# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 2

УДК 511.9

 $DOI\ 10.22405/2226\text{--}8383\text{--}2018\text{--}19\text{--}2\text{--}406\text{--}419$ 

### Аналог теоремы А. Ордина для параллелоэдров

Гришухин Вячеслав Петрович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Центральный экономико-математический институт РАН. e-mail: vqrishukhin@mail.ru

#### Аннотация

Параллелоэдр - это выпуклый многогранник в аффинном пространстве, сдвиги которого на векторы некоторой дискретной решетки L заполняют все пространство без зазоров и пересечений по внутренним точкам. Частным случаем параллелоэдра является ячейка Дирихле-Вороного решетки относительно метрики, порожденной положительной квадратичной формой. Более 100 лет назад  $\Gamma$ . Вороной предположил, что всякий параллелоэдр есть ячейка Дирихле-Вороного своей решетки относительно некоторой метрики.

А. Ордин ввел понятия неприводимой грани и k-неприводимого параллелоэдра, у которого все грани коразмерности k неприводимы. Разбиение на параллелоэдры называется k-неприводимым, если его параллелоэдры k-неприводимы. Он доказал гипотезу Вороного для 4-неприводимого параллелоэдров.

С каждой фасетой F параллелодра связано два вектора: фасетный вектор  $l_F$  решетки L разбиения  $\mathcal{T}$  на параллелоздры и нормальный вектор  $p_F$  фасеты F. Фасетные векторы целочисленно порождают решетку L. Одна из форм знаменитой гипотезы Вороного утверждает, что существуют такие параметры s(F), что нормированные (канонические) нормальные векторы  $s(F)p_F$  целочисленно порождают решетку  $\Lambda$ . В этой статье определяются однозначно нормируемые грани G как грани, определяющие однозначно с точностью до общего множителя параметры s(F) всех фасет разбиения  $\mathcal{T}$ , содержащих грань G. Разбиение, все грани которого коразмерности k однозначно нормируемы, k-неприводимо.

Доказывается следующий аналог теоремы А. Ордина: каноническая нормировка фасет разбиения  $\mathcal{T}$  существует, если для некоторого целого  $k \geqslant 1$  все его грани коразмерностей k и k+1 однозначно нормируемы. Случаи k=2 и k=3 соответствуют 2- и 3-неприводимым разбиениям, в смысле А. Ордина.

Kлючевые слова: параллелоэдр, гипотеза Вороного, однозначно нормированные нормальные векторы.

Библиография: 14 названий.

#### Для цитирования:

В. П. Гришухин. Аналог теоремы А. Ордина для параллелоэдров // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 406–419.

# CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 2

UDC 511.9

 $DOI\ 10.22405/2226\text{--}8383\text{--}2018\text{--}19\text{--}2\text{--}406\text{--}419$ 

### An analog of Ordin's theorem for parallelotopes

Grishukhin Vyacheslav Petrovich — Doctor of physico-mathematical sciences, leading researcher, Central economic and mathematical Institute of RAS.

e-mail: vqrishukhin@mail.ru

#### Abstract

Parallelotope is a convex polytope in an affine space such that its shifts by vectors of a lattice L fill the space without gaps and intersections by inner points. A special case of a parallelotope is a Dirichlet-Voronoi cell of a lattice with respect to a metric generated by a positive quadratic form. More than 100 years ago G.Voronoi supposed that each parallelotope is a Dirichlet-Voronoi cell of its lattice with respect some metric.

A. Ordin introduced notions of an irreducible face and a k-irreducible parallelotope whose all faces of codimension K are irreducible. A parallelotope tiling is called k-irreducible if its parallelotopes are k-irreducible. Ordin proved the conjecture of Voronoi for 3-irreducible parallelotopes.

There are two vectors related to a facet F of a parallelotope. Namely, facet vector  $l_F$  of the lattice L of the tiling  $\mathcal{T}$  and normal vector  $p_F$  of the facet F. The facet vectors integrally generate the lattice L. One of the form of Voronoi conjecture asserts that there are such parameters s(F) that scaled (canonical) normal vectors  $s(F)p_F$  integrally generate a lattice  $\Lambda$ . In this paper, uniquely scaled faces are defined. Such a face G determines uniquely up to a multiple parameters s(F) of facets of the tiling  $\mathcal{T}$  containing the face G. A tiling whose faces of codimension k are uniquely scaled is k-irreducible.

It is proved here the following analog of Ordin's Theorem: There exists a canonical scaling of normal vectors of facets of the tiling  $\mathcal{T}$  if, for some integer  $k \geqslant 1$ , all its faces of codimension k and k+1 are uniquely scaled. The cases k=2 and k=3 correspond to 2- and 3-irreducible tilings of Ordin.

Keywords: parallelotope, Voronoi conjecture, uniquely scaled normal vectors.

Bibliography: 14 titles.

#### For citation:

V. P. Grishukhin. 2018, "An analog of Ordin's theorem for parallelotopes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2. P. 406–419.

### 1. Введение

Параллелоэдр - это выпуклый многогранник в аффинном пространстве, сдвиги которого на векторы некоторой дискретной решетки L правильно заполняют все пространство. Например, таким является параллелограмм на плоскости или центрально симметричный шестиугольник. Этими двумя фигурами исчерпывается список двумерных параллелоэдров. В трехмерном случае имеется уже 5 типов параллелоэдров.

Всякий параллелоэдр есть центрально симметричный многогранник с центрально симметричными фасетами, проекция которого вдоль любой его грани коразмерности 2 есть двухмерный параллелоэдр, т.е. либо параллелограмм, либо центрально симметричный шестиугольник. Венков показал в [1], что всякий многогранник с этими тремя свойствами есть параллелоэдр.

Есть два важных типа выделенных граней разбиения на паралелоэдры: примитивные и контактные.

Грань коразмерности k npumumuвна, если в ней сходится минимально возможное число k+1 параллелоэдров разбиения. Параллелоэдр и его разбиение называются npumumuвными, если все их грани примитивны.

Грань G называется контактной, если G есть пересечение двух параллелоэдров, т.е.  $F = P \cap P'$ . Иными словами, если два параллелоэдра разбиения имеют общую точку, то они контактируют по контактной грани. Фасета является частным случаем контактной грани. Впервые внимание на контактные грани обратил Н.П.Долбилин, который назвал их стан-дартными, см. [2]. Название контактная грань предложил Р.Эрдал.

