

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 17. Выпуск 1.

УДК 511.42

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧЕК В ОБЛАСТЯХ МАЛОЙ МЕРЫ

А. Г. Гусакова (г. Минск)

Аннотация

Задачи о распределении алгебраических чисел и точек с алгебраически сопряженными координатами являются естественным продолжением задач о целых и рациональных точках в фигурах и телах евклидова пространства.

В данной статье мы исследуем вопрос о распределении специальных алгебраических точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, координаты которых являются алгебраически сопряженными числами ограниченной степени и высоты с дополнительным условием: производная их минимального многочлена принимает малые значения в точках α_1 и α_2 . Такие точки возникают в задачах, связанных с классификациями чисел Малера [1], предложенной в 1932 году, и Коксма [2], предложенной несколько позднее в 1939 году. Одной из таких задач является проблема существования Т-чисел в классификации Малера. Около 40 лет было неясно, существуют ли такие числа или этот класс пуст, и только в 1970 году в работе В. Шмидта [3] было показано, что класс Т-чисел непустой и предложена конструкция данных чисел. Другая проблема — это вопрос о различии классификаций Малера и Коксма. В 2003 году Я. Бюжо опубликовал работу [4], в которой доказано, что существуют числа, для которых характеристики Малера и Коксма различны. Для доказательства данных фактов используются специальные алгебраические точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, рассмотренные в статье.

Мы рассматриваем специальные алгебраические точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ такие, что высота алгебраических чисел α_1 и α_2 не превосходит Q , а их степень не превосходит n и модуль производной их минимального члена $P(t)$ принимает следующие значения: $|P'(\alpha_1)| \leq Q^{1-v_1}$ и $|P'(\alpha_2)| \leq Q^{1-v_2}$ при $0 < v_1, v_2 < 1$. В работе найдены точные оценки сверху и снизу для количества специальных алгебраических точек в прямоугольниках, мера Лебега которых имеет порядок $Q^{-1+v_1+v_2}$.

Ключевые слова: метрическая теория совместных диофантовых приближений, мера Лебега, алгебраически сопряженные числа.

Библиография: 22 названия.

DISTRIBUTION OF SPECIAL ALGEBRAIC POINTS IN DOMAINS OF SMALL MEASURE

A. G. Gusakova (Minsk)

Abstract

Problems related to the distribution of algebraic numbers and points with algebraically conjugate coordinates are a natural generalization of problems connected with estimating of number of integer and rational points in figures and bodies of a Euclidean space.

In this paper we consider a problem related to the distribution of special algebraic points $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ with algebraically conjugate coordinates α_1 and α_2 such that their height and degree are bounded and the absolute values of $P'(\alpha_1)$ and $P'(\alpha_2)$ where $P(t)$ is a minimal polynomial of α_1 and α_2 are small. The sphere of application of this points is problems related to Mahler's classification of numbers [1] proposed in 1932 and Kosma's classification of numbers [2] proposed some years later. One of this is a question: do Mahler's T-numbers exist? This question has remained unanswered for nearly 40 years and only in 1970 W. Schmidt [3] showed

that the class of T-numbers is not empty and proposed the construction of this numbers. Another problem is a question about difference between Mahler's and Koksma's classifications. In 2003 Y. Bugeaud published a paper [4] where he proved that there are exist a numbers with different Mahler's and Koksma's characteristics. Special algebraic points $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ considered in this paper are used to prove this results.

We consider special algebraic points $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ such that the height of algebraically conjugate numbers α_1 and α_2 is bounded by Q , their degree is bounded by n and $|P'(\alpha_1)| \leq Q^{1-v_1}$, $|P'(\alpha_2)| \leq Q^{1-v_2}$ for $0 < v_1, v_2 < 1$ where $P(t)$ is a minimal polynomial of this numbers. In this paper we obtained the lower and upper bound for the quantity of special algebraic numbers in rectangles with the size of $Q^{-1+v_1+v_2}$.

Keywords: metric theory of simultaneous Diophantine approximations, Lebesgue measure, conjugate algebraic numbers.

Bibliography: 22 titles.

1. Введение

Введем следующие обозначения. Точку $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ назовем алгебраической точкой, если α_1 и α_2 корни одного и того же неприводимого многочлена $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ со взаимно простыми коэффициентами. Многочлен $P(x)$ является минимальным многочленом алгебраической точки α . Степенью и высотой алгебраической точки α будем называть соответственно степень и высоту ее минимального многочлена и обозначать, как $\deg \alpha = \deg P$ и $H(\alpha) = H(P)$.

Пусть $Q > 1$ — некоторое натуральное число. Через $\mathbb{A}_n^2(Q)$, $n \geq 2$ обозначим множество алгебраических точек ограниченной степени и высоты:

$$\mathbb{A}_n^2(Q) = \{\alpha : \deg \alpha \leq n, H(\alpha) \leq Q\},$$

а через $\mathcal{P}_n(Q)$, $n \geq 2$ — множество многочленов с целыми коэффициентами ограниченной степени и высоты:

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(t) \in \mathbb{Z}[t], \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}.$$

Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $0 \leq v_1, v_2 \leq 1$ и определим следующее множество алгебраических точек, которые будем называть **специальными алгебраическими точками**:

$$\mathbb{A}_n^2(Q, \mathbf{v}) = \{\alpha \in \mathbb{A}_n^2(Q) : |P'(\alpha_1)| \leq Q^{1-v_1}, |P'(\alpha_2)| \leq Q^{1-v_2}\}, n \geq 3,$$

$$\mathbb{A}_2^2(Q, \mathbf{v}) = \{\alpha \in \mathbb{A}_2^2(Q) : |P'(\alpha_1)| = |P'(\alpha_2)| \leq Q^{1-v_2-v_1}\},$$

и класс специальных многочленов:

$$\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}) = \{P(t) \in \mathcal{P}_n(Q) : |P'(\alpha_1)| \leq Q^{1-v_1}, |P'(\alpha_2)| \leq Q^{1-v_2}\}, n \geq 3,$$

$$\mathcal{P}_2(Q, \mathbf{v}) = \{P(t) \in \mathcal{P}_n(Q) : |P'(\alpha_1)| = |P'(\alpha_2)| \leq Q^{1-v_2-v_1}\}.$$

Кроме того, через $\mathbb{A}_n^2(Q, \mathbf{v}, D) = \mathbb{A}_n^2(Q, \mathbf{v}) \cap D$ обозначим множество алгебраических точек из $\mathbb{A}_n^2(Q, \mathbf{v})$, которые содержатся в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$. Через $\#S$ будем обозначать количество элементов конечного множества S , а через $\mu_k S$ — меру Лебега измеримого множества $S \subset \mathbb{R}^k$.

Вопрос о распределении алгебраических чисел и точек, а также некоторых величин, связанных с алгебраическими числами, является важной проблемой в теории диофантовых приближений [5] — [13]. За последние несколько лет появился ряд статей, связанных с оценкой количества алгебраических чисел и алгебраических точек степени, не превосходящей n , и высоты, не превосходящей Q , в областях, мера которых зависит от Q . В частности в 2014 году

в статье В. И. Берника и Ф. Гетце [14] была получена оценка снизу для количества алгебраических чисел в коротких интервалах, а в статье В. И. Берника, Ф. Гетце и О. Куксо [15] оценки снизу для количества алгебраических точек в областях малой меры. В том же году вышла статья [16] в которой рассмотрены специальные алгебраические числа, а именно алгебраические числа α с минимальным многочленом $P(t)$ таким, что $|P'(\alpha)| < Q^{1-v}$, $0 < v < \frac{1}{4}$. Были получены аналогичные результаты для количества специальных алгебраических чисел в коротких интервалах. В данной статье мы рассмотрим специальные алгебраические точки и получим оценки сверху и снизу для их количества в областях малой меры.

Рассмотрим прямоугольники $\Pi = I_1 \times I_2 \in \mathbb{R}^2$, где $\mu_1 I_1 = c_1(\varepsilon_1, n)Q^{-s_1}$ и $\mu_1 I_2 = c_2(\varepsilon_1, n)Q^{-s_2}$, с условиями: $s_1 + s_2 = 1 - v_1 - v_2$, $c_i(\varepsilon_1, n) \geq c_0(\varepsilon_1, n)$, $i = 1, 2$ и $\Pi \cap \{|x_1 - x_2| < \varepsilon_1\} = \emptyset$, где $\varepsilon_1 > 0$ — достаточно малая величина, не зависящая от Q .

Для специальных алгебраических точек степени $n \geq 3$ докажем следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1. *Для любого прямоугольника $\Pi = I_1 \times I_2$ с центром в точке $\mathbf{d}$ и условиями:*

1. $\mu_1 I_i = c_i(\varepsilon_1, n)Q^{-s_i}$, $s_1 + s_2 = 1 - v_1 - v_2$, $v_1 + v_2 < s_i < 1 - v_1 - v_2$;
2. $\Pi \cap \{|x_1 - x_2| < \varepsilon_1\} = \emptyset$;
3. $c_i(\varepsilon_1, n) \geq c_0(\varepsilon_1, n)$, $i = 1, 2$

справедлива оценка:

$$2^6 n^2 Q^{n+1-2(v_1+v_2)-\varepsilon_2} \mu_2 \Pi \leq \#\mathbb{A}_n^2(Q, \mathbf{v}, \Pi) \leq 3^{n2^{17}} Q^{n+1-2(v_1+v_2)} \mu_2 \Pi,$$

при $n \geq 3$, $Q > Q_0(n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{s}, \mathbf{v}, \mathbf{d})$ и $0 \leq v_1 + v_2 < \frac{1}{4}$.

