ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 2

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-388-405

Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений [1]

Басалов Юрий Александрович — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственного педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Аннотация

В данной работе проводится исторический обзор результатов по проблеме оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для n действительных чисел. Эта проблема является частным случаем более общей проблемы приближения n действительных линейных форм и имеет свою богатую историю, восходящую к П. Г. Дирихле. Мы в большей степени остановимся на подходе Г. Дэвенпорта, основанном на связи диофантовых приближений с геометрией чисел.

В первой части дается обзор результатов, полученных для $n = 1$ и $n = 2$ действительных чисел. Исторически, в основе оценок для $n = 1$ лежит теория цепных дробей, и наиболее значимой является оценка А. Гурвица, полученная им в 1891 году. Для $n = 2$ в основе известных оценок лежит математический аппарат линейной алгебры (Ф. Фуртвенглер), геометрия чесел (Г. Дэвенпорт, Дж. В. С. Касселс) и результаты многомерных обобщений цепных дробей (В. Адамс, Т. Кьюзик).

Вторая часть посвящена одной из первых общих оценок снизу, полученной в 1929 году Ф. Фуртвенглером. Он построил оценки дискриминантов алгебраических полей, которые приводят к оценке качества приближения n действительных чисел рациональными, что в свою очередь приводит в оценке константы наилучших совместных диофантовых приближений.

В третьей часть изложена наиболее фундаментальная из известных на данный момент оценок, полученная Г. Дэвенпортом, а затем доработанная Дж. В. С. Касселсом. Г. Дэвенпорт обнаружил связь между значением критического определителя решеток и оценкой некоторых форм. В частном случае, это позволяет вычислив критический определитель специальной решетки, получить значение константы наилучших совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для решеток такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя, к оценке его значения. Этот подход оказался достаточно плодотворным, позволив получить оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$.

В четвертой части дается обзор известных оценок снизу для $n > 2$. Эти результаты основаны на использовании вышеупомянутого подхода Дж. В. С. Касселса. Стоит отметить, что оценки такого рода являются достаточно сложной вычислительной задачей, и в каждом отдельном случае решение такой задачи требовало использования новых подходов.

В последней части мы приведем обзор некотрых известных оценок константы наилучших диофантовых приближений сверху. Хотя данная проблема не является основной темой данной статьи, значительный интерес представляет сравнение подходов при оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений сверху и снизу. Первая оценка сверху была получена Г. Минковским в 1896 году с ипользованием геометрии чисел. Г. Ф. Блихфельдт введя понятие фундаметального параллелепипеда в 1914 году улучшил

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ: (грант 16-41-710194_р_центр_а).

результат Г. Минковского. Позднее подход Г. Ф. Блихфельдта получил развитие в работах П. Мюллендера, В. Спона, В. Г. Новака.

Ключевые слова: история математики, наилучшие совместные диофантовы приближения, геометрия чисел, звездные тела, критические определители.

Библиография: 39 названий.

Для цитирования:

Басалов Ю. А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевкий сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 388–405.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 2

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-388-405

On the history of estimates of the constant of the best joint diophanite approximations

Basalov Yurij Aleksandrovich — Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Postgraduate Student, Tula State Pedagogical University of Leo Tolstoy.
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Abstract

This paper presents a historical review of the results on the problem of estimating a constant best joint diophantine approximations for n real numbers. This problem is a special case of the more general problem of approximating n real linear forms and has itself rich history, ascending to P. G. Dirichlet. We will focus more on the approach of H. Davenport, based on the connection of Diophantine approximations with the geometry of numbers.

The first part provides an overview of results obtained for $n = 1$ and $n = 2$ real numbers. Historically, estimates for $n = 1$ are based on the theory of continued fractions and the most significant is A. Hurwitz's estimate obtained in 1891. For $n = 2$ the basis of known estimates is mathematical apparatus of linear algebra (F. Furtwangler), geometry of numbers (H. Davenport, J. W. S. Cassels) and the results of multidimensional generalizations of continued fractions (V. Adams, T. Cusick).