Центр контактной грани G есть половина вектора  $l_G$  решетки L. Контактный вектор  $l_G \in L$  соединяет центры параллелоэдров, контактных по грани G. Если G есть фасета F, то контактный вектор  $l_F$  называется фасетным.

Как всякий многогранник, d-мерный параллелоэдр P с центром в начале  $0 \in L$  описывается линейными неравенствами следующим образом:

$$P(a) = \{ x \in \mathbb{R}^d : \langle p, x \rangle \leqslant \frac{1}{2} a(p) \text{ для всех } p \in \mathcal{P} \},$$
 (1)

где  $\langle p, x \rangle$  есть скалярное произведение векторов  $p, x \in \mathbb{R}^d$ , а правая часть a(p) есть некоторая функция на симметричном множестве  $\mathcal{P}$  нормальных векторов всех фасет параллелоэдра P. Симметричность множества  $\mathcal{P}$  означает, что если  $p \in \mathcal{P}$ , то и  $-p \in \mathcal{P}$ .

Так как проекция паралелоэдра вдоль любой его грани коразмерности 2 есть параллелограмм или шестиугольник, то его фасеты образуют пояски, содержащие 4 или 6 фасет, соответственно. Три (с точностью до знака) нормальных вектора фасет 6-пояска лежат в двумерной плоскости, ортогональной примитивным граням коразмерности 2, порождающим этот 6-поясок. Так как эти три нормальных вектора линейно зависимы, то можно выбрать их знаки и длины так, чтобы их сумма была равна нулю. В случае, если такой выбор длин возможен для всех 6-поясков одновременно, то, согласно Вороному (см. [3]), нормальные векторы и их длины называются каноническими.

В своем знаменитом мемуаре [3] Вороной доказал, что примитивные параллелоэдры имеют каноническую нормировку. Там же он выдвинул гипотезу, что любой параллелоэдр имеет каноническую нормировку нормальных векторов.

Если нормальные векторы фасет параллелоэдра в описании (1) имеют канонические длины, то, как показано в [4] (см.также [5]), каноническое множество  $\mathcal P$  порождает d-мерную решетку  $\Lambda$ . В этом случае существует изоморфизм A между решетками  $\Lambda$  и L такой, что  $L = A\Lambda$  и  $A\mathcal P$  есть множество фасетных векторов параллелоэдра P, где A есть положительно определенная симметричная матрица. Напомню, что  $\frac{1}{2}l_F$  есть центр фасеты F. Если p есть нормальный вектор фасеты F, то  $a(p) = \langle p, l_F \rangle$ . Если p есть канонический нормальный век-

тор, то  $l_F = Ap$  и тогда правая часть  $a(p) = \langle p, Ap \rangle$  есть положительная квадратичная форма, определенная на решетке  $\Lambda$ .

Утверждение, что всякий параллелоэдр имеет линейное описание (1), где a(p) есть положительная квадраичная форма и множество  $\mathcal{P}$  целочисленно порождает решетку  $\Lambda$ , является одной из форм знаменитой гипотезы Вороного. Поэтому я называю такой параллелоэдр na-раллелоэдром Вороного. Таким образом, если параллелоэдр имеет канонические нормальные векторы, то он  $ecm_b$  параллелоэдр Вороного. Нетрудно проверить, что параллелоэдр Вороного P есть ячейка Дирихле-Вороного решетки L относительно метрики, определяемой квадратичной формы  $a^*(l) = \langle l, A^{-1}l \rangle$ .

А.Ордин в [6] ввел полезное понятие k-иеприводимого разбиения на параллелоэдры. Пусть G есть грань этого разбиения коразмерности k. Множество  $\mathcal{F}^k$  нормальных векторов фасет, содержащих грань G, порождает линейное k-мерное пространство  $H^k(G)$ , ортогональное аффинному пространству, натянутому на грань G. А.Ордин называет грань G приводимой, если множество  $\mathcal{F}^k$  можно разбить на две непересекающиеся части так, что пространство  $H^k(G)$  разложимо в прямую сумму ненулевых подпространств, каждое из которых порождено соответствующей частью нормальных векторов. В противном случае, грань G называется иеприводимой. Разбиение называется k-иеприводимым, если любая его грань коразмерности k неприводима.

Например, контактные грани коразмерности 2 приводимы. Поэтому 2-неприводимое разбиение не имеет контактных граней коразмерности 2. Для таких разбиений Житомирский доказал в [7] гипотезу Вороного. Сам Ордин доказал гипотезу Вороного для 3-неприводимых разбиений. Именно это утверждение обычно называется *Теоремой Ордина*.

Пусть параллелоэдр P описывается неравенствами (1). Если множество нормальных векторов  $\mathcal{P}$  приводимо к каноническому виду, то для каждой фасеты F с нормальным вектором  $p_F \in \mathcal{P}$  существуют нормировка s(F) такая, что вектор  $s(F)p_F$  является каноническим нормальным вектором этой фасеты.

Пусть G есть грань разбиения и  $\mathcal{F}(G)$  есть множество фасет разбиения, содержащих эту грань. Если грань G примитивна и коразмерности 2, то, по определению нормировки, справедливо равенство

$$\sum_{F \in \mathcal{F}(G)} s(F)p_F = 0. \tag{2}$$

Это равенство определяет нормировку s(F) однозначно с точностью до общего множителя. Иными словами, для заданного множества  $\mathcal{P}$  грань G определяет однозначно отношение s(F)/s(F') для любых фасет  $F, F' \in \mathcal{F}(G)$ .

Множество  $\mathcal{F}(G)$  контактной грани G коразмерности 2 состоит из двух пар параллельных фасет. Будем считать, что нормальные векторы параллельных фасет противоположны и равны по длине, а их нормировки одинаковы. Тогда равенство (2) выполняется и для контактной грани G. Но отношение s(F)/s(F') для не параллельных фасет грань G не определяет однозначно.

Оказывается, что существуют и другие грани G, например, примитивные, которые однозначно определяют отношения s(F)/s(F') для любых пар фасет  $F, F' \in \mathcal{F}(G)$ .

**Определение**. Грань G называется однозначно нормируемой, или, ради краткости, он-гранью, если она однозначно определяет отношения s(F)/s(F') для любых пар фасет  $F, F' \in \mathcal{F}(G)$ .