Специальные алгебраические точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ второй степени определяются и ведут себя иначе по сравнению со специальными алгебраическими точками больших степеней. Эта особенность связана с тем, что модуль производной их минимального многочлена принимает одно и то же значение в точках α_1 и α_2 . В связи с этим для специальных алгебраических точек второй степени справедлива следующая теорема:

ТЕОРЕМА 2. *Для любого прямоугольника $\Pi = I_1 \times I_2$ с центром в точке $\mathbf{d}$ и условиями:*

1. $\mu_1 I_i = c_i(\varepsilon_1)Q^{-s_i}$, $s_1 + s_2 = 1 - v_1 - v_2$, $v_1 + v_2 < s_i < 1 - v_1 - v_2$;
2. $\Pi \cap \{|x_1 - x_2| < \varepsilon_1\} = \emptyset$;
3. $c_i(\varepsilon_1) \geq c_0(\varepsilon_1)$, $i = 1, 2$

справедлива оценка

$$2^{-50} \varepsilon_1^8 Q^{3-3(v_1+v_2)} \mu_2 \Pi \leq \#\mathbb{A}_2^2(Q, \mathbf{v}, \Pi) \leq 2^{13} Q^{3-3(v_1+v_2)} \mu_2 \Pi,$$

при $Q > Q_0(\varepsilon_1, \mathbf{s}, \mathbf{v}, \mathbf{d})$ и $0 \leq v_1 + v_2 < \frac{1}{3}$.

2. Вспомогательные утверждения

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения. Для многочлена $P(x)$ с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ пусть

$$S(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_i| = \min_{1 \leq j \leq n} |x - \alpha_j|\}.$$

ЛЕММА 1. *Пусть $x \in S(\alpha_1)$. Тогда справедливы оценки:*

$$|x - \alpha_1| \leq n \frac{|P(x)|}{|P'(x)|}, \quad |x - \alpha_1| \leq 2^{n-1} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}.$$

Данное утверждение доказано в [5], [17].

ЛЕММА 2. Пусть I — некоторый интервал, $A \subset \mathbb{R}$ — измеримое множество, $A \subset I$, $\mu_1 A \geq \frac{1}{2} \mu_1 I$. Если для всех $x \in A$ выполняется неравенство $|P(x)| < c_3(n)Q^{-w}$, $w > 0$, то для всех $x \in I$ справедливо неравенство

$$|P(x)| < 6^n(n+1)^{n+1}c_3(n)Q^{-w}.$$

Лемма 2 доказана в [17].

ЛЕММА 3. Пусть $\delta, K_0, \eta_1, \eta_2$ — действительные положительные числа, $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$ — два неприводимых многочлена степени, не превосходящей n , с условием

$$\max(H(P_1), H(P_2)) < K,$$

где $K > K_0(\delta)$. Пусть $J_1, J_2 \subset \mathbb{R}$ — некоторые интервалы, где $\mu_1 J_1 = K^{-\eta_1}$, $\mu_1 J_2 = K^{-\eta_2}$. Если при некоторых $\tau_1, \tau_2 > 0$ для всех $\mathbf{x} \in J_1 \times J_2$ выполняются неравенства

$$\max(|P_1(x_1)|, |P_2(x_1)|) < K^{-\tau_1}, \quad \max(|P_1(x_2)|, |P_2(x_2)|) < K^{-\tau_2},$$

то

$$\tau_1 + \tau_2 + 2 + 2 \max(\tau_1 + 1 - \eta_1, 0) + 2 \max(\tau_2 + 1 - \eta_2, 0) < 2n + \delta. \quad (1)$$

Лемма 3 доказана в [18].

3. Основные леммы

ЛЕММА 4. Обозначим через $L = L_2(Q, \delta_0, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \Pi)$ множество точек $\mathbf{x} \in \Pi$, для которых существует многочлен $P(t) \in \mathcal{P}_2(Q, \mathbf{v})$ такой, что справедливы неравенства

$$\begin{cases} |P(x_i)| < 2Q^{-w_i}, w_i > 0, \\ \min_i \{|P'(x_i)|\} < \delta_0 Q^{1-v_1-v_2}, \\ w_1 + w_2 = 1 - v_1 - v_2, i = 1, 2. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда для всех прямоугольников $\Pi = I_1 \times I_2 \subset [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ с условиями:

1. $\mu_1 I_i = c_i(\varepsilon_1)Q^{-s_i}$, $s_1 + s_2 = 1 - v_1 - v_2$, $v_1 + v_2 < s_i < 1 - v_1 - v_2$;
 2. $\Pi \cap \{|x_1 - x_2| < \varepsilon_1\} = \emptyset$;
 3. $c_i(\varepsilon_1) \geq c_0(\varepsilon_1)$, $i = 1, 2$
- справедлива оценка

$$\mu_2 L < \frac{1}{4} \mu_2 \Pi$$

при $\delta_0 \leq 2^{-22} \varepsilon_1^4$, $Q > Q_0(\varepsilon_1, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$ и $0 \leq v_1 + v_2 < \frac{1}{3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P(t) = b_2 t^2 + b_1 t + b_0$. Оценим величины $|P'(\alpha_i)|$, $i = 1, 2$ сверху и снизу. Используя лемму 1 и условие 2 для прямоугольника Π несложно видеть, что при $Q > Q_0(\varepsilon_1, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$ корни α_1 и α_2 многочлена $P(t)$ отделены друг от друга: $1 > |\alpha_1 - \alpha_2| > \frac{\varepsilon_1}{2}$, откуда следует:

$$|b_2| > |P'(\alpha_i)| = |b_2| |\alpha_1 - \alpha_2| \geq \frac{\varepsilon_1}{2} |b_2|, i = 1, 2. \quad (3)$$

С другой стороны, при разложении многочлена $P'(t)$ по формуле Тэйлора в окрестности точек x_1 и x_2 получим оценку:

$$|P'(\alpha_i)| < 2|P'(x_i)|, i = 1, 2,$$

из которой в частности следует, что

$$|b_2| \leq 4\varepsilon_1^{-1}\delta_0 Q^{1-v_1-v_2}. \quad (4)$$

Используя оценки (3) и лемму 1 получаем, что множество L содержится в объединении прямоугольников $\bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_2(Q, \mathbf{v}): \\ \sigma(P) \cap \Pi \neq \emptyset}} \sigma(P)$, где

$$\sigma(P) = \{|x_i - \alpha_i| \leq 4\varepsilon_1^{-1}Q^{-w_i}|b_2|^{-1}, i = 1, 2\}.$$

Отметим также, что при подходящем выборе величины $c_0(\varepsilon_1)$ мера множества $\sigma(P)$ будет меньше меры прямоугольника Π :

$$\mu_2\sigma(P) \leq 2^6\varepsilon_1^{-2}Q^{-1+v_1+v_2}|b_2|^{-2} \leq c_1c_2Q^{-1+v_1+v_2} \leq \mu_2\Pi.$$

Оценим меру множества L следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_2 L &\leq \mu_2 \bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_2(Q, \mathbf{v}): \\ \sigma(P) \cap \Pi \neq \emptyset}} \sigma(P) \leq \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_2(Q, \mathbf{v}): \\ \sigma(P) \cap \Pi \neq \emptyset}} \mu_2\sigma(P) \leq \\ &\leq 2^6\varepsilon_1^{-2}Q^{-1+v_1+v_2} \sum_{\substack{b_2, b_1, b_0: \\ P(t)=b_2t^2+b_1t+b_0 \in \mathcal{P}_2(Q, \mathbf{v}), \\ \sigma(P) \cap \Pi \neq \emptyset}} |b_2|^{-2}. \end{aligned}$$

Сейчас оценим сверху количество многочленов $P \in \mathcal{P}_2(Q, \mathbf{v})$, которые удовлетворяют системе (2) в некоторой точке $\mathbf{x} \in \Pi$ при фиксированном значении b_2 .

Пусть $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ — центр прямоугольника Π . Оценим значения многочлена $P(t)$, удовлетворяющего системе (2) в некоторой точке $\mathbf{x} \in \Pi$, в точках d_1 и d_2 . Запишем ряд Тэйлора для многочлена $P(t)$ в окрестности точки x_i :

$$P(d_i) = P(x_i) + \frac{1}{2}P'(x_i)(x_i - d_i) + \frac{1}{6}P''(x_i)(x_i - d_i)^2, i = 1, 2.$$

Справедлива оценка

$$|P(d_i)| < |P(x_i)| + (1 + \varepsilon_1)|b_2|\mu_1 I_i \leq 2(1 + \varepsilon_1) \max\{1, |b_2|\mu_1 I_i\}. \quad (5)$$

Не нарушая общности будем полагать, что $\mu_1 I_1 \leq \mu_1 I_2$.