The second part is devoted to one of the first general estimates from below obtained in 1929 by F. Furtwangler. He constructed estimates of the discriminants of algebraic fields, which lead to an estimate of the quality of the approximation of n real numbers by rational, which in turn results in estimating the constant best joint diophantine approximations.

The third part outlines the most fundamental of the currently known assessments obtained H. Davenport and then refined by J. W. S. Cassels. H. Davenport discovered the connection between the value critical determinant of lattices and the estimating of some forms. In the particular case it allows to get the value of the constant best joint diophantine approximations by calculating the critical determinant of the special lattice. However the calculation of critical determinants for lattices of this type is a difficult task. Therefore, J. W. S. Cassells switched from the direct calculation of the critical determinant to the estimating of its value. This approach proved to be quite fruitful and allowing us to obtain estimates of the constant best joint diophantine approximations for $n = 2, 3, 4$.

The fourth part gives an overview of the well-known estimates from below for $n > 2$. These results are based on the use of the aforementioned approach of J. W. S. Cassels. It is worth noting that assessments of this kind are quite a complicated computational problem and in each case the solution of this problem required the use of new approaches.

In the last part we present a review of some well-known estimates of the constant best diophantine approximations from above. Although this problem is not the main topic of this articles, but considerable interest is the comparison of approaches in assessing constants of the best joint diophantine approximations from above and below. The first estimate from above was obtained by H. Minkowski in 1896 using the geometry of numbers. H. F. Blichfeldt introducing the concept of the fundamental parallelepiped in 1914 improved the result of H. Minkowski. Later the approach of H. F. Blichfeldt received development in the works of P. Mullender, W. G. Spohn, W. G. Nowak.

Keywords: history of mathematics, best joint Diophantine approximations, geometry of numbers, star bodies, critical determinants.

Bibliography: 39 titles.

For citation:

Basalov Yu. A., 2018, "On the history of estimates of the constant of the best joint Diophantine approximations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 388–405.

1. Введение

Проблема оценки константы наилучших диофантовых приближений имеет интересную историю. Важной особенностью этой проблемы является разнообразие методов из различных разделов математики, с помошью которых были получены результаты по этой проблеме. Для оценки снизу - А. Гурвицом с помощью аппарата цепных дробей [15], Ф. Фуртвенглером с помощью аппарата линейной алгебры [12, 13], Г. Дэвенпортом, Дж. В. С. Касселсом и Т. Кьюзиком с использованием подходов геометрии чисел [6, 8, 9]. Стоит отметить, что в случае оценки константы наилучших диофантовых приближений сверху, не наблюдается такого большого количества качественно различных подходов решения проблемы. Потому что наиболее известные результаты, посути являются развитием результата Г. Минковского [23].

В данной статье мы дадим краткий обзор известных результатов в области совместных диофантовых прилижений для n действительных чисел

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$$

и в частности оценки константы наилучших диофантовых приближений C_n. Мы в первую очередь остановимся на связи теории наилучших диофантовых приближений и геомерии чисел, а в частности на подходах Г. Дэвенпорта и Дж. В. С. Касселса.

Отметим, что задача приближения n действительных чисел является частным случаем задачи приближения n действительных линейных форм

$$\begin{pmatrix} \vec{\alpha_1} \\ \vec{\alpha_2} \\ \ldots \\ \vec{\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

и тесно связано с приближение одной линейной формы с помощью принципа переноса Хинчина [38].

Сформулируем предварительно задачу наилучших совместных диофантовых приближений n действительных чисел. Пусть

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$$

— произвольный вектор действительных чисел. Нас будут интересовать приближения $\vec{\alpha}$ рациональными дробями

$$\frac{\vec{p}}{q} = \left(\frac{p_1}{q},\ \frac{p_2}{q},\ \ldots,\ \frac{p_n}{q}\right).$$

По теореме Дирихле (2, [38]), существует бесконечно много рациональных векторов $\vec{p}/q$ таких, что

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < q^{-\frac{n+1}{n}}, \qquad i = \overline{1, \ldots, n}.$$

В качестве меры качества приближения мы будем использовать

Определение 1. *Мерой качества совместных приближений Дирихле первого рода вектора $\vec{\alpha}$ рациональным вектором $\vec{p}/q$ называется величина*

$$D(\vec{\alpha}, \vec{p}/q) = \max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n\,. \tag{1}$$

Тогда из теоремы Дирихле следует, что существуют числа C такие, что неравенство

$$\max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n < C \tag{2}$$

имеет бесконечное количество решений в целых числах $q > 0, p_1, \ldots, p_n$.