Разбиение на параллелодры называется k-однозначно нормируемым, если все его грани коразмерности k однозначно нормируемы.

В этой статье доказывается следующая теорема

ТЕОРЕМА 1. Пусть разбиение  $\mathcal{T}$  на d-мерные параллелоэдры k- u (k+1)-однозначно нормируемо, для некоторого k такого, что  $1 \le k \le d-1$ . Тогда его фасеты имеют каноническую нормировку.

Ниже, в частности, будет показано, что примитивные грани однозначно нормируемы. Отсюда следует, что примитивное разбиение k-однозначно нормируемо для всех k. Поэтому из теоремы 1 вытекает результат Вороного. Оба значения k=1 и k=2 определяют в этой теореме 2-неприводимое разбиение, т.е. случай Житомирского. Легко понять, что 3-неприводимое разбиение 3-однозначно нормируемо. Ниже будет показано, что 3-неприводимое разбиение также и 4-однозначно нормируемо. Доказательство этого факта основано на теореме А.Ордина, доказанной в диссертации [6].

Эта статья написана под большим впечатлением и влиянием этой диссертации.

### 2. Доказательство теоремы 1

Итак, чтобы доказать гипотезу Вороного, нужно найти канонические нормировки s(F) нормальных векторов  $p_F$  всех фасет F.

В последнее время для этого используется теорема Рышкова-Рыбникова [8] о переносе свойства на ячейках некоторого связного комплекса многогранников (см. [6], [8], [9]). Рассматриваются последовательности ячеек, в которых соседние ячейки смежны по фасетам. Пусть фиксированной ячейке T приписано свойство s(T), а для каждой пары смежных по фасете ячеек  $T_1$  и  $T_2$  задана функция переноса  $g(T_1, T_2)$ . Тогда, начиная с ячейки  $T = T_0$  можно перенести свойство s(T) на произвольную ячейку  $T_k$  по пути смежных ячеек  $T_0, T_1, ..., T_k$ , используя функцию переноса, следующим образом

$$s(T_k) = \prod_{i=1}^k g(T_{i-1}, T_i) s(T_0).$$

Такое перенесение свойства не будет зависеть от пути, если для любого цикла  $\mathcal{C} = \{T_1, ..., T_k, T_1\}$  функция переноса g daem 1, т.е. выполнено условие

$$\prod_{i=1}^k g(T_i, T_{i+1}) = 1, \text{ где } k+1 \equiv 1.$$

Рышков и Рыбников доказывают следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Функция переноса дает 1 для любого цикла тогда и только тогда, когда она дает 1 для циклов ячеек, имеющих общую грань коразмерности 2.

В случае разбиения  $\mathcal{T}$  на параллелоэдры рассматривается комплекс всех фасет всех параллелоэдров разбиения. Грани коразмерности 2 этого комплекса суть грани коразмерности 3 разбиения  $\mathcal{T}$ . Свойство, приписываемое фасете F есть нормировка s(F). Нетрудно видеть, что в этом случае справедливо равенство g(F,F')=s(F')/s(F), если фасеты F и F' смежны по грани коразмерности 2 и определены нормировки s(F') и s(F). Если отношение s(F')/s(F) определено однозначно, то такая функция переноса автоматически обеспечивает ее равенство 1 на любом цикле фасет разбиения  $\mathcal{T}$ . Трудность состоит в доказательстве единственности определения функции переноса s(F')/s(F).

Согласно определению он-грани G, отношение s(F')/s(F) определено однозначно для любой пары фасет  $F, F' \in \mathcal{F}(G)$ . Отсюда же вытекает, что функция переноса g(F, F') = s(F')/s(F) дает 1 на любом цикле фасет из множества  $\mathcal{F}(G)$ .

Продемонстрируем применение сказанного выше для 2-неприводимых параллелоэдров, т.е. в случае Житомирского. В этом случае параллелоэдр не имеет контактных граней коразмерности 2. Поэтому однозначно определены функции переноса. Соответствующие грани коразмерности 3 суть он-грани. Поэтому приведенный выше метод дает каноническую нормировку.

Итак, отношение s(F')/s(F) однозначно определено, если соответствующая грань коразмерности 2 примитивна. Для контактной грани коразмерности 2 в общем случае оно не определено однозначно. Но иногда можно найти способ ее однозначного определения. Например, обойти контактную грань по пути фасет, смежных по примитивным граням. Один из таких обходов описан Ординым в доказательстве Теоремы 9 в [6]. Основной результат статьи [10] состоит в том, что каноническая нормировка параллелоэдра существует, если существуют пути обхода всех его контактных граней коразмерности 2. Но здесь возникает новая трудность. Разные пути обхода могут привести к разным результатам.

В приводимом ниже доказательстве теоремы 1 показано, что это отношение не зависит от пути обхода контактной грани, если разбиение k- и (k+1)-однозначно нормируемо для некоторого целого k. Это доказательство аналогично доказательству А.Ординым теоремы 8 в [6].

**Доказательство теоремы** 1. Для k=1 и k=2 мы имеем доказанный случай Житомирского. Поэтому положим  $k\geqslant 3$ .

Сначала покажем, что отношение s(F')/s(F) может быть определено однозначно для любой грани G коразмерности 2. Так как это верно для примитивной грани, то пусть G есть контактная грань.

Так как  $k \geqslant 3$ , то контактная грань G содержит подграни коразмерности k. Пусть  $H \subset G$  есть такая грань. По предположению, она однозначно нормируема. Пусть F, F' суть не параллельные фасеты, содержащие G. Так как  $\mathcal{F}(G) \subset \mathcal{F}(H)$  и H есть он-грань, то отношение s(F')/s(F) определено гранью H однозначно. Покажем, что это отношение не зависит от грани H, содержащейся в грани G.

Любые две подграни H и H' коразмерности k грани G могут быть соединены такой цепочкой граней коразмерности k, что соседние грани смежны по грани коразмерности k+1. Поэтому достаточно показать, что отношение s(F')/s(F) одно и то же для соседних граней H, H', для которых пересечение  $H \cap H' = K$  есть он-грань коразмерности k+1. Это так, поскольку все три грани H, H' и K суть он-грани и справедливы включения  $\mathcal{F}(G) \subset \mathcal{F}(H), \mathcal{F}(H') \subset \mathcal{F}(K)$ .

