 многогранника $Q_{3,14}$ так. Первый номер получает пятиугольник, имеющий общую с первой пятиугольной гранью с

Рис. 52: $Q_{3,13} + M_{3a} = Q_{4,21}[\]^+$ Рис. 53: $Q_{3,13} + M'_{3a} = Q_{4,22}[2]$

единичными рёбрами вершину. Второй номер получает пятиугольник, смежный с четырьмя параллелограммами. Оставшимся пятиугольнику с рёбрами длины 2 дадим третий номер. Соединение $Q_{3,14}$ с M_3 по первой пятиугольной грани приводит к многограннику, который

Рис. 54: $Q_{3,14} + M_3 = Q_{4,23}[\]^+$

будем обозначать $Q_{4,23}$, см. рис. 54. Соединение $Q_{3,14}$ с M_3 по второй пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,19}$, точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{3,14}$ с M_{3a} по первой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,16}$, точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{3,14}$ с M_{3a} по второй пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,14}$, точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{3,14}$ с M_{3a} по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,21}$.

Шаг 4.15. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными рёбрами многогранника $Q_{3,15}$ следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с четырьмя трапециями. Второй номер получает пятиугольник, который лежит ближе к первому. Оставшимся присвоим номер три, её пересекает плоскость отражения, совмещающего с собой многогранник. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с рёбрами длины 2 многогранника $Q_{3,15}$ следующим образом. Первый номер получает пятиугольник, смежный с пятью трапециями. Оставшийся получает номер два. Соединение $Q_{3,15}$ с M_3 по первой

пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,21}$, точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{3,15}$ с M_3 по второй пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,14}$, точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{3,15}$ с M_3 по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,22}$, точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{3,15}$ с M_{3a} по первой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{3,8}$. Соединение $Q_{3,15}$ с M_{3a} по второй пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{3,19}$.

Шаг 4.16. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными рёбрами многогранника $Q_{3,16}$ следующим образом. Пятиугольник, имеющий общую вершину с большой пятиугольной гранью и смежный с такой шестиугольной гранью, которая параллельна неправильной пятиугольной грани, получает номер один. Другой пятиугольник, смежный с этим шестиугольником, приобретает номер 2. Плоскость отражения, совмещающая с собой многогранник $Q_{3,16}$, проходит через вершину и середину ребра неправильного пятиугольника и содержит высоту второго пятиугольника. Четвёртый номер присвоим пятиугольнику, высота которого содержится в этой плоскости отражения. Оставшийся пятиугольник получает номер три, он имеет общую с большим пятиугольником вершину. Соединение $Q_{3,16}$ с M_3 по первой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,16}$, точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{3,16}$ с M_3 по второй пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,5}$. Соединение $Q_{3,16}$ с M_3 по третьей пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,6}$. Соединение $Q_{3,16}$ с M_3 по четвертой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,21}$. Соединение $Q_{3,16}$ и M_{3a} по сверхфундаментальной пятиугольной грани с ребрами длины 2 приводит к многограннику $Q_{3,8}$.

Шаг 4.17. Многогранник $Q_{3,17}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными рёбрами и одной — с рёбрами длины 2. Соединение $Q_{3,17}$ с M_3 по пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{4,2}$. Соединение $Q_{3,17}$ с M_{3a} по пятиугольной грани с рёбрами длины 2 приводит к многограннику $Q_{4,3}$.

Шаг 4.18. Многогранник $Q_{3,18}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными рёбрами. Соединение приводит к фигуре $Q_{4,3}$.

3.5. Шаг 5.

Будем искать *5-составные многогранники*, соединяя *4-составные тела* списка (4) с многогранниками списка (1).

Шаг 5.1. Берем первый многогранник из списка (4) и находим все его выпуклые соединения с многогранниками списка (1). Многогранник $Q_{4,1}$ не обладает сверхфундаментальными гранями, поэтому он в списке выделен шрифтом.

Шаг 5.2. Многогранник $Q_{4,2}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными ребрами и одной — с рёбрами длины 2. Соединение $Q_{4,2}$ с M_3 по пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к новому многограннику $Q_{5,1}$, см. рис. 55. Соединение $Q_{4,2}$ с M_{3a} по пятиугольной грани с рёбрами длины 2 приводит к многограннику, которому дадим обозначение $Q_{5,2}$, см. рис. 56.