Рассмотрим систему уравнений с тремя неизвестными $b_2, b_1, b_0 \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} b_2 d_1^2 + b_1 d_1 + b_0 = l_1(x_1), \\ b_2 d_2^2 + b_1 d_2 + b_0 = l_2(x_2), \end{cases} \quad (6)$$

где $|l_i(x_i)| \leq 2(1 + \varepsilon_1) \max\{1, |b_2|\mu_1 I_i\}$, $i = 1, 2$. Ясно, что каждому решению системы (6) соответствует многочлен $P(t) \in \mathcal{P}_2(Q, \mathbf{v})$, для которого верны оценки (5), поэтому достаточно оценить количество возможных значений пары переменных (b_1, b_0) таких, что система неравенств (6) справедлива при фиксированном значении b_2 . Для этого рассмотрим систему (6) для двух различных наборов $(b_2, b_{0,1}, b_{0,0})$, $(b_2, b_{j,1}, b_{j,0})$ и, взяв разность уравнений с такими неизвестными, получим следующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (b_{0,1} - b_{j,1})d_1 + (b_{0,0} - b_{j,0}) = l_1(x_{0,1}) - l_1(x_{j,1}) = \kappa_1(x_{0,1}, x_{j,1}), \\ (b_{0,1} - b_{j,1})d_2 + (b_{0,0} - b_{j,0}) = l_2(x_{0,2}) - l_2(x_{j,2}) = \kappa_2(x_{0,2}, x_{j,2}), \end{cases} \quad (7)$$

с двумя неизвестными $b_{0,1} - b_{j,1}$ и $b_{0,0} - b_{j,0}$. Так как модуль определителя данной системы $|\Delta| = |d_1 - d_2| > \varepsilon_1$ не равен 0, то мы можем применить метод Крамера для её решения. Используя неравенства $|\kappa_i(x_{0,i}, x_{j,i})| \leq 4(1 + \varepsilon_1) \max\{1, |b_2| \mu_1 I_i\}$, $i = 1, 2$, оценим определитель Δ_1 следующим образом

$$|\Delta_1| \leq 8(1 + \varepsilon_1) \max\{1, |b_2| \mu_1 I_2\},$$

откуда получим

$$|b_{0,1} - b_{j,1}| \leq \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|} \leq 8(1 + \varepsilon_1^{-1}) \max\{1, |b_2| \mu_1 I_2\}.$$

Данное неравенство означает, что все возможные значения коэффициента b_1 находятся в интервале J_1 , $\mu_1 J_1 \leq 16(1 + \varepsilon_1^{-1}) \max\{1, |b_2| \mu_1 I_2\}$ с центром в точке $b_{0,1}$ и, так как $b_1 \in \mathbb{Z}$, их количество не превосходит меры интервала J_1 .

Зафиксируем дополнительно одно из значений $b_1 \in J_1$ и рассмотрим два различных набора $(b_2, b_1, b_{0,0})$ и $(b_2, b_1, b_{j,0})$. В таком случае систему (7) можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} |b_{0,0} - b_{j,0}| = |\kappa_1(x_{0,1}, x_{j,1})| \leq 4(1 + \varepsilon_1) \max\{1, |b_2| \mu_1 I_1\}, \\ |b_{0,0} - b_{j,0}| = |\kappa_2(x_{0,2}, x_{j,2})| \leq 4(1 + \varepsilon_1) \max\{1, |b_2| \mu_1 I_2\}, \end{cases}$$

откуда следует, что все возможные значения коэффициента b_0 находятся в интервале J_0 , $\mu_1 J_0 \leq 8(1 + \varepsilon_1) \max\{1, |b_2| \mu_1 I_1\}$ с центром в точке $b_{0,0}$ и их количество не превосходит меры интервала J_0 .

Тогда при фиксированном значении b_2 справедлива оценка:

$$\#(b_1, b_0) \leq \begin{cases} 2^9 \varepsilon_1^{-1} |b_2|^2 \mu_2 \Pi, & |b_2| \geq (\mu_1 I_1)^{-1}, \\ 2^9 \varepsilon_1^{-1} |b_2| \mu_1 I_2, & (\mu_1 I_2)^{-1} \leq |b_2| \leq (\mu_1 I_1)^{-1}, \\ 2^9 \varepsilon_1^{-1}, & |b_2| \leq (\mu_1 I_2)^{-1}. \end{cases} \quad (8)$$

Воспользуемся оценками (4) и (8) и рассмотрим три случая, в каждом из которых будем оценивать меру множеств L_1 , L_2 и L_3 соответственно, где $L = L_1 \sqcup L_2 \sqcup L_3$.

Случай 1: $(\mu_1 I_1)^{-1} \leq |b_2| \leq 4\varepsilon_1^{-1} \delta_0 Q^{1-v_1-v_2}$

В данном случае справедлива первая оценка (8) и

$$\mu_2 L_1 \leq 2^{17} \varepsilon_1^{-4} Q^{-1+v_1+v_2} \mu_2 \Pi \cdot \delta_0 Q^{1-v_1-v_2} < \frac{1}{12} \mu_2 \Pi,$$

при подходящем выборе величины $\delta_0 = 2^{-22} \varepsilon_1^4$.

Случай 2: $(\mu_1 I_2)^{-1} \leq |b_2| \leq (\mu_1 I_1)^{-1}$

В данном случае справедлива вторая оценка (8) и

$$\begin{aligned} \mu_2 L_2 &\leq 2^{17} \varepsilon_1^{-4} Q^{-1+v_1+v_2} \mu_1 I_2 \sum_{(\mu_1 I_2)^{-1} \leq |b_2| \leq (\mu_1 I_1)^{-1}} |b_2|^{-1} \leq \\ &\leq 2^{18} \varepsilon_1^{-4} (s_1 - s_2) Q^{-1+v_1+v_2} \ln Q \mu_1 I_2. \end{aligned}$$

откуда при $\varepsilon_3 < 1 - v_1 - v_2 - s_1$ и $Q > Q_0(\varepsilon_1, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$ следует, что

$$\mu_2 L_2 \leq \frac{1}{12} c_1(\varepsilon_1) Q^{-1+v_1+v_2+(1-v_1-v_2-s_1)} \mu_1 I_2 \leq \frac{1}{12} \mu_2 \Pi.$$

Случай 3: $1 \leq |b_2| \leq (\mu_1 I_2)^{-1}$

В данном случае справедлива третья оценка из (8) и

$$\mu_2 L_3 \leq 2^{17} \varepsilon_1^{-4} Q^{-1+v_1+v_2} \sum_{1 \leq |b_2| \leq (\mu_1 I_2)^{-1}} |b_2|^{-2} \leq \frac{1}{12} \mu_2 \Pi$$

при подходящем выборе $c_0(\varepsilon_1)$, что завершает доказательство леммы 4. $\square$

ЛЕММА 5. Обозначим через $L = L_n(Q, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \Pi)$, $n \geq 3$ множество точек $\mathbf{x} \in \Pi$, для которых существует многочлен $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v})$ такой, что справедливы неравенства

$$\begin{cases} |P(x_i)| < 2Q^{-w_i}, w_i > v_i, \\ |P'(x_1)| < Q^{1-v_1-\frac{1}{2}\varepsilon_2} \text{ или } |P'(x_2)| < Q^{1-v_2-\frac{1}{2}\varepsilon_2}, \\ w_1 + w_2 = n - 1 - v_1 - v_2, i = 1, 2. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда для всех прямоугольников $\Pi = I_1 \times I_2 \subset [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ с условиями:

1. $\mu_1 I_i = c_i(\varepsilon_1, n)Q^{-s_i}$, $s_1 + s_2 = 1 - v_1 - v_2$, $v_1 + v_2 < s_i < 1 - v_1 - v_2$;
2. $\Pi \cap \{|x_1 - x_2| < \varepsilon_1\} = \emptyset$;
3. $c_i(\varepsilon_1, n) \geq c_0(\varepsilon_1, n)$, $i = 1, 2$

справедлива оценка

$$\mu_2 L < \frac{1}{4} \mu_2 \Pi$$

при $Q > Q_0(n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$ и $0 \leq v_1 + v_2 < \frac{1}{4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основная идея доказательства леммы 5 заключается в разбиении множеств T_i возможных значений производных $|P'(x_i)|$, $i = 1, 2$ на подмножества $T_{i,1}$, $T_{i,2}$ и $T_{i,3}$ и нахождении оценки сверху для меры множества решений системы (9) в случае, когда $|P'(x_i)| \in T_{i,k}$, $k = 1, 2, 3$. Проведем разбиение следующим образом:

$$T_i = (0, N(Q, n, i)) = \bigsqcup_{1 \leq k \leq 3} T_{i,k},$$

где

$$\begin{aligned} T_{i,1} &= \left(0; 4n^2 Q^{\frac{1}{2} - \frac{w_i}{2}}\right), \\ T_{i,2} &= \left(4n^2 Q^{\frac{1}{2} - \frac{w_i}{2}}; Q^{\frac{1-v_i}{2} - \frac{(n-2)(w_i+v_i)}{2(n-1)}}\right), \\ T_{i,3} &= \left(Q^{\frac{1-v_i}{2} - \frac{(n-2)(w_i+v_i)}{2(n-1)}}; N(Q, n, i)\right) \end{aligned}$$

и либо $N(Q, n, 1) = Q^{1-v_1-\frac{1}{2}\varepsilon_2}$, либо $N(Q, n, 2) = Q^{1-v_2-\frac{1}{2}\varepsilon_2}$.

Несложно убедиться, что при

$$|P'(x_i)| \geq 4n^2 Q^{\frac{1}{2} - \frac{w_i}{2}} \quad (10)$$

выполняется соотношение: $2|P'(x_i)| > |P'(\alpha_i)| > \frac{1}{2}|P'(x_i)|$, $i = 1, 2$. Тогда если $|P'(x_i)| \in T_{i,3}$, то $|P'(\alpha_i)| \in \bar{T}_{i,3} = \left(\frac{1}{2}Q^{\frac{1-v_i}{2} - \frac{(n-2)(w_i+v_i)}{2(n-1)}}; 2N(Q, n, i)\right)$, $i = 1, 2$.