Итак, функция переноса определена. По теореме 2, мы должны убедиться, что она дает 1 по циклам фасет с общей гранью Q коразмерности 3. Но любой такой цикл содержится в множестве  $\mathcal{F}(H)$  грани  $H \subset Q$  коразмерности k. Так как H есть он-грань, то любой цикл в множестве  $\mathcal{F}(H)$  дает 1.

Дальнейшая часть статьи посвящена подробному изучению он-граней, а также доказательству того, что 3-неприводимое разбиение является 4-он-разбиением. Так как 3-неприводимое разбиение очевидным образом 3-однозначно нормируемо, то отсюда следовало бы, что теорема Ордина вытекает из теоремы 1 при k=3. Но, к сожалению, это не так, поскольку наше доказательство опирается на теорему Ордина.

# 3. Дуальные ячейки

В этом разделе мы покажем, что он-граням соответствуют он-дуальные ячейки. Они позволяют лучше понять свойства он-граней и как они определяют однозначную нормировку.

Пусть St(G) есть множество (звезда) всех граней разбиения  $\mathcal{T}$ , содержащих грань G. Грани G соответствует дуальная ячейка D(G). Она есть выпуклая оболочка центров c параллелоэдров  $P(c) \in St(G)$ . Центр каждого такого параллелоэдра есть точка решетки L, которая

является вершиной ячейки D(G). Действительно, пусть v есть вершина грани G и P(v) есть сдвиг некоторого параллелоэра  $P(c) \in St(G)$ , совмещающий его центр c с вершиной v. Тогда центры всех  $P \in St(G)$  суть вершины параллелоэдра P(v), так как если v есть вершина P(c), то c есть вершина P(v).

Дуальная ячейка D=D(G) есть выпуклый многогранник с множеством вершин  $V_D=\{c:P(c)\in St(G)\}\subset L$  и  $G=\cap_{c\in V_D}P(c)$  (доказательство см. в [11], [6]). Если разбиение состоит из параллелоэдров Вороного, то дуальная ячейка называется L-многогранником или многогранником Делоне.

Говорят, что ячейка D(G) имеет комбинаторную размерность k, если грань G имеет коразмерность k. Ради удобства и краткости, назовем комбинаторную размерность  $\kappa$ -размерностью. Таким образом параллелограмм и треугольник суть дуальные ячейки к-размерности 2. Б.Н.Делоне доказал в [12], что существует 5 типов дуальных ячеек к-размерности 3 (см. также [13]). Если  $0 \le k \le 3$ , то к-размерность ячейки равна ее размерности.

Соответствие между дуальными ячейками и гранями разбиения взаимно однозначно. Оно таково, что включения  $G \subseteq G'$  и  $D' = D(G') \subseteq D = D(G)$  эквивалентны, где последнее включение означает, что  $V_{D'} \subseteq V_D$ . Поэтому дуальные ячейки образуют комплекс многогранников.

Это соответствие можно увидеть и другим способом. Напомню, что  $H^k(G)$  есть гиперплоскость, ортогональная аффинному пространству, натянутому на грань G коразмерности k. Сдвинем k-мерную гиперплоскость  $H^k(G)$  в аффинную гиперплоскость  $H^k_a(G)$  так, чтобы она была трансверсальна грани G и пересекала ее по внутренней точке. Тогда в малой окрестности грани G пересечение плоскости  $H^k_a(G)$  с разбиением  $\mathcal T$  есть k-мерный веер  $\mathcal V^k(G)$ , составленный из конусов. Если  $0\leqslant m\leqslant k$ , то в вере  $\mathcal V^k(G)$  имеются различные конусы размерности m. Будем различать их нижним индексом t. Тогда конус  $C^m_t\in\mathcal V^k(G)$  размерности m соответствует грани  $G^{k-m}_t$  коразмерности k-m, содержащей грань G в разбиении  $\mathcal T$ .

Пусть  $S^{k-1}$  есть (k-1)-мерная сфера с центром в вершине веера  $\mathcal{V}^k(G)$ . Пересечение конуса  $C_t^m \in \mathcal{V}^k(G)$  со сферой  $S^{k-1}$  есть (m-1)-мерная область  $S_t^{m-1}$  разбиения сферы  $S^{k-1}$  конусами нашего веера. Обозначим шар, поверхностью которого является это разбиение сферы, через S(G). Шар S(G) фактически есть сферический k-мерный многогранник. Между гранями многогранника S(G) и подъячейками ячейки D(G) существует взаимно однозначное соответствие такое, что грань  $S_t^m$  размерности m многогранника S(G) соответствует подъячейке  $D(G_t^{k-(m+1)})$  ячейки D(G) к-размерности k-1-m. Поэтому многогранник S(G) в некотором смысле дуален ячейке D(G).

Дуальная ячейка контактной грани центрально симметрична. Пусть [c,c'] есть отрезок между двумя вершинами дуальной ячейки D(G). Пересечение  $P(c) \cap P(c')$  есть контактная грань K, содержащая грань G. Поэтому отрезок [c,c'] есть диагональ центрально симметричной дуальной подъячейки  $D(K) \subseteq D(G)$ . Симметрия с центром в середине отрезка [c,c'] переводит ячейку D(G) в ячейку  $D^*(G)$ , совмещая подъячейку D(K) с собой. Поэтому  $D(G) \cap D^*(G) = D(K)$ . Отрезок [c,c'] параллелен и равен по длине контактному вектору  $l_K$  решетки L разбиения. Поэтому естественно отождествлять отрезки [c,c'] с соответствующими контактными векторами.

Назовем дуальную ячейку фасеты дуальным ребром. Отрезок [c,c'] дуальной ячейки D(G) есть дуальное ребро тогда и только тогда, когда  $D(G) \cap D^*(G) = [c,c']$ , где  $D^*(G)$  есть образ ячейки D(G) при симметрии с центром в середине отрезка [c,c'].

Центрально симметричные грани дуальной ячейки суть центрально симметричные подъячейки (см. [6]). В частности, ребра дуальной ячейки суть также дуальные ребра.

Дуальная ячейка D к-размерности k+1 содержит подъячейки к-размерностей m, где  $0 \le m \le k$ . Рассмотрим в ячейке D к-размерности k+1 такую последовательность подъячеек к-размерности k, что две соседние ячейки пересекаются по ячейке к-размерности k-1. Назовем такую последовательность nymem. Путь называется uuknom, если начальная и по-

следняя ячейка совпадают.