Определение 2. *Константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ для вектора $\vec{x}$ называется точная нижняя грань величины C, для которой существует бесконечное число рациональных векторов $\vec{p}/q$, удовлетворяющих неравенству*

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C. \tag{3}$$

То есть, для любой положительной константы $C < C(\vec{x})$ неравенство

$$D(\vec{x}, \vec{p}/q) < C$$

имеет конечное число решений с рациональным вектором $\vec{p}/q$, для $C > C(\vec{x})$ — бесконечное число решений, а для $C(\vec{x})$ вопрос о количестве решений остается открытым.

Из теоремы Дирихле непосредственно следует, что для любого вектора $\vec{x}$ константа наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x}) \leqslant 1$.

Определение 3. *Константой наилучших диофантовых приближений C_n называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$ размерности n:*

$$C_n = \sup_{\vec{x}\in\mathbb{R}^s} C(\vec{x}).$$

То есть, C_n — это наименьшее положительное число, при котором неравенство (2) имеет бесконечное количество решений для всех $C = C_n + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и любых $\vec{x}$. Нас в дальнейшем будет интересовать вопрос вычисления или оценки значения C_n.

Особый интерес этот вопрос вызавыет в связи с тем, что вектора $\vec{x}$ для которых $C(\vec{x}) = C_n$ посути являются плохоприближаемыми, так как на них величина (1) достигает наибольшего значения. Сразу встает вопрос о структуре этих векторов, о их свойствах, о причинах того, почему они являютсяплохо приближаемыми. Так же интерес вывают их экстремальные свойства – например, для $n = 1$, это числа из квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, в частности всем известное золотое сечение.

Выделяют еще один частный наилучших диофантовых приближений $C(\vec{x})$ – наилучшие приближения алгебраических векторов $\vec{x}$.

Определение 4. *Константой наилучших диофантовых приближений C_n^* алгебраических чисел называют точную верхнюю грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$, таким что вместе с 1 они образуют базис чисто вещественного поля алгебраических чисел степени $n+1$.*

Для C_n^* были получено значительное количество оценок [1, 2, 8, 32]. Для нас этот случай имеет особый интерес в силу двух факторов.

Во-первых, методы оценки для алгебраиеских чисел значительно отличаются свои разнообразием от оценок для произвольных действительных чисел.

Во-вторых, существуют мнения, что $C_n = C_n^*$ [8]. Одним из результатов, который может косвенно подкрепить эту гипотезу является оценка полученная Дж. Шекерсом (Szekers) [31]

$$C_n^* \leq C_n.$$

Отметим, что неравенство имеет место тогда, когда плохо приближаемый вектор $\vec{x}$ не является алгебраическим. Следующим фактом, которым можно подкрепить эту гипотезу, является случай $n = 1$, где $C_1^* = C_1$. Для $n = 2$ известно, что $C_2^* = 2/7$, а $C_2 \geq 2/7$. Возможно, в будущем эта гипотеза будет либо подтверждена, либо опровергнута.

2. Оценки для $n = 1$ и $n = 2$

Первые результаты по оценке константы наилучших диофантовых приближений были получены в XIX веке. В первую очередь, это общий результат полученный П. Г. Дирихле в 1842 году [10] для n линейных форм

Теорема 1. *Пусть $\alpha_{ij}(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ и Q – произвольные действительные числа, причем $Q > 1$. Тогда найдутся целые числа $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m$ и $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$ такие, что $1 \leq max\left(|q_1|,\ |q_2|, \ldots,\ |q_m|\right) < Q^{\frac{n}{m}}$ и*

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot q_j - p_i\right| \leq \frac{1}{Q}, \qquad (1 \leq i \leq n). \tag{4}$$