Рассмотрим случай $|P'(\alpha_i)| \in \bar{T}_{i,3}$, $i = 1, 2$. При этом будем использовать метод математической индукции по степени многочлена n . Случай $n = 2$, доказательству которого посвящена лемма 4, является базой математической индукции.

При $|P'(\alpha_i)| \in \bar{T}_{i,3}$, $i = 1, 2$ имеем систему неравенств

$$\begin{cases} |P(x_i)| < 2Q^{-w_i}, w_i > v_i, \\ \frac{1}{2}Q^{\frac{1+v_i}{2} - \frac{(n-2)(w_i+v_i)}{2(n-1)}} < |P'(\alpha_i)| < 2N(Q, n, i), \\ w_1 + w_2 = n - 1 - v_1 - v_2, i = 1, 2. \end{cases} \quad (11)$$

Через $L_{3,3}$ обозначим множество точек $\mathbf{x} \in \Pi$, для которых найдется многочлен $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v})$ такой, что выполняются неравенства (11). Из леммы 1 следует, что $L_{3,3}$ содержится в объединении прямоугольников $\bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}): \\ \sigma(P) \cap \Pi \neq \emptyset}} \sigma(P)$, где

$$\sigma(P) = \{|x_i - \alpha_i| \leq 2^n Q^{-w_i} |P'(\alpha_i)|^{-1}, i = 1, 2\}.$$

Наряду с прямоугольниками $\sigma(P)$ рассмотрим прямоугольники

$$\sigma_{n-1}(P) = \{\sigma_{x_i, n-1} : |x_i - \alpha_i| \leq c_{64}(n) Q^{-u_{n-1, i}} |P'(\alpha_i)|^{-1}, i = 1, 2\}, \quad (12)$$

где

$$u_{n-1, i} = \frac{(n-2)(w_i + v_i)}{n-1} - v_i$$

и

$$\mu \sigma_j(P) \leq 16c_4(n)^2 Q^{\frac{-n+v_1+v_2}{2}} < \mu_2 \Pi$$

при $Q > Q_0(n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$. Отметим также, что меры прямоугольников $\sigma(P)$ и $\sigma_{n-1}(P)$ соотносятся следующим образом:

$$\mu_2 \sigma(P) \leq c_4(n)^{-2} 2^{2n} Q \mu_2 \sigma_{n-1}(P). \quad (13)$$

Зафиксируем величину a и рассмотрим класс многочленов с одним и тем же значением старшего коэффициента $a_n = a$: $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, a)$. Количество таких классов можно оценить, как

$$\#\{a\} \leq 3Q. \quad (14)$$

Воспользуемся методом существенных и несущественных областей, который ввел Спринджук [1]. Прямоугольник $\sigma_{n-1}(P_1)$, $P_1 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, a)$, будем называть **существенным**, если для любого другого прямоугольника $\sigma_{n-1}(P_2)$, $P_2 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, a)$, выполняется неравенство

$$\mu_2(\sigma_{n-1}(P_1) \cap \sigma_{n-1}(P_2)) < \frac{1}{2} \mu_2 \sigma_{n-1}(P_1).$$

В ином случае прямоугольник $\sigma_{n-1}(P_1)$ будем называть **несущественным**.

В случае существенных прямоугольников справедлива оценка

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, a)} \mu_2 \sigma_{n-1}(P) \leq 2\mu_2 \Pi.$$

Тогда из оценок (13) и (14) следует, что

$$\mu_2 L_{3,3} \leq \sum_a \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, a)} \mu_2 \sigma(P) \leq 3c_4(n)^{-2} 2^{2n} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, a)} \mu_2 \sigma_{n-1}(P) < \frac{1}{72} \mu_2 \Pi \quad (15)$$

при $c_4(n) = 2^{n+6}$.

В случае несущественных прямоугольников для любого прямоугольника $\sigma_{n-1}(P_1)$ найдется прямоугольник $\sigma_{n-1}(P_2)$ такой, что

$$\mu_2(\sigma_{n-1}(P_1) \cap \sigma_{n-1}(P_2)) > \frac{1}{2} \mu_2 \sigma_{n-1}(P_1).$$

Рассмотрим многочлен $R = P_2 - P_1$, $\deg R \leq n-1$, $H(R) \leq 2Q$ на множестве $\sigma_{n-1}(P_1) \cap \sigma_{n-1}(P_2)$. Оценим величины $|R(x_i)|$, $|R'(x_i)|$, $i = 1, 2$. Для этого разложим многочлены $P_1(t)$ и

$P_2(t)$ по формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа на интервале $\sigma_{x_i, n-1}(P_1) \cap \sigma_{x_i, n-1}(P_2)$:

$$P_k(x_i) = P'_k(\alpha_i)(x_i - \alpha_i) + \frac{1}{2}P''_k(\xi_i)(x_i - \alpha_i)^2, \quad \xi_i \in (x_i, \alpha_i), i = 1, 2, k = 1, 2.$$

Используя оценки (12) получим:

$$\begin{aligned} |P'_k(\alpha_i)(x_i - \alpha_i)| &\leq c_4(n)Q^{-u_{n-1,i}}, \\ |P''_i(\xi_2)(x - \alpha_i)^2| &\leq c_4(n)Q^{1-2u_{n-1,i}-1-v_i+\frac{(n-2)(w_i+v_i)}{n-1}} \leq c_4(n)Q^{-u_{n-1,i}} \end{aligned}$$

при $Q > Q_0(n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$.

В таком случае справедлива оценка

$$|R(x_i)| < |P_1(x)| + |P_2(x)| \leq 2c_6(n)Q^{-u_{n-1,i}}.$$

Аналогично разложим многочлены $P'_1(x_i)$ и $P'_2(x_i)$ по формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа на интервале $\sigma_{x_i, n-1}(P_1) \cap \sigma_{x_i, n-1}(P_2)$ и получим, что $|R'(x_i)| \leq 2c_4(n)|P'(\alpha_i)|$, $i = 1, 2$. Из леммы 2 следует, что с точностью до константы данные оценки выполняются на всем прямоугольнике $\sigma_{n-1}(P_1)$.

Поэтому мера решений системы (9) не превосходит меры решений следующей системы неравенств

$$\begin{cases} |R(x_i)| \leq 2c_5(n)Q^{-u_{n-1,i}}, u_{n-1,i} > 0, \\ |R'(x_1)| < c_5(n)Q^{1-v_1-\frac{1}{2}\varepsilon_2} \text{ или } |R'(x_2)| < c_5(n)Q^{1-v_2-\frac{1}{2}\varepsilon_2}, \\ u_{n-1,1} + u_{n-1,2} = n - 2 - v_1 - v_2, i = 1, 2. \end{cases} \quad (16)$$

По предположению индукции при $n \geq 4$ мера решений системы (16) не превосходит $\frac{1}{72}\mu_2\Pi$ при $Q > Q_0(n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$, что вместе с оценкой (15) означает, что $\mu_2 L_{3,3} \leq \frac{1}{36}\mu_2\Pi$.

Заметим, что при $n = 3$ система (16) не является системой вида (2), рассмотренной в лемме 4. В связи с этим рассмотрим случай $n = 3$ более подробно и опишем схему индукционного перехода в данном случае. Разобьем множество $L_{3,3}$ на два непересекающихся подмножества: $L_{3,3} = L_{3,3}^1 \sqcup L_{3,3}^2$. Через $L_{3,3}^1$ обозначим множество точек $\mathbf{x} \in \Pi$, для которых найдется многочлен $\mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v})$ такой, что выполняется следующая система неравенств:

$$\begin{cases} |P(x_i)| < 2Q^{-u_{3,i}}, u_{3,i} > 0, \\ |P'(\alpha_i)| > \frac{1}{2}Q^{\frac{2-w_i+v_i}{4}}, \\ \min_i \{|P'(\alpha_i)|\} < \delta_0 Q^{1-v_1-v_2}, \\ u_{3,i} + u_{3,i} = 2 - v_1 - v_2, i = 1, 2, \end{cases} \quad (17)$$

а через $L_{3,3}^2$, соответственно, обозначим множество точек $\mathbf{x} \in \Pi$, для которых найдется многочлен $\mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v})$ такой, что выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} |P(x_i)| < 2Q^{-u_{3,i}}, u_{3,i} > 0, \\ |P'(\alpha_1)| < 2Q^{1-v_1-\frac{1}{2}\varepsilon_2} \text{ или } |P'(\alpha_2)| < 2Q^{1-v_2-\frac{1}{2}\varepsilon_2}, \\ |P'(\alpha_i)| > \delta_0 Q^{1-v_1-v_2}, \\ u_{3,i} + u_{3,i} = 2 - v_1 - v_2, i = 1, 2. \end{cases} \quad (18)$$

Сперва оценим меру множества $L_{3,3}^1$. Для этого используем схему, описанную выше. Из леммы 1 следует, что $L_{3,3}^1$ содержится в объединении прямоугольников

$$\bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}): \\ \sigma(P) \cap \Pi \neq \emptyset}} \sigma(P),$$

где

$$\sigma(P) = \{|x_i - \alpha_i| \leq 8Q^{-u_{3,i}} |P'(\alpha_i)|^{-1}, i = 1, 2\}.$$