Так как существует взаимно однозначное соответствие между подъячейками D(G) и гранями сферического многогранника S(G), то такое же соответствие существует между путями и циклами подъячеек D(G) и граней многогранника S(G). Докажем две полезные леммы.

 $\Pi$ ЕММА 1. Пусть D есть дуальная ячейка  $\kappa$ -размерности k+1. Тогда любая ее подъячейка  $\kappa$ -размерности k-1 содержится ровно в двух ее подъячейках  $\kappa$ -размерности k.

**Доказательство**. Пусть  $D(G) \subset D$  есть подъячейка к-размерности k-1. Тогда грань G есть многогранник коразмерности k-1. Любая его грань коразмерности k+1 есть пересечение ровно двух граней коразмерности k, которые суть фасеты многогранника G. Так как соответствие между гранями и их дуальными ячейками взаимно однозначно, то отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 1 позволяет на ячейке D к-размерности k+1 определить граф K(D) на множестве ее подъячеек к-размерности k. Две вершины этого графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им ячейки имеют общую подъячейку к-размерности k-1. Существует естественное соответствие между путями в D подъячеек к-размерности k и путями в графе K(D).

Напомню, что дуальной ячейке D(G) к-размерности k+1 дуален (k+1)-мерный сферический многогранник S(G). В этом многограннике дуальной ячейке  $D^m$  к-размерности m соответствует грань  $S^{k-m}$  размерности k-m. Поэтому подъячейкам к-размерностей k и k-1 соответствуют грани размерностей 0 и 1, т.е вершины и ребра многогранника S(G). Следовательно графу K(D) соответствует реберный граф многогранника S(G). В реберном графе многогранника S(G) двухмерным граням соответствуют циклы ребер, обходящих эту грань.

 $\Pi$ ЕММА 2. Любой цикл в реберном графе многогранника S(G) представим в виде композиции циклов ребер двухмерных граней многогранника S(G).

Доказательство. Многогранник S(G) есть связный полиэдр в смысле книги [14]. В §45 этой книги показано, что фундаментальная группа связного полиэдра совпадает с фундаментальной группой его поверхностного комплекса, построенного из двухмерных граней полиэдра. Фундаментальная группа поверхностного комплекса совпадает с группой его реберных циклов. Удалим в каждой двухмерной грани внутреннюю точку. Тогда в новом комплексе реберные циклы двухмерных граней становятся образующими его фундаментальной группы. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Напомню, что реберным циклам в многограннике S(G), где G есть грань параллелоэдра коразмерности k+1, соответствуют циклы дуальных подъячеек к-размерности k. Двухмерной грани многогранника S(G) соответствует дуальная ячейка к-размерности k-2. Поэтому лемма 2 имеет следующее

Следствие 1. Любой цикл подъячеек  $\kappa$ -размерности k в дуальной ячейке  $\kappa$ -размерности k+1 представим в виде композиции циклов подъячеек  $\kappa$ -размерности k, имеющих общую подъячейку  $\kappa$ -размерности k-2.

## 4. ОН-дуальные ячейки

Существует взаимно однозначное соответствие между дуальными ребрами ячейки и соответствующими нормальными векторами параллелоэдра. Более того, если параллелоэдр есть параллелоэдр Вороного, то это соответствие есть линейное отображение. Это отображение переводит дуальную ячейку D(G) к-размерности k в многогранник M(G) размерности k. Многогранник M(G) комбинаторно изоморфен дуальной ячейке D(G). Например, дуальная ячейка

D(G) примитивной грани G коразмерности k и многогранник M(G) оба являются k-мерными симплексами. Их ребра суть фасетные векторы и нормальные векторы, соответственно.

Так как неизвестно контрпримера гипотезе Вороного, то обычно такое соответствие дуальной ячейки D(G) многограннику M(G), ребра которого параллельны соответствующим нормальным векторам, возможно для произвольной грани G. В этом случае соответствующие нормальные векторы получают некоторые длины, равные длинам ребер многогранника M(G). Если для нормального вектора  $p_F$  выбрана длина, то задана нормировка s(F). Будем считать, что нормировка s(F) приписана также и фасетному вектору  $l_F$ . Итак, если существует многогранник M(G), то он определяет нормировку дуальной ячейки D(G).

Напомню, что ребра многогранника M(G) параллельны векторам фиксированного множества  $\mathcal{P}$  нормальных векторов фасет разбиения. Пусть  $\mathcal{M}(G)$  есть множество многогранников M(G), соответствующих дуальной ячейке D(G). Если  $\mathcal{M}(G) \neq \emptyset$ , то разнообразие многогранников M(G), соответствующих дуальной ячейке D(G), связано с изменением длин их ребер.

**Определение**. Дуальная ячейка D(G) и соответствующий ей многогранник M(G) называются однозначно нормируемыми, если все многогранники  $M(G) \in \mathcal{M}(G)$  гомотетичны друг другу. Ради краткости, назовем их он-ячейкой и он-многогранником, соответственно.

Существует только два типа двухмерных многогранников M(G): он-треугольник и не-он параллелограмм. Имеется 5 типов трехмерных многогранников M(G): 3 он-многогранника — тетраэдр, октаэдр и пирамида с параллелограммом в основании и 2 не-он многогранника — параллелепипед и призма с треугольным основанием.

Определение однозначной нормировки естественным образом расширяется на объединения дуальных ячеек, так как этим объединениям сопоставляются объединения многогранников вида M(G).

Так как все он-многогранники M(G) для данной грани G гомотетичны, то отношение s(F')/s(F) не зависит от многогранника M(G), т.е. однозначно определяется дуальной ячей-кой D(G). Именно это свойство было положено в определение он-грани G. Поэтому грань G является он-гранью тогда и только тогда, когда дуальная ячейка D(G) есть он-ячейка. В этом случае ячейке D(G) к-размерности m соответствует единственный, с точностью до гомотетии, m-мерный многогранник M(G).

 $\Pi$ ЕММА 3. Пусть D есть дуальная ячейка  $\kappa$ -размерности k+1. Тогда она есть он-ячейка, если все ее подъячейки  $\kappa$ -размерностей k и k-1 суть он-ячейки.