Шаг 5.3. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными рёбрами многогранника $Q_{4,3}$ следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с такой шестиугольной гранью, которая, в свою очередь, смежна с неправильным пятиугольником. Оставшийся получает номер два. Соединение $Q_{4,3}$ с M_3 по первой пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,2}$. Соединение $Q_{4,3}$ с M_3 по второй пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{5,3}$, см. рис. 57.

Шаг 5.4. Многогранник $Q_{4,4}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными рёбрами и двумя — с вдвое большими рёбрами. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с рёбрами длины 2 следующим образом. Большому пятиугольнику, смежному

Рис. 55: $Q_{4,2} + M_3 = Q_{5,1}[]$ Рис. 56: $Q_{4,2} + M_{3a} = Q_{5,2}[2]$ Рис. 57: $Q_{4,3} + M_3 = Q_{5,3}[2^+, 10]$ Рис. 58: $Q_{4,4} + M_3 = Q_{5,4}[]^+$

с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один, другому пятиугольнику с рёбрами длины два дадим номер два. Соединение $Q_{4,4}$ с M_3 по пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{5,4}$, см. рис. 58. Соединение $Q_{4,4}$ с M_{3a} по первой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,9}$. Соединение $Q_{4,4}$ с M_{3a} по второй пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{4,8}$, точнее к его образу при отражении от плоскости.

Шаг 5.5. Многогранник $Q_{4,5}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с рёбрами длины 2. Соединение $Q_{4,5}$ с M_{3a} приводит к многограннику $Q_{4,11}$.

Шаг 5.6. Многогранник $Q_{4,6}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными рёбрами и одной — с рёбрами длины 2. Соединение $Q_{4,6}$ с M_3 по пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,4}$. Соединение $Q_{4,6}$ с M_{3a} по пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{4,8}$.

Шаг 5.7. Многогранник $Q_{4,7}$ обладает двумя сверхфундаментальными гранями с рёбрами длины 2. Пятиугольнику смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами присвоим номер один. Другой пятиугольник с рёбрами длины два занумеруем номером два. Соединение $Q_{4,7}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{5,5}$, см. рис. 59. Соединение $Q_{4,7}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику, который будем

Рис. 59: $Q_{4,7} + M_{3a} = Q_{5,5}[]$ Рис. 60: $Q_{4,7} + M'_{3a} = Q_{5,6}[]$

обозначать $Q_{5,6}$, см. рис. 60.

Шаг 5.8. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с единичными рёбрами многогранника $Q_{4,8}$ следующим образом. Номер один присвоим многограннику, имеющему общую вершину с большим пятиугольником. Другой многогранник, занумеруем двойкой. Соединение $Q_{4,8}$ с M_3 по первой пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,5}$. Соединение $Q_{4,8}$ с M_3 по второй пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,6}$. Соединение $Q_{4,8}$ с M_{3a} приводит к многограннику $Q_{5,2}$.

Шаг 5.9. Многогранник $Q_{4,9}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными рёбрами и одной — с вдвое большими рёбрами. Соединение $Q_{4,9}$ с M_3 по пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,6}$. Соединение $Q_{4,9}$ с M_{3a} приводит к многограннику $Q_{5,2}$.

Шаг 5.10. Многогранник $Q_{4,10}$ обладает двумя сверхфундаментальными гранями с единичными рёбрами и одной — с рёбрами длины два. Номер один присвоим пятиугольнику с единичными рёбрами, параллельному большому пятиугольнику. Другой пятиугольник занумеруем вторым номером. Соединение $Q_{4,10}$ с M_3 по первому пятиугольнику с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,1}$. Соединение $Q_{4,10}$ с M_3 по второму пятиугольнику с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,5}$. Соединение $Q_{4,10}$ с M_{3a} приводит к многограннику $Q_{5,2}$.

Шаг 5.11. Многогранник $Q_{4,11}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с рёбрами длины два. Соединение $Q_{4,5}$ с M_{3a} приводит к многограннику $Q_{5,3}$.