Доказательство. См. [38].□

откуда непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ и Q – произвольные действительные числа, причем $Q > 1$. Тогда найдется целое число q такое, что $1 \leq q < Q^n$ и*

$$\max_i \left(\|q\alpha_i\|_s\right) \leq \frac{1}{Q}.$$

Или же, что эквивалентно: существуют целые числа $p_1,\ ,p_2\ ,\ldots,\ p_n$ и q такие, что $1 \leq q < Q^n$ и

$$\max_i \left(\left|\alpha_i - \frac{p}{q}\right|\right) \leq \frac{1}{Qq} < \frac{1}{q^{1+\frac{1}{n}}}.$$

Из этой теоремы следует, что $C_n \geq 1$. Доказательство этих теорем основано на прицип Дирихле.

В 1891 году А. Гурвиц [15], используя теорию цепных дробей и теорию квадратичных иррациональностей, доказал следующую теорему.

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения*

- *Для любого иррационального числа α существует бесконечное множество различных рациональных чисел p/q, удовлетворяющих неравенству*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}.$$

- *Сформулированное выше утверждение становится неверным, если заменить $\sqrt{5}$ на любое число $A > \sqrt{5}$.*

Доказательство. См. [38].□

Это утверждение приводит к первому и единственному точному значению C_n. Это

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

При это равенство достигается, при приближении чисел из квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

В дальнейшем проводилось много исследований по вопросу обощения цепных дробей на многомерный, в частности двухмерный, случай. Первым, такие обощения рассмотрел Л. Эйлер [11] в 1775 г. В конце девятнадцатого века К. Г. Я. Якоби [16] разработал первый алгоритм, позволяющий разложить произвольный вектор в векторную цепную дробь. В начале двадцатого века А. О. Перрон в своей магистерской диссертации (1907 г.) исследовал этот алгоритм [29]. В их честь, он был назван алгоритмом Якоби-Перрона. Этот алгоритм достаточно хорошо исследован [4, 26, 20].

Позднее были получены другие алгоритмы обощения цепных дробей [33, 34, 35]. Однако, никакие из полученных алгоритмов не позволили получить оценки для C_2.

Для C_2, значительные результаты были получены в середине XX века.

В 1927 Ф. Фуртвенглер [12, 13] показал (см. 3), что $C_2 \geq \frac{1}{\sqrt{23}}$. Затем Дж. В. С. Касселс [6], используя результаты Г. Дэвенпорта [9] получил оценку $C_2 \geq \frac{2}{7}$.

Дальнейшие исследования по этому вопросы, во многом были посвященны определению классов чисел на которых достигается оценка $C_2(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2}{7}$. Это связано с тем, что оценка Дж. В. С. Касселса в этом вопросе не конструктивна. Для случая $n = 2$ были получены значительные результаты в этом направлении. Были детально иследован вопрос оценки

$$C_2^* = C(\alpha, \beta),$$

где α и β кубические иррациональности [1, 2, 8, 32]. Результатом этих исследований стала оценка $C_2^* = 2/7$, которая достигается для алгебраических целых чисел из чисто кубического поля $Q\left(2\cos\frac{2\pi}{7}\right)$ [8].

3. Оценка Ф. Фуртвенглера

В 1927 Ф. Фуртвенглер использую теорию алгебраических полей и произведя оценку дискриминанта произвольного алгебраичского поля [12, 13] получил следующую оценку

Теорема 4. *Пусть k положительное число меньшее $1/\sqrt{|\Delta|}$, где Δ – это наименьший по модулю дискриминант алгебраического поля степени $n+1$. Тогда, для любых действительных чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ неравества*

$$q\,|q\alpha_i - p_i|^n < k, \qquad i = \overline{1,n}$$

имеют бесконечное количество решений в целых числах $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ q$.