Наряду с прямоугольниками $\sigma(P)$ рассмотрим прямоугольники

$$\sigma_2(P) = \{\sigma_{x_{i,2}} : |x_i - \alpha_i| \leq c_6 Q^{-u_{2,i}} |P'(\alpha_i)|^{-1}, i = 1, 2\},$$

где $u_{2,i} = \frac{u_{3,i} - v_i}{2}$, $\mu \sigma_j(P) \leq 16c_6^2 Q^{\frac{-2+v_1+v_2}{2}} < \mu_2 \Pi$ при $Q > Q_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$ и меры прямоугольников $\sigma(P)$ и $\sigma_2(P)$ соотносятся как:

$$\mu_2 \sigma(P) \leq c_6^{-2} 2^6 Q \mu_2 \sigma_2(P).$$

Снова зафиксируем величину a и рассмотрим класс многочленов с одним и тем же значением старшего коэффициента $a_3 = a$: $\mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}, a)$. Количество таких классов можно оценить, как

$$\#\{a\} \leq 3Q.$$

Воспользуемся методом существенных и несущественных областей и в случае существенных прямоугольников получим оценку

$$\mu_2 L_{3,3}^1 \leq \sum_a \sum_{P \in \mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}, a)} \mu_2 \sigma(P) \leq 2^8 c_6^{-2} \sum_{P \in \mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}, a)} \mu_2 \sigma_2(P) < \frac{1}{144} \mu_2 \Pi \quad (19)$$

при $c_6 = 2^{10}$.

В случае несущественных прямоугольников $\sigma_2(P_1)$ сводим систему неравенств (17) к следующей системе неравенств для многочленов второй степени:

$$\begin{cases} |R(x_i)| \leq 2c_7 Q^{-u_{2,i}}, u_{2,i} > 0, \\ \min_i \{|R'(x_i)|\} < \delta_0 c_7 Q^{1-v_2-v_1}, \\ u_{2,1} + u_{2,2} = 1 - v_1 - v_2, i = 1, 2, \end{cases} \quad (20)$$

где $R \in \mathcal{P}_2(Q, \mathbf{v})$. Из леммы 4 следует, что при достаточно малом значении δ_0 и $Q > Q_0(n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$ мера множества решений системы (20) не превосходит $\frac{1}{144} \mu_2 \Pi$, откуда следует, что $L_{3,3}^1 < \frac{1}{72} \mu_2 \Pi$.

Перейдем к оценке меры множества $L_{3,3}^2$. Из леммы 1 следует, что $L_{3,3}^2$ содержится в объединении прямоугольников $\bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}): \\ \sigma(P) \cap \Pi \neq \emptyset}} \sigma(P)$, где

$$\sigma(P) = \{|x_i - \alpha_i| \leq 8Q^{-u_{3,i}} |P'(\alpha_i)|^{-1}, i = 1, 2\}.$$

Введем в рассмотрение класс многочленов $\mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$, который определим следующим образом:

$$\mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = \{P \in \mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}) : Q^{\lambda_i - \frac{1}{8}\varepsilon_2} < |P'(\alpha_i)| < Q^{\lambda_i}\}.$$

Количество таких классов оценим, как

$$\#\boldsymbol{\lambda} \leq 64(1 - v_1)(1 - v_2)\varepsilon_2^{-2}. \quad (21)$$

Используя неравенство (21), оценим меру множества $L_{3,3}^2$:

$$\mu_2 L_{3,3}^2 \leq \sum_{\boldsymbol{\lambda}} \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}): \\ \sigma(P) \cap \Pi \neq \emptyset}} \mu_2 \sigma(P) \leq c_8(\mathbf{v}, \varepsilon_2) Q^{-2+v_1+v_2} \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}): \\ \sigma(P) \cap \Pi \neq \emptyset}} Q^{-\lambda_1 - \lambda_2 + \frac{1}{4}\varepsilon_2}.$$

Найдем оценку сверху для количества многочленов

$$P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \in \mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}),$$

которые удовлетворяют системе (18) в некоторой точке $\mathbf{x} \in \Pi$.

Для этого оценим значения многочлена $P(t)$ и его производной $P'(t)$ в точках d_1, d_2 , где $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ центр прямоугольника Π . Разложим многочлен $P(t)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки α_i :

$$P(d_i) = \frac{1}{2}P'(\alpha_i)(\alpha_i - d_i) + \frac{1}{6}P''(\xi_i)(\alpha_i - d_i)^2, i = 1, 2.$$

Так как $P(t) \in \mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$ и $\lambda_i - \frac{1}{8}\varepsilon_2 \geq 1 - v_1 - v_2$, то справедливы неравенства:

$$|\alpha_i - d_i| \leq |\alpha_i - x_i| + |x_i - d_i| \leq 8Q^{-u_{3,i} - \lambda_i + \frac{1}{8}\varepsilon_2} + \mu_1 I_i \leq 16\mu_1 I_i,$$

и, так как $s_i > v_1 + v_2$, то

$$|P''(\xi_i)(\alpha_i - d_i)| \leq 6Q \cdot 16\mu_1 I_i \leq \delta_0 Q^{1-v_1-v_2} \leq |P'(\alpha_i)| \quad (22)$$

при $Q > Q_0(n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$. В таком случае

$$|P(d_i)| \leq 2Q^{\lambda_i} \mu_1 I_i. \quad (23)$$

Аналогично разложим многочлен $P'(t)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки α_i :

$$P'(d_i) = \frac{1}{2}P'(\alpha_i) + \frac{1}{6}P''(\xi_i)(\alpha_i - d_i), i = 1, 2.$$

Тогда, учитывая неравенство (22), получим:

$$|P(d_i)| \leq 2|P'(\alpha_i)| < 2Q^{\lambda_i}. \quad (24)$$

Запишем оценки (23) и (24) в виде следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} |b_3 d_1^3 + b_2 d_1^2 + b_1 d_1 + b_0| \leq 2Q^{\lambda_1} \mu_1 I_1, \\ |b_3 d_2^3 + b_2 d_2^2 + b_1 d_2 + b_0| \leq 2Q^{\lambda_2} \mu_1 I_2, \\ |3b_3 d_1^2 + 2b_2 d_1 + b_1| \leq 2Q^{\lambda_1}, \\ |3b_3 d_2^2 + 2b_2 d_2 + b_1| \leq 2Q^{\lambda_2}. \end{cases} \quad (25)$$

Несложно убедиться, что

$$Q^{\lambda_i} > 1 \text{ и } Q^{\lambda_i} \mu_1 I_i > 1, i = 1, 2,$$

так как $\lambda_i \geq 1 - v_1 - v_2 + \frac{1}{8}\varepsilon_2 > \frac{3}{4} + \frac{1}{8}\varepsilon_2$ и $\mu_1 I_i > Q^{-1+v_1+v_2}$.

Множество точек, удовлетворяющих неравенствам (25), представляет собой четырехмерный параллелепипед. Его положение фиксировано, а длины сторон стремятся к бесконечности с ростом Q . Это означает, что количество целых точек, лежащих внутри данного параллелепипеда с точностью до константы равно его объему [20]. Тогда

$$\#(b_3, b_2, b_1, b_0) \leq c_9(\varepsilon_2) Q^{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \mu_2 \Pi,$$

что означает, что количество многочленов $P \in \mathcal{P}_3(Q, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$, которые удовлетворяют системе (18) в некоторой точке $\mathbf{x} \in \Pi$, не превосходит $c_9(\varepsilon_2) Q^{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \mu_2 \Pi$.

Оценка сверху для меры множества $\mu_2 L_{3,3}^2$ приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}\mu_2 L_{3,3}^2 &\leq c_{10}(\mathbf{v}, \varepsilon_2) Q^{-2+v_1+v_2-\lambda_1-\lambda_2+\frac{1}{4}\varepsilon_2} \cdot Q^{2(\lambda_1+\lambda_2)} \mu_2 \Pi = \\ &= c_{10}(\mathbf{v}, \varepsilon_2) Q^{-2+v_1+v_2+\lambda_1+\lambda_2+\frac{1}{4}\varepsilon_2} \mu_2 \Pi,\end{aligned}$$

и, так как $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 2 - v_1 - v_2 - \frac{1}{2}\varepsilon_2$, получаем:

$$\mu_2 L_{3,3}^2 \leq c_{10}(\mathbf{v}, \varepsilon_2) Q^{-\frac{1}{4}\varepsilon_2} \mu_2 \Pi < \frac{1}{72} \mu_2 \Pi$$

при $Q > Q_0(n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$.