Шаг 5.12. Многогранник $Q_{4,12}$ обладает тремя сверхфундаментальными гранями с рёбрами длины два. Пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один. Второй номер дадим пятиугольнику, смежному с такой трапецией, которая, в свою очередь, смежна с неправильным пятиугольником. Оставшийся пятиугольник с рёбрами длины два получает номер три. Соединение $Q_{4,12}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{5,7}$, см. рис. 61. Соединение $Q_{4,12}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{5,8}$, см. рис. 62. Соединение $Q_{4,12}$ с M_{3a} по третьей грани приводит к многограннику $Q_{5,4}$, точнее к его образу при отражении от плоскости.

Шаг 5.13. Многогранник $Q_{4,13}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными рёбрами и одной — с рёбрами длины два. Соединение $Q_{4,13}$ с M_3 по пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,4}$, точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{4,13}$ с M_{3a} по большой грани приводит к многограннику $Q_{4,8}$, точнее

Рис. 61: $Q_{4,12} + M_{3a} = Q_{5,7}^{+}$ Рис. 62: $Q_{4,12} + M_{3a} = Q_{5,8}$

к его образу при отражении от плоскости.

Шаг 5.14. Многогранник $Q_{4,14}$ обладает двумя сверхфундаментальными гранями с единичными рёбрами и двумя с рёбрами длины два. Первый номер присвоим маленькому многограннику, смежному с четырьмя трапециями. Оставшийся занумеруем вторым номером. Соединение $Q_{4,14}$ с M_3 по первой пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,7}$, точнее к ее образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{4,14}$ с M_3 по второй пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,8}$. Занумеруем сверхфундаментальные грани с рёбрами длины два, следующим образом. Первый номер получает многогранник, имеющий две общие вершины с двумя маленькими пятиугольниками. Оставшийся получает номер два. Соединение $Q_{4,14}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику $Q_{4,8}$. Соединение $Q_{4,14}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику $Q_{4,2}$.

Шаг 5.15. Многогранник $Q_{4,15}$ обладает двумя сверхфундаментальными гранями с рёбрами длины два. Плоскость отражения, совмещающая с собой многогранник $Q_{4,15}$, проходит через вершину и середину ребра пятиугольника и содержит высоту первого пятиугольника. Оставшийся получает номер два. Соединение $Q_{4,15}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику $Q_{4,11}$. Соединение $Q_{4,15}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику $Q_{4,11}$.

Шаг 5.16. Многогранник $Q_{4,16}$ обладает двумя сверхфундаментальными гранями с единичными рёбрами и двумя с рёбрами длины два. Первый номер присвоим маленькому многограннику, смежному с пятью шестиугольниками. Оставшимся дадим второй номер. Соединение $Q_{4,16}$ с M_3 по первой пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,4}$. Соединение $Q_{4,16}$ с M_3 по второй пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,7}$. Занумеруем сверхфундаментальные грани с рёбрами длины два следующим образом. Пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один. Оставшимся пятиугольнику с рёбрами длины два присвоим номер два. Соединение $Q_{4,16}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику $Q_{4,10}$, а по второй грани — к многограннику $Q_{4,8}$.

Шаг 5.17. Многогранник $Q_{4,17}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными рёбрами и двумя с рёбрами длины два. Соединение $Q_{4,17}$ с M_3 по пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,8}$. Занумеруем сверхфундаментальные грани с рёбрами длины два следующим образом. Пятиугольнику, смежному с пятью трапециями, присвоим номер один. Оставшимся пятиугольнику с рёбрами длины два присвоим номер два. Соединение $Q_{4,17}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику $Q_{4,10}$. Соединение $Q_{4,17}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику $Q_{4,9}$.

Шаг 5.18. Многогранник $Q_{4,18}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными рёбрами и двумя с рёбрами длины два. Соединение $Q_{4,18}$ с M_3 по пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,4}$, точнее к его образу при отражении от плоскости. Занумеруем сверхфундаментальные грани с рёбрами длины два следующим образом. Пятиугольнику, смежному с пятью трапециями, присвоим номер один. Оставшимся пятиугольнику с рёбрами длины два присвоим номер два. Соединение $Q_{4,18}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику $Q_{4,8}$. Соединение $Q_{4,18}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику $Q_{4,9}$.