Доказательство. См. [12, 13].□

Из этого утверждения непосредственно следует, что

$$C_n \geq 1/\sqrt{|\Delta|}. \tag{5}$$

Например, для $n = 2$ наилучшая оценка достигается при $\Delta = -23$ [39] (дискриминант кубического поля порождаемого уравнением $x^3 - x^2 - 1 = 0$) и соотвествующая оценка равна $C_2 \geq 1/\sqrt{23}$. Для $n = 3$ наименьший по модулю дискриминант равен 117 [39] (дискриминант поля порождаемого уравнением $x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$) и соотвествующая оценка равна $C_3 \geq 1/\sqrt{117}$.

4. Оценки Г. Дэвенпорта и Дж. В. С. Касселса

4.1. Предварительные понятия из геометрии чисел

Напомним некоторые понятия из геометрии чисел [36].

Определение 1. *Функция* $F(\overline{x})$, *где* $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *называется лучевой, если*

- $F(\overline{x})$ *неотрицательна, то есть* $F(\overline{x}) \geq 0$;
- $F(\overline{x})$ *непрерывна;*
- $F(\overline{x})$ *однородна, то есть для любого* $t \geq 0$, $F(t\overline{x}) = tF(\overline{x})$.

Определение 2. *Пусть* $a_1, \ldots, a_n$ *– линейно независимые точки вещественного евклидова пространства. Множество всех точек*

$$x = u_1 a_1 + \ldots + u_n a_n$$

с целыми коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$ *называется решеткой* Λ. *Величина*

$$d(\Lambda) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$$

называется определителем решетки Λ.

Определение 3. *Пусть* $\mathbb{F}$ *– точечное тело. Если решетка* Λ *не имеет в* $\mathbb{F}$ *отличных от* $\mathbb{O}$ *точек* ($\mathbb{O} \in \mathbb{F}$), *то* Λ *допустима для* $\mathbb{F}$ *или* $\mathbb{F}$*-допустима. Точную нижнюю грань*

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ *всех* $\mathbb{F}$*-допустимых решеток* Λ *называют критическим определителем множества* $\mathbb{F}$. *Если* $\mathbb{F}$*-допустимых решеток нет, то* $\mathbb{F}$ *является множеством бесконечного типа и* $\Delta(\mathbb{F}) = \infty$.

Определение 4. *Под звездным телом понимают множество, обладающее следующими свойствами*

- *существует точка, называемая "началом", которая является внутренней точкой множества;*
- *любой луч, выходящий из "начала", либо не пересекается с границей множества, либо имеет с ней только одну общую точку.*

4.2. Предварительные рассуждения

Напомним, что нас интересует оценка константы C_n (2)

$$\max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n < C_n.$$

Заметим, что вместо минимизации выражения $\max\limits_{i=\overline{1,n}} |q\alpha_j - p_i|$ можно заняться минимизацией выражения $\sum\limits_{i=\overline{1,n}} (q\alpha_j - p_i)^2$ или $\prod\limits_{i=\overline{1,n}} |q\alpha_j - p_i|$. Все эти задачи можно объединить в следующей общей проблеме.

Проблема. *Пусть* $\Phi(x_1,\ldots,x_n)$ *– лучевая функция от* n *переменных. Каково наименьшее значение*

$$q\Phi^n(q\alpha_1 - p_1,\ldots,q\alpha_n - p_n)$$

для различных наборов $q>0$ *и* $p_1,\ldots,p_n$*?*

Пусть

$$D(\Phi,\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \lim\inf_{u_0\to\infty} u_0\Phi^n(u_0\alpha_1 - u_1,\ldots,u_0\alpha_n - u_n)$$

и

$$D(\Phi) = \sup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} D(\Phi,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$$

В середине двадцатого века Г. Дэвенпорт занимаясь проблемами геометрия чисел смог получить оценку сверху для $D(\Phi)$. Для этого он использовал свойства критических опеределителей решеток, сходимость функций и решеток.