Используя полученные оценки для мер множеств $L_{3,3}^1$ и $L_{3,3}^2$, оценим меру множества $L_{3,3}$:

$$\mu_2 L_{3,3} \leq \mu_2 L_{3,3}^1 + \mu_2 L_{3,3}^2 \leq \frac{1}{36} \mu_2 \Pi.$$

Рассмотрим случай подинтервалов $\bar{T}_{1,2}$, $\bar{T}_{2,2}$. При $|P'(\alpha_i)| \in \bar{T}_{i,2}$, $i = 1, 2$ имеем систему неравенств

$$\begin{cases} |P(x_i)| < 2Q^{-w_i}, w_i > 0, \\ n^2 Q^{\frac{1}{2} - \frac{w_i}{2}} < |P'(\alpha_i)| < 2Q^{\frac{1+v_i}{2}} - \frac{(n-2)(w_i+v_i)}{2(n-1)}, \\ w_1 + w_2 = n - 1 - v_1 - v_2, i = 1, 2. \end{cases} \quad (26)$$

Из леммы 1 следует, что множества точек $L_{2,2}$ для которых существует многочлен $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v})$ такой, что неравенства (26) выполняются, содержится в объединении прямоугольников $\bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}): \\ \sigma(P) \cap \Pi \neq \emptyset}} \sigma(P)$, где

$$\sigma(P) = \{|x_i - \alpha_i| \leq 2^n Q^{-\frac{w_i+1}{2}}, i = 1, 2\}.$$

В данном случае индукционный переход становится невозможным в силу того, что мы не можем понизить степень многочленов. В связи с этим будем использовать другой метод для оценки меры множества $L_{2,2}$.

Покроем прямоугольник Π системой непересекающихся прямоугольников $\Pi_k = J_{1,k} \times J_{2,k}$, где $\mu_1 J_{i,k} = Q^{-\frac{w_i+1}{2} + \varepsilon_{4,i}}$, $i = 1, 2$ таких, что $\Pi \subset \bigcup_k \Pi_k$ и $\Pi_k \cap \Pi \neq \emptyset$. В таком случае количество прямоугольников Π_k оценим как

$$\#\Pi_k \leq \begin{cases} 4Q^{\frac{n+1-v_1-v_2}{2} - \varepsilon_{4,1} - \varepsilon_{4,2}} \mu_2 \Pi, s_1 < \frac{w_1+1}{2}, s_2 < \frac{w_2+1}{2}, \\ 4Q^{\frac{w_1+1}{2} - \varepsilon_{4,1}} \mu_1 I_1, s_1 < \frac{w_1+1}{2}, s_2 \geq \frac{w_2+1}{2}, \\ 4Q^{\frac{w_2+1}{2} - \varepsilon_{4,2}} \mu_1 I_2, s_1 \geq \frac{w_1+1}{2}, s_2 < \frac{w_2+1}{2}. \end{cases} \quad (27)$$

Будем говорить, что многочлен $P(x)$ принадлежит прямоугольнику Π_k , если найдется такая точка $\mathbf{x} \in \Pi_k$, что неравенства (26) выполняются для многочлена $P(t)$ в данной точке.

Рассмотрим прямоугольники Π_k , которым принадлежит не более одного многочлена $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v})$. В этом случае меру множества $L_{2,2}$ с помощью неравенств (27) можно оценить следующим образом:

$$\mu_2 L_{2,2} \leq \sum_{\Pi_k} \mu_2 \sigma(P) \leq 2^{2n+2} Q^{-\varepsilon_{4,1} - \varepsilon_{4,2}} \mu_2 \Pi < \frac{1}{72} \mu_2 \Pi$$

при $Q > Q_0(n, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$ и $s_1 < \frac{w_1+1}{2}, s_2 < \frac{w_2+1}{2}$. В случае, если $s_i \geq \frac{w_i+1}{2}$, то рассмотрим вместо прямоугольников $\sigma(P)$ прямоугольники $\sigma^*(P) = \sigma(P) \cap \Pi$ и получим ту же оценку.

Докажем теперь, что ни одному прямоугольнику Π_k не может принадлежать два и более неприводимых многочлена. Пусть найдутся два многочлена $P_1(t), P_2(t) \in \Pi_k$ и пусть для многочлена $P_j(t)$ неравенства (26) выполняются в точке $\mathbf{x}_j \in \Pi_k, j = 1, 2$. В таком случае при $Q > Q_0(n, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$ для любой точки $\mathbf{x} \in \Pi_k$ справедливы оценки:

$$|x_i - \alpha_i| \leq |x_i - x_{j,i}| + |x_{j,i} - \alpha_i| \leq 2Q^{-\frac{w_i+1}{2} + \varepsilon_{4,i}}, i = 1, 2. \quad (28)$$

Оценим величины $|P_j(x_1)|$ и $|P_j(x_2)|, \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Pi_k$. Разложим многочлен $P_j(x_i), i, j = 1, 2$ в ряд Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа на интервале $J_{i,k}$:

$$P_j(x_i) = P'_j(\alpha_i)(x - \alpha_i) + \frac{1}{2}P''_j(\xi_4)(x - \alpha_i)^2, \xi_4 \in (x_i, \alpha_i).$$

Из оценок (26) и (28) получим, что

$$|P_j(x_i)| \leq 2Q^{-w_i + \frac{w_i+v_i}{2(n-1)} + \varepsilon_{4,i}} + 4n^3Q^{-w_i + 2\varepsilon_{4,i}} \leq 2Q^{-w_i + \frac{w_i+v_i}{2(n-1)} + \varepsilon_{4,i}}, i = 1, 2,$$

при $\varepsilon_{4,i} < \frac{w_i+v_i}{2(n-1)}$ и $Q > Q_0(n, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s})$.

Воспользуемся леммой 3 при $\eta_i = \frac{w_i+1}{2} - \varepsilon_{4,i}$ и $\tau_i = w_i - \frac{w_i+v_i}{2(n-1)} - \varepsilon_{4,i}, i = 1, 2$. Тогда имеем

$$\tau_1 + \tau_2 + 2 = (n - 1 - v_1 - v_2) - \frac{1}{2} - 2\varepsilon_{4,2} + 2 = n + \frac{1}{2} - v_1 - v_2 - \varepsilon_{4,1} - \varepsilon_{4,2},$$

$$2(\tau_i + 1 - \eta_i) = 2(w_i - \frac{w_i+v_i}{2(n-1)} - \varepsilon_{4,i} + 1 - \frac{w_i+1}{2} + \varepsilon_{4,i}) = w_i + 1 - \frac{w_i+v_i}{n-1}.$$

Подставим данные выражения в (1) и получим:

$$n + \frac{1}{2} - \varepsilon_{4,1} - \varepsilon_{4,2} - v_1 - v_2 + n - 1 - v_2 - v_2 + 2 - 1 = 2n - 2(v_1 + v_2) + \frac{1}{2} - \varepsilon_{4,1} - \varepsilon_{4,2} > 2n + \delta$$

при $v_1 + v_2 < \frac{1}{4}, \varepsilon_{4,i} = \frac{w_i+v_i}{n-1} \cdot \frac{1-2(v_1+v_2)}{3}$ и $\delta = \frac{1-2(v_1+v_2)}{3}$.

Получили противоречие.

Остальные случаи являются простым двумерным аналогом соответствующих случаев в [16].

Подводя итог получаем, что $L \subset \bigcup_{1 \leq i, j \leq 3} L_{i,j}$ и тогда

$$\mu_2 L \leq \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \mu_2 L_{i,j} \leq 9 \cdot \frac{1}{36} \mu_2 \Pi = \frac{1}{4} \mu_2 \Pi,$$

что завершает доказательство леммы. $\square$

4. Доказательство теоремы 1

В ходе доказательства будем полагать, что $\Pi \subset [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$ и

$$Q > Q_0(n, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{s}).$$

Данное ограничение упростит наши вычисления без нарушения общности, так как для любого прямоугольника $[d_1 - \frac{1}{2}; d_1 + \frac{1}{2}] \times [d_2 - \frac{1}{2}; d_2 + \frac{1}{2}]$ мы можем ввести замену переменных

$y_i = x_i - d_i$, $i = 1, 2$, такую, что $(y_1, y_2) \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^2$. При этом коэффициенты новых многочленов возрастут в не более, чем $c(n, \mathbf{d})$ раз.

Оценка снизу. Доказательство проведем с использованием результатов леммы 5. Рассмотрим множество $B_1 = \Pi \setminus L_n(Q, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \Pi)$, $n \geq 3$ при $w_i = \frac{n-1-v_1-v_2}{2}$, $i = 1, 2$. Из леммы 5 следует, что

$$\mu_2 B_1 \geq \frac{3}{4} \mu_2 \Pi \quad (29)$$

при $Q > Q_0(n, \varepsilon_2, \varepsilon_1, \mathbf{v}, \mathbf{s})$.

Используя принцип Дирихле несложно убедиться, что для любой точки $\mathbf{x} \in \Pi$ найдется многочлен $P \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v})$ такой, что первые два неравенства системы (9) будут выполняться. Тогда для любой точки $\mathbf{x}_1 \in B_1$ существует многочлен $P_1(t) \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v})$, удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} |P_1(x_{1,i})| < Q^{-\frac{n-1-v_1-v_2}{2}}, \\ |P'_1(x_{1,i})| > Q^{1-v_i-\frac{1}{2}\varepsilon_2}, i = 1, 2. \end{cases}$$

Рассмотрим корни α_1, α_2 многочлена $P_1(t)$, такие, что $x_{1,i} \in S(\alpha_i)$. По лемме 1 имеем

$$|x_{1,i} - \alpha_i| \leq nQ^{-\frac{n+1-(v_1+v_2)}{2}+v_i+\frac{1}{2}\varepsilon_2}, i = 1, 2. \quad (30)$$

Докажем, что корни $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Предположим обратное. Пусть $\alpha_i \in \mathbb{C}$, тогда комплексно сопряженное с ним число $\overline{\alpha_i} \in \mathbb{C}$ также является корнем многочлена $P_1(t)$ и $x_{1,i} \in S(\overline{\alpha_i})$. В таком случае из оценок (30) следует, что

$$|\overline{\alpha_i} - \alpha_i| \leq 2nQ^{-\frac{n+1-(v_1+v_2)}{2}+v_i+\frac{1}{2}\varepsilon_2}$$

и, так как корни многочлена $P_1(t)$ ограничены, то

$$|P'(\alpha_i)| \leq |a_n| |\overline{\alpha_i} - \alpha_i| \leq 2nQ^{-\frac{n+1-(v_1+v_2)}{2}+v_i+\frac{1}{2}\varepsilon_2}.$$

С другой стороны, при разложении многочлена $P_1(t)$ по формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности точки $x_{1,i}$ получаем:

$$|P'(\alpha_i)| \geq \frac{1}{2} Q^{1-v_i}.$$

Данные неравенства противоречивы при $v_1 + v_2 < \frac{1}{4}$ и $Q > Q_0(n, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \mathbf{v}, \mathbf{s})$.