Шаг 5.19. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с рёбрами длины два многогранника $Q_{4,19}$ следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный

Рис. 63: $Q_{4,19} + M_{3a} = Q_{5,9}[]$

с трапецией, которая, в свою очередь, смежна с неправильным пятиугольником. Оставшимся пятиугольнику с рёбрами длины два присвоим номер два. Соединение $Q_{4,19}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику $Q_{4,8}$. Соединение $Q_{4,19}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{5,9}$, см. рис. 63.

Шаг 5.20. Многогранник $Q_{4,20}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с рёбрами длины два. Группа его симметрий порождена двумя отражениями от плоскостей. Соединение $Q_{4,20}$ с M_{3a} приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{5,9}$.

Шаг 5.21. Многогранник $Q_{4,21}$ обладает двумя сверхфундаментальными гранями с единичными рёбрами и двумя — с рёбрами длины два. Первый номер присвоим маленькому многограннику, смежному с шестугольником, который, в свою очередь, смежен с двумя трапециями. Оставшаяся пятиугольная грань с единичными рёбрами получает второй номер. Соединение $Q_{4,21}$ с M_3 по первой пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,7}$. Соединение $Q_{4,21}$ с M_3 по второй пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,9}$. Занумеруем сверхфундаментальные грани с рёбрами длины два следующим образом. Пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один. Оставшимся пятиугольнику с рёбрами длины два присвоим номер два. Соединение $Q_{4,21}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику $Q_{4,10}$. Соединение $Q_{4,21}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику $Q_{4,2}$.

Шаг 5.22. Многогранник $Q_{4,22}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с единичными рёбрами и одной — с рёбрами длины два. Соединение $Q_{4,22}$ с M_3 по пятиугольной грани с единичными рёбрами приводит к многограннику $Q_{5,9}$. Соединение $Q_{4,22}$ с M_{3a} по сверхфундаментальной грани с рёбрами длины два приводит к многограннику $Q_{4,2}$.

Шаг 5.23. Многогранник $Q_{4,23}$ обладает тремя сверхфундаментальными гранями с рёбрами длины два. Занумеруем сверхфундаментальные грани следующим образом. Пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один. Пяти-

угольнику, смежному с трапецией, которая, в свою очередь, смежна с трапецией, присвоим номер два. Оставшимся пятиугольнику с рёбрами длины два присвоим номер три. Соединение $Q_{4,23}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику $Q_{5,7}$. Соединение $Q_{4,23}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику $Q_{5,4}$, точнее к его образу при отражении от плоскости. Соединение $Q_{4,23}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику $Q_{5,8}$.

3.6. Шаг 6.

Берем первый многогранник из списка (5) и находим все его выпуклые соединения с многогранниками списка (1).

Шаг 6.1. Многогранник $Q_{5,1}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с рёбрами

Рис. 64: $Q_{5,1} + M_{3a} = Q_{6,1}[3]$

длины два. Соединение $Q_{5,1}$ с M_{3a} приводит к многограннику, который будем обозначать $Q_{6,1}$, см. рис. 64.

Шаг 6.2. Многогранник $Q_{5,2}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с рёбрами длины два. Соединение $Q_{5,2}$ с M_{3a} приводит к многограннику $Q_{6,1}$.

Шаг 6.3. Многогранник $Q_{5,3}$ не обладает сверхфундаментальными гранями.

Шаг 6.4. Многогранник $Q_{5,4}$ обладает двумя сверхфундаментальными гранями с рёбрами длины 2. Занумеруем сверхфундаментальные грани с рёбрами длины 2 следующим образом. Пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим номер один. Оставшийся пятиугольник с рёбрами длины два получает номер два. Соединение $Q_{5,4}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику $Q_{5,5}$. Соединение $Q_{5,4}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику $Q_{5,6}$.

Шаг 6.5. Многогранник $Q_{5,5}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с рёбрами длины два. Соединение $Q_{5,5}$ с M_{3a} приводит к многограннику $Q_{6,1}$.

Шаг 6.6. Многогранник $Q_{5,6}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с рёбрами длины два. Соединение $Q_{5,6}$ с M_{3a} приводит к многограннику $Q_{6,1}$.