Рассмотрим следующую лучевую функцию

$$F(x_0,\ldots,x_n) = (|x_0|\Phi^n(x_1 \operatorname{sign} x_0,\ldots,x_n \operatorname{sign} x_0))^{\frac{1}{n+1}}.$$

Пусть

$$\delta(F) = \sup_{\Lambda} \frac{F^{n+1}(\Lambda)}{d(\Lambda)},$$

где точная верхняя грань беретя по всем $(n+1)$-мерным решеткам. Тогда [36]

$$\delta(F) = \{\Delta\mathbb{F}\}^{-1},$$

где $\mathbb{F}$ это $(n+1)$-мерное звездное тело

$$\mathbb{F} : F(x_0,\ldots,x_n) < 1,$$

а $\Delta\mathbb{F}$ его критический определитель.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5 (Г. Дэвенпорт). *Пусть* Φ *и* F *связаны, как описано выше, тогда*

$$D(\Phi) \le \delta(F).$$

Доказательство. См. [36].□

4.3. Оценка Г. Дэвенпорта

Пусть

$$\Phi(x_1,\ldots,x_n) = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

и

$$F^{n+1}(x_0,\ldots,x_n) = |x_0| \max_{1\le i\le n} |x_i|^n.$$

Тогда согласно теореме 5

$$\sup_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n \le \delta(F).$$

Откуда

$$C_n \ge \delta(F) = \frac{1}{\Delta\mathbb{F}}$$

где $\mathbb{F}$ – это $(n+1)$-мерное звездное тело

$$\mathbb{F} : F(x_0, \ldots, x_n) < 1,$$

или же

$$|x_0| \max_{1 \le i \le n} |x_i|^n < 1, \tag{6}$$

а $\Delta\mathbb{F}$ – его критический определитель (в дальнейшем, будем обозначать его D_n). Это приводит нас к

Теорема 6.

$$C_n \ge \frac{1}{D_n}. \tag{7}$$

Доказательство. См. выше. □

4.4. Оценка Дж. В.С. Касселса

Однако вычисление D_n на практике оказалось очень сложно. Это во многом связано с тем, что звездное тело, для которого необходимо найти критический определитель негладкое. Вместо непосредственного вычисления D_n, Дж. В.С. Касселс [7] смог оценить сверху D_n используя дискриминант d произвольного алгебраического поля F степени n, и тем самым оценить снизу C_n.

Теорема 7. *Пусть*

$$f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^{s} |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i|. \tag{8}$$

и $2^n V_{n,s}$ объем наибольшего пареллелипипеда с центром в начале координат, содержащегося внутри фигуры

$$f_{n,s} \le 1. \tag{9}$$

Пусть $\Delta_{n,s}$ наименьшее абсолютное значение дискриминанта действительного поля степени $n+1$, которое имеет s пар комплексно-сопряженных алгебраических чисел (то есть $2s \le n+1$). Тогда

$$D_n \le \sqrt{\Delta_{n,s}}/V_{n,s}, \tag{10}$$

или же

$$C_n \ge V_{n,s}/\sqrt{\Delta_{n,s}}. \tag{11}$$

Доказательство. [7]

Пусть $M_1, \ldots, M_{n+1}$ это $(n+1)$ линейных форм от n переменных, такие что коэфициенты M_1 образуют базис F, коэффициенты остальных форм являются им сопряженными. Пусть $r + 2s = (n+1)$, и M_j и M_{s+j} $(1 \le j \le s)$ это комплексно-сопряженные формы, а $M_{2s+1}, \ldots, M_{n+1}$ – это r чисто действительных форм. Тогда

$$|M_1 \cdot \ldots \cdot M_{n+1}| \ge 1 \tag{12}$$

для произвольных действительных чисел, не всех равных нулю. Целочисленная решетка

$$x_{j-1} + ix_{s+j-1} = \sqrt{2} M_j \quad (1 \le j \le s) \qquad x_{j-1} = M_j \quad (2s+1 \le j \le n+1) \tag{13}$$

имеет определитель $d^{1/2}$ и не содержит отличных от нуля целых точек внутри (6). Так как $x_{j-1}^2 + x_{s+j-1}^2 = 2M_jM_{s+j} = 2|M_j|^2$ то

$$\max(|x_j|, |x_{s+j}|) \geq |M_j| = |M_{s+j}|.$$

Отсюда, непосредственно, следует, что $D_n \leq |d|^{1/2}$, что дает оценку Ф. Фуртвенглера (5).