Выберем максимальную систему алгебраических точек $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_t)$, удовлетворяющих условиям: $H(\gamma_k) \leq Q$, $\deg(\gamma_k) \leq n$ и прямоугольники

$$\sigma(\gamma_k) = \{|x_i - \gamma_{k,i}| < n\delta_0^{-1} Q^{-\frac{n+1-(v_1+v_2)}{2}+v_i}, i = 1, 2\}$$

не пересекаются.

Рассмотрим расширенные прямоугольники

$$\sigma_1(\gamma_k) = \{|x_i - \gamma_{k,i}| < 2nQ^{-\frac{n+1-(v_1+v_2)}{2}+v_i+\frac{1}{2}\varepsilon_2}, i = 1, 2\}, k = \overline{1, t} \quad (31)$$

и покажем, что

$$B_1 \subset \bigcup_{k=1}^t \{\sigma_1(\gamma_k)\}. \quad (32)$$

Для этого докажем, что для любой точки $\mathbf{x}_1 \in B_1$ найдется такая точка $\gamma_k \in \Gamma$ такая, что $\mathbf{x}_1 \in \sigma_1(\gamma_k)$. Так как $\mathbf{x}_1 \in B_1$, то найдется точка γ , для которой справедливы неравенства (30). В таком случае либо $\gamma \in \Gamma$ и $\mathbf{x}_1 \in \sigma_1(\gamma)$, либо существует $\gamma_k \in \Gamma$ такая, что

$$|\gamma_i - \overline{\gamma_{k,i}}| \leq 4nQ^{-\frac{n+1-(v_1+v_2)}{2}+v_i+\frac{1}{2}\varepsilon_2}, i = 1, 2,$$

откуда следует, что $\mathbf{x}_1 \in \sigma_1(\gamma_k)$.

В таком случае, из (29), (31) и (32) имеем:

$$\frac{3}{4}\mu_2\Pi \leq \mu_2 B_1 \leq \sum_{k=1}^t \mu_2 \sigma_1(\gamma_k) \leq t \cdot 2^6 n^2 Q^{-n-1+2(v_1+v_2)+\varepsilon_2},$$

откуда получаем оценку

$$t = \#\mathbb{A}_n^2(Q, \mathbf{v}, \Pi) \geq 2^6 n^2 Q^{n+1-2(v_1+v_2)-\varepsilon_2} \mu_2 \Pi.$$

Оценка сверху. Предположим, что $\#\mathbb{A}_n^2(Q, \mathbf{v}, \Pi) > 3^n 2^{17} Q^{n+1-2(v_1+v_2)}$. Рассмотрим алгебраическую точку $\alpha \in \#\mathbb{A}_n^2(Q, \mathbf{v}, \Pi)$. Пусть $P(t)$ ее минимальный многочлен. Оценим значение многочлена $P(t)$ и его производной $P'(t)$ в точке $\mathbf{d}$. Для этого разложим многочлен $P(t)$ по формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа на интервале I_i , $i = 1, 2$:

$$P(d_i) = P'(\alpha_i)(d_i - \alpha_i) + \frac{1}{2}P''(\xi_5)(d_i - \alpha_i)^2.$$

Тогда

$$|P(d_i)| \leq Q^{1-v_i} \mu_1 I_i + n^2 Q \mu_1 I_i^2 \leq 2Q^{1-v_i} \mu_1 I_i, \quad (33)$$

при $s_i > v_1 + v_2$.

Аналогично разложим многочлен $P'(t)$ по формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа на интервале I_i , $i = 1, 2$:

$$P'(d_i) = P'(\alpha_i) + \frac{1}{2}P''(\xi_5)(d_i - \alpha_i),$$

и получим:

$$|P'(d_i)| \leq Q^{1-v_i} + n^2 Q \mu_1 I_i \leq 2Q^{1-v_i}, \quad (34)$$

при $s_i > v_1 + v_2$.

Зафиксируем вектор $\mathbf{b}_3 = (a_n, \dots, a_4)$, где $a_n, \dots, a_4$ — коэффициенты многочленов $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v})$. Рассмотрим класс многочленов с одним и тем же вектором коэффициентов: $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, \mathbf{b}_3)$. Количество таких классов можно оценить, как

$$\#\{\mathbf{b}_3\} \leq 3^n Q^{n-3}.$$

Исходя из нашего предположения и данной оценки, используя принцип Дирихле, можно сказать, что найдется вектор $\mathbf{b}_{3,0}$ такой, что

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, \mathbf{b}_{3,0}) \geq 2^{17} Q^{4-2(v_1+v_2)}. \quad (35)$$

Оценим величину $\#\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, \mathbf{b}_{3,0})$ сверху. Для этого возьмем многочлен

$$P_0 \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, \mathbf{b}_{3,0})$$

и рассмотрим разность многочленов P_0 и $P_j \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, \mathbf{b}_{3,0})$ в точках d_i , $i = 1, 2$. Из оценок (33) и (34) следует:

$$\begin{aligned} |P_0(d_i) - P_j(d_i)| &= |(a_{0,3} - a_{j,3})d_i^3 + (a_{0,2} - a_{j,2})d_i^2 + (a_{0,1} - a_{j,1})d_i + (a_{0,0} - a_{j,0})| \leq \\ &\leq 4Q^{1-v_i} \mu_1 I_i, \end{aligned}$$

$$|P'_0(d_i) - P'_j(d_i)| = |3(a_{0,3} - a_{j,3})d_i^2 + 2(a_{0,2} - a_{j,2})d_i + (a_{0,1} - a_{j,1})| \leq 4Q^{1-v_i}.$$

Рассмотрим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} |(a_{0,3} - a_{j,3})d_1^3 + (a_{0,2} - a_{j,2})d_1^2 + (a_{0,1} - a_{j,1})d_1 + (a_{0,0} - a_{j,0})| \leq 4Q^{1-v_1}\mu_1 I_1, \\ |(a_{0,3} - a_{j,3})d_2^3 + (a_{0,2} - a_{j,2})d_2^2 + (a_{0,1} - a_{j,1})d_2 + (a_{0,0} - a_{j,0})| \leq 4Q^{1-v_2}\mu_1 I_2, \\ |3(a_{0,3} - a_{j,3})d_1^2 + 2(a_{0,2} - a_{j,2})d_1 + (a_{0,1} - a_{j,1})| \leq 4Q^{1-v_1}, \\ |3(a_{0,3} - a_{j,3})d_2^2 + 2(a_{0,2} - a_{j,2})d_2 + (a_{0,1} - a_{j,1})| \leq 4Q^{1-v_2}. \end{cases}$$

Так как $Q^{1-v_i}\mu_1 I_i > 1$, $i = 1, 2$, то из рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве леммы 5, получаем:

$$j \leq 2^{16}Q^{4-2(v_1+v_2)}\mu_2\Pi.$$

Следовательно, $\#\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{v}, \mathbf{b}_{2,0}) \leq 2^{16}Q^{4-2(v_1+v_2)}$ что противоречит неравенству (35). Это означает, что

$$\#\mathbb{A}_n^2(Q, \mathbf{v}, \Pi) \leq 3^n 2^{17}Q^{n+1-2(v_1+v_2)}\mu_2\Pi.$$

5. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, поэтому остановимся лишь на некоторых особенностях.

Оценка снизу. В данном случае будем использовать результаты леммы 4. Так же как и при доказательстве теоремы 1 рассмотрим множество

$$B_1 = \Pi \setminus L_2(Q, \mathbf{w}, \mathbf{v}, \Pi)$$

при $w_i = \frac{1-v_1-v_2}{2}$, $i = 1, 2$ и $\delta_0 < 2^{-22}\varepsilon_1^4$. Из леммы 4 следует, что $\mu_2 B_1 \geq \frac{3}{4}\mu_2\Pi$ при $Q > Q_0(n, \varepsilon_1, \mathbf{v}, \mathbf{s})$, а с помощью принципа Дирихле несложно убедиться, что для любой точки $\mathbf{x} \in \Pi$ найдется многочлен $P \in \mathcal{P}_2(Q, \mathbf{v})$ такой, что первые два неравенства системы 2 будут выполняться. Тогда для любой точки $\mathbf{x}_1 \in B_1$ существует многочлен $P_1(t) \in \mathcal{P}_2(Q, \mathbf{v})$, удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} |P_1(x_{1,i})| < Q^{-\frac{1-v_1-v_2}{2}}, \\ |P'_1(x_{1,i})| > \delta_0 Q^{1-v_1-v_2}, i = 1, 2. \end{cases}$$

Дальнейшая схема доказательства совпадает со схемой доказательства теоремы 1.