Шаг 6.7. Занумеруем сверхфундаментальные пятиугольные грани с рёбрами длины два многогранника $Q_{5,7}$ следующим образом. Первым из них пусть будет пятиугольник, смежный с такой трапецией, которая, в свою очередь, смежна с неправильным пятиугольником. Оставшийся получает номер два. Соединение $Q_{5,7}$ с M_{3a} по первой пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{5,1}$. Соединение $Q_{5,7}$ с M_{3a} по второй пятиугольной грани приводит к многограннику $Q_{5,5}$.

Шаг 6.8. Многогранник $Q_{5,8}$ обладает двумя сверхфундаментальными гранями с рёбрами длины два. Занумеруем сверхфундаментальные грани с рёбрами длины два следующим образом. Пятиугольнику, смежному с тремя трапециями и двумя параллелограммами, присвоим

номер один. Оставшимся пятиугольнику с рёбрами длины два присвоим номер два. Соединение $Q_{5,8}$ с M_{3a} по первой грани приводит к многограннику $Q_{5,1}$. Соединение $Q_{5,8}$ с M_{3a} по второй грани приводит к многограннику $Q_{5,6}$.

Шаг 6.9. Многогранник $Q_{5,9}$ обладает одной сверхфундаментальной гранью с рёбрами длины два. Соединение $Q_{5,9}$ с M_{3a} приводит к многограннику $Q_{5,1}$.

3.7. Шаг 7, завершение доказательства

6-составной многогранник не обладает сверхфундаментальными гранями. Поэтому 7-составных тел не существует. Теорема доказана.

4. О разбиениях икосаэдра на паркетогранники

Если в основной теореме ограничение на длины рёбер соединений ослабить, оставляя возможные длины рёбер равными единице, двойке или тройке, то среди соединяемых тел появится икосаэдр. Его можно получить, присоединяя к телу $Q_{6,1}$, см. рис. 64, девять правильногранных пирамид M_3 . Дальнейшие соединения икосаэдра и тел с паркетными гранями нарушат выпуклость соединений. С другой стороны, тело M_{19a} рассекается плоскостью на два многогранника с паркетными гранями. Если сечением служит правильный десятиугольник с рёбрами длины три, то он делит тело M_{19a} на два равных многогранника, длины рёбер которых принимают значения: один, два, три, четыре. Этим паркетогранникам дадим обозна-

Рис. 65: $M_{19c} = CA_5 + M_{19d}$

чение M_{19c} . На рис. 65 тело M_{19c} представлено двумя проекциями в виде соединения двух паркетогранников: внизу расположена C -антипризма CA_5 , присоединённая равноугольным, но неравносторонним десятиугольником к телу, которое будем обозначать M_{19d} . C -антипризма и B -антипризма как сечения антипризмы появились в работе [1]. Разбиению тела M_{19a} на C -антипризму и два паркетогранника M_{19d} соответствует деление икосаэдра на антипризму и две пятиугольные пирамиды. Таким образом, обобщение теоремы о соединениях тел M_3 , M_{3a} , M_{19a} , M_{19b} встречает два естественных ограничения, которые не позволят увести от проблемы классификации типов выпуклых многогранников с паркетными гранями.

Первое заключается в том, что вместо тела M_{19a} берётся его часть, отсечённая по правильному десятиугольнику, а к усечённой пирамиде M_{3a} добавляются однотипные ей усечённые пирамиды, параллельные рёбра трапеций которых относятся как 1:2, 2:3, 3:4. Обозначим их $\frac{1}{2}M_{3a}$, $\frac{2}{3}M_{3a}$, $\frac{3}{4}M_{3a}$ соответственно, см. рис. 66. В этом случае длины рёбер принимают целые значения от одного до четырёх. Второе ограничение возникает при отказе от правильности многоугольников, из которых составлены грани. Оно описано выше и приводит к рёбрам длин один, два или три. Приходим к следующим задачам.

Рис. 66: $\frac{3}{4}M_{3a}, \frac{2}{3}M_{3a}, \frac{1}{2}M_{3a} = M_{3a}, M_3$

1. Найти все выпуклые соединения тел $M_3, M_{3a}, \frac{1}{2}M_{3a}, \frac{2}{3}M_{3a}, \frac{3}{4}M_{3a}, M_{19a}, M_{19b}, M_{19c}$ с условием, что длины рёбер принимают целые значения от одного до четырёх.