Доказательство. Сначала покажем, что если пересечение  $D_1 \cap D_2$  двух он-ячеек  $D_1$  и  $D_2$  есть он-ячейка, то объединение  $D_1 \cup D_2$  однозначно нормировано. Пусть  $s_1$  и  $s_2$  суть нормировки ячеек  $D_1$  и  $D_2$ . Так как пересечение этих ячеек есть он-ячейка, то ограничения  $s_1$  и  $s_2$  на  $D_1 \cap D_2$  отличаются на некий множитель. Так как нормировки задаются с точностью до множителя, то можно выбрать  $s_1$  и  $s_2$  так, что они совпадают на пересечении. Объединение этих нормировок дает однозначную с точностью до множителя нормировку объединения  $D_1 \cup D_2$ . Поэтому это объединение однозначно нормируемо.

Рассмотрим в ячейке D к-размерности k+1 путь, состоящий из он-ячеек к-размерности k, пересекающихся по он-ячейкам к-размерности k-1. Согласно сказанному выше, этот путь однозначно нормируем. С помощью таких путей можно однозначно нормировать объемлющую ячейку D. Покажем, что такая нормировка непротиворечива. Для этого достаточно показать, что она непротиворечива на циклах. Очевидно, что нормировка непротиворечива на циклах ячеек, имеющих общую дуальную подъячейку к-размерности m, где  $1 \le m \le k-2$ . Согласно следствию 1, каждый цикл есть суперпозиция циклов ячеек, имеющих общую подъячейку к-размерности k-2.

### 5. Пирамиды

В этом разделе показано, что дуальные пирамиды суть он-ячейки.

Пусть  $G_0$  есть грань коразмерности k-1, и  $G\subset G_0$  есть ее подгрань коразмерности k, где  $k\geqslant 2$ . Пусть  $P_i\in St(G_0)\subset St(G),\,i\in N$ , суть все параллелоэдры разбиения, содержащие грань  $G_0$ . Предположим, что кроме параллелоэдров  $P_i,i\in N$ , звезда St(G) содержит еще только один параллелоэдр  $P_0\in St(G)$  и пересечения  $F_i=P_0\cap P_i$  суть фасеты для всех  $i\in N$ . Фасеты звезды St(G) суть  $F_i$  для  $i\in N$  и  $F_{ij}=P_i\cap P_j$  для некоторых пар индексов ij. Замечу, что если k=2, то  $G_0$  есть фасета. Тогда из выше приведенных условий вытекает, что грань G коразмерности 2 примитивна.

Дуальная ячейка D(G) называется комбинаторной пирамидой с основанием  $D_0 = D(G_0)$  и обозначается  $Pyr(D_0)$ . Дуальные ребра пирамиды D(G) суть фасетные векторы  $l_F$  для всех фасет  $F \in St(G)$ .

Напомню, что  $\mathcal{P}$  означает множество нормальных векторов  $p_F$  всех фасет F разбиения  $\mathcal{T}$ , а  $H^k(G)$  есть k-мерное пространство, порожденное нормальными векторами  $p_F \in \mathcal{P}$  для всех  $F \in St(G)$ . Оно ортогонально аффинному пространству, натянутому на грань G коразмерности k.

Предложение 1. Пирамида  $D(G) = Pyr(G_0)$  является он-ячейкой.

**Доказательство**. Грань G есть пересечение фасет  $F_i$  параллелоэдра  $P_0$  для всех  $i \in N$ . Пусть  $p_i \in \mathcal{P}$  есть внешний нормальный вектор фасеты  $F_i$ . Нормальные векторы  $p_i$  для всех  $i \in N$  порождают пространство  $H^k(G)$ . В этом пространстве рассмотрим конус

$$C(G) = \{x \in \mathbb{R}^k : x = \sum_{i \in N} \lambda_i p_i, \text{ где } \lambda_i \geqslant 0\},$$

натянутый на нормальные векторы  $p_i$ . Пусть начало координат 0 есть центр параллелоэдра  $P_0$ . Тогда 0 есть вершина C(G). Пусть  $l(p_i)$  есть полупрямая, натянутая на вектор  $p_i$ .

Для каждого  $i \in N$  параллелоэдр  $P_i$  смежен параллелоэдру  $P_0$  по фасете  $F_i$ . Если  $F_{ij} = P_i \cap P_j$  есть фасета, то пусть  $p_{ij}$  есть ее нормальный вектор. Пересечение трех фасет  $F_i$ ,  $F_j$  и  $F_{ij}$  есть примитивная грань  $G_{ij}$  коразмерности 2. Соответствующая ей 2-плоскость  $H^2(G_{ij})$  натянута на конусную оболочку  $f_{ij}$  полупрямых  $l(p_i)$  и  $l(p_j)$ . Поэтому нормальный вектор  $p_{ij}$  параллелен 2-плоскости, содержащей  $f_{ij}$ .

Напомню, что грань  $G_0$  принадлежит параллелоэдрам  $P_i$  для всех  $i \in N$  и грань G есть ее подгрань. Поэтому  $G_0 \subset F_{ij}$  и нормальный вектор  $p_{ij}$  параллелен (k-1)-мерному пространству  $H^{k-1}(G_0)$ . Пространство  $H^{k-1}(G_0)$  есть гиперплоскость пространства  $H^k(G)$ . Пусть  $h \in H^k(G)$  есть такой нормальный вектор этой гиперплоскости, что  $\langle h, p_i \rangle > 0$  для всех  $i \in N$ . Пусть  $H_a^{k-1}(G_0)$  есть параллельный сдвиг пространства  $H^{k-1}(G_0)$  в направлении вектора h. Тогда пересечение  $H_a^{k-1}(G_0) \cap C(G)$  есть (k-1)-мерный многогранник.

Для  $i \in N$  пусть  $u_i$  есть точка пересечения полупрямой  $l(p_i)$  с гиперплоскостью  $H_a^{k-1}(G_0)$ . Определим нормировку  $s(F_i)$  нормального вектора  $p_i$  (и фасетного вектора  $l_{F_i}$ ) так, чтобы длина вектора  $s(F_i)p_i$  была равна длине отрезка  $[0, u_i]$ .