Можно усилить эту оценку[7], используя неравенство

$$2^{-s}(x_0^2 + x_s^2) \cdot \ldots \cdot (x_{s-1}^2 + x_{2s-1}^2)|x_{2s} \cdot \ldots \cdot x_n| \geq 1, \tag{14}$$

которое получается из (12) и (13), для любых $x_0, \ldots, x_n$ не всех равных нулю. Пусть 2^nV это наибольший объем n-мерного параллелипипеда $|y_1| \leq 1, \ldots, |y_n| \leq 1$, лежащего внутри фигуры

$$2^{-s}(x_0^2 + x_s^2) \cdot \ldots \cdot (x_{s-1}^2 + x_{2s-1}^2)|x_{2s} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}| \leq 1, \tag{15}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ это линейные формы от $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Определитель решетки порожденной этими формами равен V^{-1} и в силу гомогенности, левая часть (15) всегда $\leq (\max\limits_{1 \leq i \leq n} |y_i|)^n$.

Отсюда, используя (14), получаем, что решетка $y_1, \ldots, y_n, x_n$ является допустимоя для области (6), откуда

$$D_n \leq V^{-1}|d|^{1/2}.$$

Это приводит нас к оценке (11)

$$C_n \geq \frac{V}{|d|^{1/2}}.$$

Теорема доказана. □

5. Известные результаты

Несложно показать, что $V_{2,0} = 2$ и $V_{2,1} = 1$. А так как наименьший дискриминант чисто действительного кубического поля равен 49 (для случая $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$), мы получаем оценку $C_2 \geq \frac{2}{7} (> \frac{1}{\sqrt{23}})$. Этот результат принадлежит Дж. В.С. Касселсу [6].

Оценка в случае $n = 3$ принадлежит Т. Кьюзику [7]. Он показал, что

$$V_{3,1} = 2; \qquad V_{3,0} \geq \frac{3^{3/2}}{2}.$$

Для этого он решил достаточно сложную трехмерную оптимизационную задачу, смог явно построить параллелипипед наибольшего объема $V_{3,1}$, и доказать его оптимальность.

Так как [22] $\Delta_{3,1} = 275, \Delta_{3,0} = 725$, то

$$C_3 \geq \frac{2}{\sqrt{275}} > \frac{3^{3/2}}{2\sqrt{725}}.$$

С. Красс [18, 19] показал, что

$$V_{4,2} \geq \frac{16}{9}; \qquad V_{4,1} \geq 2; \qquad V_{4,0} \geq 4.$$

При оценке $V_{4,2}$ С. Красс не пошел путем Т. Кьюзика, и лишь предъявил параллелипипед, доказав, что он удовлетворяет необходимым условиям. То есть, его оценка допускает возможность улучшения.

Так как [14] $\Delta_{4,2} = 1609, \Delta_{4,1} = 4511, \Delta_{4,0} = 14641$, то

$$C_4 \geq \frac{16}{9\sqrt{1609}} > \frac{4}{\sqrt{14641}} > \frac{2}{\sqrt{4511}}.$$

Ему же принадлежат и более общие оценки [18]

$$V_{n,[n/2]} \leq V_{n,[n/2]-1} \leq \ldots \leq V_{n,0}$$

$$V_{n,s}V_{n',s'} \leq V_{n+n',s+s'} \tag{16}$$

откуда (так как $V_{4,2} \geq \frac{16}{9}$) может быть улучшена оценка Ф. Фуртвенглера (5) для $C_n (n \geq 4)$

$$C_n \geq \frac{V_{n,[n/2]}}{\sqrt{\Delta_{n+1}}} \geq \frac{(16/9)^{[n/4]}}{\sqrt{\Delta_{n+1}}} > \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n+1}}}. \tag{17}$$

Также С. Красс [19] приводит численную оценку

$$V_{5,2} \geq 2.3932\ldots$$

6. Другие оценки константы наилучших диофантовых приближений

До этого мы рассматривали оценки C_n снизу. Рассмотрим так же, и известные результаты по оценке константы C_n сверху [37].