2. Найти все выпуклые соединения тел $M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19d}, CA_5$ с условием, что длины рёбер принимают целые значения от одного до трёх.

Существует несколько подходов к решению сформулированных задач. Первый, чисто теоретический, применён выше, где тела $M_3, M_{3a}, M_{19a}, M_{19b}$ служат входными данными процесса нахождения всех их выпуклых соединений с дополнительным ограничением на длину ребра каждого соединения. Процесс распадается на шесть шагов. Они видны в основной теореме.

В отличие от первого способа доказательства, который можно назвать линейным, второму можно дать название параллельный. Действительно, шаг i начинается с того, что многогранник $Q_{i-1,1}$, и каждый многогранник списка $(i-1)$ соединяется с каждым многогранником списка (1). Затем все многогранники списка $(i-2)$ соединяются с каждым многогранником списка (2). Таким образом, процесс нахождения многогранников, составленных из i тел списка (1), можно получить $(i-1)/2$ исследователям: первый соединяет каждое $(i-1)$ -составное тело с каждым 1-составным многогранником, второй – $(i-2)$ -составное тело с 2-составным, ..., причем число $(i-1)/2$ округляется. Например, процесс нахождения всех 6-составных многогранников теоремы распределяется на троих исследователей, как и процесс нахождения всех 7-составных тел. После того как трое предоставят свои списки, необходимо из второго списка удалить все тела первого списка, а из третьего удалить все тела первых двух списков. В результате исследователи получают полный список многогранников теоремы и завершают её доказательство.

Добавляя к алгебраическим и компьютерным моделям материализованные модели многогранников, приходим к третьему способу доказательства. Необходимо отметить, что при переходе от алгебраических моделей, координаты вершин которых вычисляются без округлений, к моделям материализованным в нашем и во многих других случаях мы не теряем строгости рассуждения. Действительно, получая, например, развёрнутый угол при соединении пятиугольными гранями тел M_{3a} и M_{19a} , мы делаем вывод о его величине не из вида материализованной модели, а из выполненных ранее вычислений и наблюдений. Преимущество последнего способа доказательства заключается в эффективности привлечения практически всех заинтересованных (даже без математической подготовки) лиц к созданию доказательства теоремы.

5. Заключение

Все три отмеченные в заключительном разделе способа доказательства основной теоремы применялись 2015-2018 годах. Мотивация авторов к этим исследованиям отражена в их статье [16]. Если вместо входных данных (1) поместить правильные пирамиды M_1 , M_2 , M_3 с трёх, четырёх и пятиугольными основаниями соответственно, то получим незавершённый пока процесс построения новых выпуклых многогранников с паркетными гранями и рёбрами либо равными, либо вдвое отличающимися по длине. В 2016 году стало ясно, что этот процесс завершится на 513 шаге. Анонсирована теорема, содержащая все такие тела, каждое из которых составлено не более чем из 16 правильных пирамид, [17]. Среди соединений этой теоремы встречаются разнотипные многогранники, полученные соединением по одним и тем же граням двух равных многогранников.

Обе названные теоремы станут частью будущей теоремы о классификации типов паркетогранников. В настоящее время они могут представлять самостоятельный интерес для квазикристаллографии. В частности, архимедово тело M_{19} является представителем фуллеренов, [18]. Кроме того, объём уже сделанных вычислений показывает необходимость привлечения в существенно больших масштабах программирования и компьютерной графики, для которых выполненная работа послужит хорошим тестом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пряхин Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1974. Том 45. Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л. С. 111-112. URL: <http://www.mathnet.ru/links/6706d6699d577bab347d27a27a93ceeb/zns12750.pdf>
2. Тимофеев А. В. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями // Чебышевский сб. 2011. Том 12 №2(38). С. 118-126. URL: <http://www.mathnet.ru/links/b6fcda1de8e852a5e4e94c82cced7286/cheb84.pdf>
3. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1967. Том 2. С. 5-221. URL: <http://www.mathnet.ru/links/6e4876565ecd2b4456cb9ac4034ae645/zns11408.pdf>
4. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces // Canad. J. Math. 1966. Vol. 18. P. 169-200.
5. Иванов Б. А. Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Укр. геом. сб. 1971. Том 10. С. 20-34.
6. Пряхин Ю. А. О выпуклых многогранниках с правильными гранями // Укр. геом. сб. 1973. Том 14. С. 83-88.
7. Тимофеев А. В. Выпуклые правильные многогранники, не рассекаемые никакой плоскостью на правильные части // Мат. тр./Ин-т мат. СО РАН. 2008. Том 11, №1. С. 132-152.
8. Тимофеев А. В. Несоставные многогранники, отличные от тел Платона и Архимеда // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Том 14, №2. С. 179-205.
9. Тимофеев А. В. К теории паркетогранников // Матер. XV Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: совр. проблемы и приложения», посв. столетию со дня рожд. доктора физ.-мат. наук, профессора Московского гос. университета им. М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича

- ча. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 58–61.
<http://poivs.tsput.ru/conf/international/XV/files/conference2018.pdf>
10. Табинова О. А., Тимофеев А. В. О классификации паркетных многоугольников // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В. П. Астафьева. 2013. №1(23). С. 216–219. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_18916660_50779549.pdf
 11. Гурин А. М. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями // Сиб. электрон. матем. изв. 2010. Том 7. А.5–А.23. <http://www.mathnet.ru/links/8fcc69c7c7030d28665f24f35f19d74a/semr222.pdf>
 12. Гурин А. М., Залгаллер В. А. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, составленными из правильных // Тр. С.-Петербург. мат. о-ва. 2008. Том 14. С. 215–294.
 13. Тимофеев А. В. О соединении несоставных многогранников // Алгебра и анализ. 2009. Том 21, №3. С. 165–209.
 14. Тимофеев А. В. Исправления в статье «О соединении несоставных многогранников» // Алгебра и анализ. 2011. Том 23, №4(2011). Третья стр. обложки.
 15. Тимофеев А. В. К перечню выпуклых правильных многогранников // Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова. / Под ред. И. Х. Сабитова и В. Н. Чубарикова. – М.: Изд-во МГУ, 2011. С. 155–170.
 16. Тимофеев А. В., Отмахова Е. С. Комплекс решений, необходимых для организации работы над научной проблемой коллективом сотрудников и студентов // Вестник КГПУ им. В. П. Астафьева. 2015. №3(33). С. 79–82.
 17. Тимофеев А. В., Судак Д. Н., Черепухина А. А. Составленные не более, чем из 16 правильных пирамид выпуклые тела с такими как у пирамид или вдвое большими рёбрами // Международная школа-семинар «Современная геометрия и её приложения». Международная научная конференция «Современная геометрия и её приложения»: сборник трудов. – Казань: Изд-во Казан. Ун-та, 2017. С. 140–142. https://kpfu.ru/portal/docs/F_1549733697/GEOMETRY2017_finish.pdf
 18. Бухштабер В. М., Ероховец Н. Ю. Усечения простых многогранников и приложения // Избранные вопросы математики и механики, Сборник статей. К 150-летию со дня рождения академика Владимира Андреевича Стеклова, Тр. МИАН. Том 289, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2015, 115–144.
 Buhstaber V. M., Erohovec N. YU., 2015, "Usecheniya prostykh mnogogrannikov i prilozheniya", *Izbrannyye voprosy matematiki i mekhaniki, Sbornik statej. K 150-letiyu so dnya rozhdeniya akademika Vladimira Andreevicha Steklova, Tr. MIAN*. Tom 289, MAIK «Nauka/Interperiodika», M., pp. 115–144.

REFERENCES

1. Prjakhin, J. A. 1974, "Vypuklyye mnogogranniki, grani kotorykh ravnougol'ny ili slozheny iz ravnougol'nykh", *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, vol. 45, "Nauka Leningrad. Otdel., Leningrad, pp. 111–112.