Пересечение  $H_a^{k-1}(G_0) \cap f_{ij}$  есть отрезок  $[u_i, u_j]$ , который параллелен нормальному вектору  $p_{ij}$ . Определим нормировку  $s(F_{ij})$  этого вектора так, чтобы длина вектора  $s(F_{ij})p_{ij}$  была равна длине отрезка  $[u_i, u_j]$ .

Таким образом, мы определили нормировки всех дуальных ребер дуальной ячейки D(G). Они определены однозначно с точностью до общего множителя, пропорционального сдвигу аффинной плоскости  $H_a^{k-1}(G_0)$ . Отсюда следует, что дуальная ячейка D(G) есть он-ячейка.

Симплекс есть пирамида над симплексом. Отрезок есть одномерный симплекс, который, очевидно, есть он-ячейка. Поэтому, используя индукцию по размерности, получаем из предложения 1, что любой симплекс есть он-ячейка.

Пусть ячейка D центрально симметрична и Pyr(D) есть он-ячейка. Центральная симметрия в центре ячейки D порождает центрально симметричную бипирамиду  $BPyr(D) = Pyr(D) \cup (Pyr(D))^*$  с основанием D. Нормировка Pyr(D) естественным образом продолжается до нормировки BPyr(D): пары симметричных ребер получают одинаковые нормировки. Очевидно, что при этом получается однозначная нормировка, если исходная была таковой.

 $\Pi$ ЕММА 4. Пусть пирамида Pyr(D) над центрально симметричной ячейкой D есть онячейка. Тогда бипирамида BPyr(D) тоже однозначно нормируема.

Отмечу, что, вообще говоря, бипирамида может не быть дуальной ячейкой, а лишь объединением дуальных пирамид.

### 6. 3-неприводимые разбиения

Рассмотрим теперь 3-неприводимые разбиения на параллелоэдры. В этом случае есть только три типа дуальных ячеек к-размерности 3: тетраэдр, октаэдр и пирамида  $Pyr(\Pi)$  с параллелограммом  $\Pi$  в основании. Результаты предыдущего раздела показывают, что все они суть он-ячейки. Назовем параллелограмм, являющийся дуальной ячейкой,  $\partial y$ альным параллелограммом.

Для доказательства приводимого ниже предложения 2 необходим важный и не тривиальный результат из [6]. Пусть D есть дуальная ячейка к-размерности 4 в 3-неприводимом разбиении. Пусть ячейка D содержит дуальные параллелограммы. Согласно лемме 1, где k=3, каждый дуальный параллелограмм  $\Pi$  в ячейке D содержится ровно в двух пирамидах  $Pyr_1(\Pi)$  и  $Pyr_2(\Pi)$ . Обе эти пирамиды суть он-ячейки. Пусть  $s_1$  и  $s_2$  суть их он-нормировки. В общем случае нет гарантии, что их ограничения на параллелограмм  $\Pi$  согласованы, т.е. пропорциональны. В случае, если  $s_1(\Pi)$  и  $s_2(\Pi)$  пропорциональны друг другу, А.Ордин говорит, что параллелограмм  $\Pi$  когерентен по отношению к ячейке  $D \supset \Pi$ .

Я формулирую упомянутый выше результат А.Ордина в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. (A. Opдин) В 3-неприводимом разбиении дуальные параллелограммы, содержащиеся в каждой ячейке к-размерности 4, когерентны по отношению к ней.

**Предложение 2.** Дуальные ячейки к-размерности 4 в 3-неприводимом разбиении суть онячейки.

Доказательство. Согласно теореме 3, в 3-неприводимом разбиении каждый дуальный параллелограмм спрятан в объединении двух пирамид, имеющих этот параллелограмм в качестве основания. При этом объединение этих двух пирамид можно рассматривать как одну он-ячейку к-размерности 3. Поэтому можно считать, что ячейки к-размерности 4 содержат только он-ячейки к-размерностей 2 и 3. Тогда, согласно лемме 3, где положено k=3, ячейки к-размерности 4 суть он-ячейки.

Теперь я приведу пример семейства таких d-мерных параллелоэдров, что при  $d \geqslant 4$  они k-приводимы для всех  $k \geqslant 2$ . Но все его дуальные ячейки к-размерности d и d-1 однозначно нормируемы. Иными словами вершины и ребра этого параллелоэдра однозначно нормируемы.

Пусть  $\mathcal{E} = \{e_i : i \in N\} \cup \{e_0\}$  есть произвольный (n+1)-мерный базис, где |N| = n и  $0 \notin N$ . Тогда множество 2n векторов  $U = \{e_i, e_0 - e_i : i \in N\}$  есть графическая унимодулярная система. Соответствующий граф на n+2 вершинах состоит из n двухреберных цепей  $\Gamma_i$  для всех

 $i \in N$  с общими начальными и конечными вершинами. Двум ребрам цепи  $\Gamma_i$  соответствуют два вектора  $e_i$  и  $e_0 - e_i$ .

Зонотопный параллелоэдр  $Z^d(U)$  имеет размерность d=n+1. Он есть сумма Минковского 2(d-1) отрезков, параллельных векторам множества U. Параллелоэдр  $Z^d(U)$  замечателен тем, что при  $d\geqslant 3$  его грани всех размерностей, но не он сам, суть параллелепипеды. Для  $2\leqslant d\leqslant 4$  имеем следующие частные случаи:  $Z^2=\Pi$  есть параллелограмм,  $Z^3$  есть ромбический додекаэдр,  $Z^4$  имеет номер 11 в списке четырехмерных параллелоэдров, приведенным Б.Н.Делоне в [12].

Кроме того, его d-мерные дуальные ячейки имеют подъячейки к-размерностей не более d-2, являющиеся параллелепипедами. Это значит, что разбиение на зонотопы  $Z^d(U)$  имеет приводимые грани коразмерностей больше или равных 2, т.е. это разбиение k-приводимо для всех  $k \geqslant 2$ .

#### 7. Заключение

В заключение я приведу 3 проблемы, возникшие в ходе написания этой статьи.

Напомню, что пространство нормальных векторов фасет приводимой грани разложимо в прямую сумму. Поэтому приводимая грань не имеет однозначной нормировки, так как отношения нормировок нормальных векторов из разных компонент не может быть определено однозначно. Отсюда вытекает, что k-однозначно нормируемое разбиение k-неприводимо. Кроме того, обратно, для  $k \leqslant 3$  каждое k-неприводимое разбиение k-однозначно нормируемо .