Оценка сверху. Предположим, что $\#\mathbb{A}_2^2(Q, \mathbf{v}, \Pi) > 2^{13}Q^{3-2(v_1+v_2)}$, рассмотрим алгебраическую точку $\alpha \in \#\mathbb{A}_2^2(Q, \mathbf{v}, \Pi)$ и оценим значения ее минимального многочлена $P(t)$ и его производной $P'(t)$ в точке $\mathbf{d}$. Получим оценки:

$$|P(d_i)| \leq 2Q^{1-v_1-v_2}\mu_1 I_i, \quad (36)$$

$$|P'(d_i)| \leq 2Q^{1-v_1-v_2}, \quad (37)$$

при $s_i > v_1 + v_2$.

На основе оценок (36) и (37) запишем систему неравенств:

$$\begin{cases} |a_2 d_1^2 + a_1 d_1 + a_0| \leq 4Q^{1-v_1-v_2}\mu_1 I_1, \\ |a_2 d_2^2 + a_1 d_2 + a_0| \leq 4Q^{1-v_2-v_2}\mu_1 I_2, \\ |2a_2 d_1 + a_1| \leq 4Q^{1-v_1-v_2}. \end{cases}$$

Так как $Q^{1-v_1-v_2}\mu_1 I_i > 1$, $i = 1, 2$, то из рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве леммы 5 получаем:

$$\#(a_2, a_1, a_0) = \#\mathbb{A}_2^2(Q, \mathbf{v}, \Pi) \leq 2^{12}Q^{3-3(v_1+v_2)},$$

что противоречит неравенству (35). Это означает, что

$$\#\mathbb{A}_2^2(Q, \mathbf{v}, \Pi) \leq 2^{13}Q^{3-3(v_1+v_2)}\mu_2\Pi.$$

6. Заключение

Теоремы 1 и 2 могут быть использованы для получения оценок сверху и снизу для количества точек множества $\mathbb{A}_n(Q, \mathbf{v})$ около гладких кривых, что является естественным обобщением проблем, связанных с распределением рациональных точек около гладких кривых [21, 22].

Благодарность. Автор выражает свою признательность В. И. Бернику за постановку задачи и ценные консультации.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I, II // J. reine und angew. Math. 1932. Vol. 166. P. 118–136, 137–150.
2. Koksma J.F. Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen // Mh. Math. Physik. 1939. Vol. 48. P. 176–189.
3. Schmidt W. T-numbers do exist // Symposia Mathematica (INDAM, Rome, 1968/1969). 1970. Vol. IV. P. 3–26.
4. Bugeaud Y. Mahler's classification of numbers compared with Kosma's // Acta Arith. 2003. Vol. 110, №1. P. 89–105.
5. Спринджук В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск: Наука и техника, 1967. 184 с.
6. Mahler K. An inequality for the discriminant of a polynomial // Michigan Math. J. 1964. Vol. 11. P. 257–262.
7. Everst J.-H. Distance between the conjugates of an algebraic number // Publ. Math. Debrecen. 2004. Vol. 65, №3-4. P. 323–340.
8. Beresnevich V., Bernik V., Götze F. The distribution of close conjugate algebraic numbers // Compos. Math. 2010. Vol. 146, №5. P. 1165–1179.
9. Бударина Н. В., Гётце Ф. Расстояние между сопряженными алгебраическими числами в кластерах // Матем. заметки. 2013. Т. 94, №5. С. 780–783.
10. Bugeaud Y., Mignotte M. Polynomials root separation // Int. J. Number Theory. 2010. Vol. 6, №3. P. 587–602.
11. Bugeaud Y., Mignotte M. On the distance between roots of integer polynomials // Proc. Edinb. Math. Soc. 2004. Vol. 47, №3. P. 553–556.

12. Schmidt W. M. Diophantine approximation // Lecture Notes in Math., 785, Springer, Berlin, 1980. x+299 p.
13. Bugeaud Y. Approximation by algebraic integers and Hausdorff dimension // J. London Math. Soc. 2002. Vol. 65, №2. P. 547–559.
14. Берник В.И., Гётце Ф. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах // Известия РАН. Серия математическая. 2015. Т. 79, №1. С. 21–42.
15. Bernik V., Götze F., Kukso O. On algebraic points in the plane near smooth curves // Lithuanian Math. Journal. 2014. Vol. 54, №3. P. 231–251.
16. Гусакова А. Г., Берник В. И. Количество алгебраических чисел с малой производной их минимального многочлена в корне на коротких интервалах // Труды института математики. 2014. Т. 226 №2. С. 18–31.
17. Берник В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений // Acta Arithm. 1983. Vol. 42, №3. P. 219–253.
18. Берник В. И., Домбровский И.Р. Эффективные оценки меры множеств, определяемых диофантовыми условиями // Труды МИАН. 1994. Т. 207. С. 35–41.
19. Берник В. И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Acta Arith. 1989. Vol. 53, №1. P. 17–28.
20. Davenport H. On a principle of Lipschitz // J. London Math. Soc. 1951. Vol. 26. P. 179–183.
21. Huxley M. N. Area, lattice points, and exponential sums // London Mathematical Society Monographs, New Series. 1996. Vol. 13, Oxford University Press. New York.
22. Bugeaud Y. Approximation by algebraic numbers // Cambridge Tracts in Mathematics. 2004. Vol. 160. Cambridge University Press. Cambridge. 274 p.

REFERENCES

1. Beresnevich V., Bernik V. & Götze F. 2010, „The distribution of close conjugate algebraic numbers“, *Compos. Math.*, vol. 146, no. 5, pp. 1165–1179.
2. Bernik V. I. 1983, „Bernik V.I. 1983, „Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations“, *Acta Arith.*, vol. 42, no. 3, pp. 219–253.“, *Acta Arith.*, vol. 42, no. 3, pp. 219–253 (Russian).
3. Bernik V. I. 1989, „The exact order of approximating zero by values of integral polynomials“, *Acta Arith.*, vol. 53, no. 1, pp. 17–28 (Russian).
4. Bernik V. I. & Dombrovskii I.R. 1994, „Effective estimates for the measure of sets defined by Diophantine conditions“, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, vol. 207, pp. 35–41 (Russian); translation in *Proc. Steklov Inst. Math.* 1995, vol. 207, no. 6, pp. 35–40.
5. Bernik V., Götze F. & Kukso O. 2014, „On algebraic points in the plane near smooth curves“, *Lithuanian Math. Journal*, vol. 54, no. 3, pp. 231–251.
6. Bernik V. & Götze F. 2015, „Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals“, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, vol. 79, no 1, pp. 21–42 (Russian); translation in *Izv. Math.*, 2015, vol. 79, no. 1, pp. 18–39.

7. Budarina N. V. & Götze F. 2013, "Distance between conjugate algebraic numbers in clusters", *Translation of Mat. Zametki*, vol. 94, no. 5-6, pp. 816–819.
8. Bugeaud Y. 2002, "Approximation by algebraic integers and Hausdorff dimension", *J. London Math. Soc.*, vol. 65, no. 2, pp. 547–559.
9. Bugeaud Y. 2003, "Mahler's classification of numbers compared with Kosma's", *Acta Arith.*, vol. 110, no. 1, pp. 89–105.
10. Bugeaud Y. 2004, "Approximation by algebraic numbers", Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 160. Cambridge University Press. Cambridge. 274 p.
11. Bugeaud Y. & Mignotte M. 2004, "On the distance between roots of integer polynomials", *Proc. Edinb. Math. Soc.*, vol. 47, no. 3, pp. 553–556.
12. Bugeaud Y. & Mignotte M. 2010, "Polynomials root separation", *Int. J. Number Theory*, vol. 6, no. 3, pp. 587–602.
13. Davenport H. 1951, "On a principle of Lipschitz", *J. London Math. Soc.*, vol. 26, pp. 179–183.
14. Everst J.-H. 2004, "Distance between the conjugates of an algebraic number", *Publ. Math. Debrecen*, vol. 65, no. 3-4, pp. 323–340.
15. Gusakova A. G. & Bernik V. I. 2014, "The quantity of algebraic numbers with small derivative of the minimal polynomial in a short intervals", *Trudy Inst. Matematiki*, vol. 22, no. 2, pp. 18–31.
16. Huxley M. N. 1996, "Area, lattice points, and exponential sums", London Mathematical Society Monographs, New Series, vol. 13, Oxford University Press, New York.
17. Koksma J. F. 1939, "Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen", *Mh. Math. Physik.*, vol. 48, pp. 176–189.
18. Mahler K. 1932, "Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I, II", *J. reine und angew. Math.*, vol. 166, pp. 118–136, 137–150.
19. Mahler K. 1964, "An inequality for the discriminant of a polynomial", *Michigan Math. J.*, vol. 11, pp. 257–262.
20. Schmidt W. 1970, "T-numbers do exist", *Symposia Mathematica, IV (INDAM, Rome, 1968/1969)*, pp. 3–26.
21. Schmidt W. M. 1980, "Diophantine approximation", *Lecture Notes in Math.*, 785, Springer, Berlin, x+299 p.
22. Sprindzhuk V. G. 1967, "Problema Malera v metricheskoy toerii chisel" (Russian) [Mahler's problem in metric number theory], *Minsk: Nauka i tehnika*, 184 pp.

Институт математики НАН Беларуси.

Получено 20.12.2015 г.

Принято в печать 11.03.2016 г.