2. Timofeenko, A.V. 2011, "O vypuklykh mnogogrannikakh s ravnougol'nymi i parketnymi granyami", *Chebyshevsky Sb.*, vol.12, no. 2(38), pp. 118-126.
3. Zalgaller, V. A. 1969, "Convex polyhedra with regular faces", *Sem. in Math. Steklov Math. Inst. Leningrad*, vol. 2, Consultants Bureau, New York.
4. Johnson, N. W. 1966, "Convex polyhedra with regular faces", *Canad. J. Math.*, vol. 18. pp. 169-200.
5. Ivanov, B. A. 1971, "Mnogogranniki s granyami, slozhennymi iz pravil'nykh mnogougol'nikov", *Ukr. geom. sb.*, vol. 10, pp. 20-34.
6. Prjakhin, J. A. 1973, "O vypuklykh mnogogrannikakh s pravil'nymi granyami", *Ukr. geom. sb.*, vol. 14, pp. 83-88.
7. Timofeenko, A.V. 2009, "Convex regular-faced polyhedra indecomposable by any plane to regular-faced polyhedra", *Siberian Adv. Math.*, vol. 19, no. 4, pp. 287-300.
8. Timofeenko, A.V. 2009, "The non-platonic and non-Archimedean noncomposite polyhedra", *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, vol. 162, no. 5, pp. 710-729.
9. Timofeenko, A.V. 2018, "K teorii parketogrannikov", *Mater. XV Mezhdunarodnoy konferentsii «Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovr. problemy i prilozheniya», posv. stoletiyu so dnya rozhd. doktora fiz.-mat. nauk, professora Moskovskogo gos. universiteta im. M. V. Lomonosova Korobova Nikolaya Mikhaylovicha*, Tula: Izd-vo Tul. gos. ped. un-ta im. L. N. Tolstogo, 2018. pp. 58-61.
10. Tabinova, O.A. & Timofeenko, A.V. 2013, "O klassifikatsii parketnykh mnogougol'nikov", *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. V.P.Astaf'yeva*, no. 1(23), pp. 216-219. URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_18916660_50779549.pdf
11. Gurin, A.M. 2010, "K istorii izucheniya vypuklykh mnogogrannikov s pravil'nymi granyami", *Sib. elektron. matem. izv.*, 7 (2010), A.5-A.23. <http://www.mathnet.ru/links/8fcc69c7c7030d28665f24f35f19d74a/semr222.pdf>
12. Gurin, A.M. & Zalgaller, V.A. 2008, "K istorii izucheniya vypuklykh mnogogrannikov s pravil'nymi granyami i granyami, sostavlennymi iz pravil'nykh", *Tr. S.-Peterburg. mat. o-va.*, vol. 14, pp. 215-294.
13. Timofeenko, A.V. 2010, "Junction of noncomposite polyhedra", *St. Petersburg Mathematical Journal.*, vol. 21, no. 3, pp. 483-512.
14. Timofeenko, A.V. 2012, "Corrections to "Junction of noncomposite polyhedra", *St. Petersburg Mathematical Journal.*, vol. 23, no. 4, pp. 779-780.
15. Timofeenko, A.V. 2011, "K perechnyu vypuklykh pravil'nogrannikov", *Sovremennyye problemy matematiki i mekhaniki. Tom VI. Matematika. Vypusk 3. K 100-letiyu so dnya rozhdeniya N. V. Yefimova.* / Pod red. I.KH.Sabitova i V.N.Chubarikova. - M.: Izd-vo MGU, pp. 155-170.
16. Timofeenko, A.V. & Otmakhova, E.S. 2015, "Kompleks resheniy, neobkhodimyykh dlya organizatsii raboty nad nauchnoy problemoy kollektivom sotrudnikov i studentov", *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. V.P.Astaf'yeva.*, no. 3(33), pp. 79-82.

17. Timofeenko, A.V., Sudak, D.N. & Cherepukhina, A.A. 2017, “Sostavlenyye ne boleye, chem iz 16 pravil'nogrannykh piramid vypuklyye tela s takimi kak u piramid ili vdvoye bol'shimi robrami“, *Mezhdunarodnaya shkola-seminar «Sovremennaya geometriya i yeyo prilozheniya»*. *Mezhdunarodnaya nauchnaya konferentsiya «Sovremennaya geometriya i yeyo prilozheniya»: sbornik trudov*. – Kazan': Izd-vo Kazan. un-ta, pp. 140—142. https://kpfu.ru/portal/docs/F_1549733697/GEOMETRY2017_finish.pdf
18. Buchstaber, V. M. & Erokhovets, N.Yu. 2015, “Truncations of simple polytopes and applications“, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 289, no. 1, pp. 104-133.

Получено 25.06.2018

Принято в печать 17.08.2018