**Пролема** 1. Показать или опровергнуть, что понятия k-неприводимого разбиения и k-однозначно нормируемого разбиения совпадают.

Очевидно, что 2-однозначно нормируемое разбиение также k-однозначно нормируемо для любого  $k \geqslant 2$ . В предложении 2 было показано, что 3-однозначно нормируемое разбиение 4-однозначно нормируемо. Поэтому естественно рассмотреть следующую проблему.

**Проблема 2**. Показать или опровергнуть, что всякое k-однозначно нормируемое разбиение также u(k+1)-однозначно нормируемо.

Наименее строгое требование на d-мерное разбиение является его d-однозначная нормиру-емость.

**Проблема 3**. Показать или опровергнуть, что разбиение размерности d, неразложимое в прямую сумму, d-однозначно нормируемо.

Проблема 3 эквивалентна проблеме доказательства гипотезы Вороного.

# СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Венков Б.А. Об одним классе эвклидовых многогранников // Вестник ЛГУ. 1954. № 2. С. 11-31.
- 2. Долбилин Н.П. Свойства граней параллелоэдров // Труды МИАН. 2009. Т. 266. С. 112—126.
- 3. Voronoi G.F. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques Deuxième mémoire // J. Reine. Angew. Math. 1908. V 134. P. 198–287; 1909. V. 136. P. 67–178. (Русский перевод: Вороной Г.Ф. Исследование о примитивных параллелоэдрах, собр. соч. Киев: изд-во АН УССР. 1952. Т.2. С. 239–368.
- 4. Deza M., Grishukhin V. Properties of parallelotopes equivalent to Voronoi's conjecture // Europ. J. Combinatorics. 2004. V. 25. P. 517–533.

- 5. Гришухин В.П. Параллелоэдры, определяемые квадратичной формой // Труды МИАН. 2015. Т. 288. С. 81–93.
- 6. Ordin A. A proof of Voronoi conjecture on parallelotopes in a new special case: Ph.D. thesis, Queen's University, Kingston, 2005. 141 p.
- 7. Žitomirskij O.K. (Zhitomirskii) Verschärfung eines Satzes von Woronoi // Zhurnal Leningrdskogo Matematicheskogo Obshchestva. 1929. V. 2. P. 131–151.
- 8. Ryshkov S.S. Rybnikov Jr. K.A. The theory of quality trnslations with applications to tilings // Europ. J. of Combinatorics. 1997. V. 18, № 4. P. 431–444.
- 9. Гаврилюк А.А. Геометрия подъемов разбиений евклидовых пространств // Труды МИАН. 2015. Т. 288. С. 49–66.
- 10. Garber A., Gavrilyuk A., Magazinov A. The Voronoi conjecture for parallelohedra with simply connected δ-surface. // Discrete Compute. Geom. 2015. V. 53 № 2. P. 245–260.
- 11. Horváth Á.G. On the boundary of an extremal body // Beiträge zur Algebra und Geometrie. 1999. V. 40, № 2. P. 331–342.
- 12. Delaunay B.N. Sur la partition régulière de l'espace á 4 dimensions // Изв. АН СССР, VII сер. Отд. физ-матем. наук. 1929. Première partie N.1, 79–110, Deuxième partie, N.2. P. 147–164.
- 13. Magazinov A.N. On Delaunay's theorem classifying coincidences of parallelohedra at faces of codimension 3 // Modelling and Analysis of inform. systems. 2013. V. 20, № 4. P. 71–80.
- 14. Зейферт Г., Трелльфаль В. Топология. М.;Л.: ОНТИ, 1938. 448 с.

#### REFERENCES

- 1. Venkov B. A., 1954, "Ob odnim klasse ehvklidovyh mnogogrannikov",  $\textit{Vestnik LGU.} \ \ 2.$  pp. 11-31.
- 2. Dolbilin N. P., 2009, "Svojstva granej paralleloehdrov", Trudy MIAN. T. 266. pp. 112–126.
- 3. Voronoi G. F. 1908, 1909, "Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques Deuxième mémoire", *J. Reine. Angew. Math.* V 134. pp. 198–287; V. 136. pp. 67–178.
- 4. Deza M., Grishukhin V., 2004, "Properties of parallelotopes equivalent to Voronoi's conjecture", Europ. J. Combinatorics. V. 25. pp. 517–533.
- Grishuhin V. P., 2015, "Paralleloehdry, opredelyaemye kvadratichnoj formoj", Trudy MIAN. T. 288. pp. 81–93.
- 6. Ordin A., 2005, A proof of Voronoi conjecture on parallelotopes in a new special case, Ph.D. thesis, Queen's University, Kingston, 141 p.
- 7. Žitomirskij O. K. (Zhitomirskii), 1929, "Verschärfung eines Satzes von Woronoi", Zhurnal Leningrdskogo Matematicheskogo Obshchestva. V. 2. pp. 131–151.
- 8. Ryshkov S. S. Rybnikov Jr. K. A., 1997, "The theory of quality trustations with applications to tilings", *Europ. J. of Combinatorics*. V. 18, № 4. pp. 431–444.

- 9. Gavrilyuk A. A., 2015, "Geometriya podemov razbienij evklidovyh prostranstv", *Trudy MIAN*. T. 288. pp. 49–66.
- 10. Garber A., Gavrilyuk A., Magazinov A. 2015, "The Voronoi conjecture for parallelohedra with simply connected  $\delta$ -surface.", *Discrete Compute. Geom.* V. 53 No. 2. pp. 245–260.
- 11. Horváth Á. G., 1999, "On the boundary of an extremal body", Beiträge zur Algebra und Geometrie. V. 40, № 2. pp. 331–342.
- 12. Delaunay B. N., 1929, "Sur la partition régulière de l'espace á 4 dimensions", *Izv. AN SSSR*, VII ser. Otd. fiz-matem. nauk. Première partie N.1, 79–110, Deuxième partie, N.2. pp. 147–164.
- 13. Magazinov A. N., 2013, "On Delaunay's theorem classifying coincidences of parallelohedra at faces of codimension 3", Modelling and Analysis of inform. systems. V. 20, № 4. pp. 71–80.
- 14. Zejfert G., Trell'fal' V., 1938, Topologiya. M.;L.: ONTI, 448 P.

Получено 18.06.2018 Принято в печать 17.08.2018