В 1896 году Г. Минковский используя геомертию чисел [23] получил оценку

$$C_n \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{1}{e}, \quad n \to \infty.$$

В 1914 году Г. Ф. Блихфельдт сформулировав понятие фундаметального параллелепипеда и совместив его с подходом Г. Минковского [5] улучшил его результат, доказав, что

$$C_n \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}} \sim \frac{1}{e + \frac{1}{e}}, \quad n \to \infty.$$

В 1948 году П. Мюллендер [25], развивая метод Г. Ф. Блихфельдта и обобщая конструкции Л. Дж. Морделла [24] и Коксмы–Меленбелда [17], получил оценку

$$C_n \leq \frac{1}{\beta}, \quad \beta = 25/8 + o(1), \quad n \to \infty.$$

Вместо выбора конкретных точек для применения оценки Г. Минковского, как у Г. Ф. Блихфельдт, П. Мюллендер построил условия неоходимые для применения оценки Г. Минковского и поставил задачей найти такие точки, в корых оценка будет наилучшей.

Следующий результат принадлежит В. Спону (1967) [30]; усиливая оценки П. Мюллендера (в основном технически), он доказал, что

$$C_n \leq \frac{1}{\beta_n}, \quad \beta_n \geq n \cdot 2^{n+1} \int\limits_0^1 \frac{u^{n-1}du}{(1+u)^n + (1+u^n)} \sim \pi, \quad n \to \infty.$$

В своей работе В. Спон предполагает [37], что этот последний результат представляет собой наилучшую оценку, которая может быть получена с помощью теоремы Минковского о выпуклом теле и подхода Блихфельдта.

Позднее В. Г. Новак [28] предложил конструкцию, которая позволяет улучшить результат Спона и добавить в правой части положительную величину ϵ_n

$$C_n \leq \frac{1}{\beta_n}, \quad \beta_n \geq n \cdot 2^{n+1} \int\limits_0^1 \frac{u^{n-1} du}{(1+u)^n + (1+u^n)} + \epsilon_n.$$

Оценки для ϵ_n получены, например, в [37].

В случае небольших размерностей существуют и более точные оценки. Например, используя оценки критических опеределителей некоторых звездных тел Дж. Макк и В. Г. Новак [21, 27] получили результат $C_2 \leq \left(\frac{8}{13}\right)^2$.

7. Заключение

Задача оценки константы наилучших диофантовых приближений имеет богатую историю. Однако с течением времени подходы, применяемые для решения этой задачи притерпели серьезные изменения. Из алгебры (П. Г. Дирихле [10], А. Гурвиц [15], Ф. Фуртвенглер [12, 13]) это задача перешла в область геометрии чисел (Г. Дэвенпорт [9], Дж. В. С. Касселс [6]).

Фундаментальный результат Г. Дэвенпорта (теорема 5) имеет огромный потенциал, который раскрыт на данный момент лишь частично (Дж. В. С. Касселс, теорема 7). Современные вычислительные возможности, в том числе и в области компьютерной алгебры предоставляют широкие возможности для решения переборных задач, которой является задача оценки критического определителя. Такие подходы позволят существеннно усилить значения оценок C_n, что было невозможно представить в середине двадцатого века.

С другой стороны, развитие идей Дж. В. С. Касселса с оценкой $V_{n,s}$ во многом переводит задачу в вычислительную плоскость (Т. Кьюзик [7], С. Красс [18]). С другой стороны, как уже отмечалось выше, развитие систем компьютерной алгебры, позволяет упростить решение этой задачи [3].

В тоже время, нельзя забывать, что полученные таким образом оценки будут уступать результатам, которые можно получить используя напрямую подход Г. Дэвенпорта (это не посредственно следует из теоремы 7). Поэтому нам кажется перспективным, развитие подхода Г. Дэвенпорта и в частности исследования, связаные с поиском других методов оценки значения критического определителя звездного тела $\mathbb{F}$ заданного формулой (6).

Другой интересной составляющей данной проблематики, является обнаруженная тесная взаимосвязь диофантовых приближений с геометрией чисел вообще, и алгебраическими решетками в частности (Дж. В. С. Касселс [6], А. Д. Брюно [33, 34, 35]). Это уже дало новые возможности, как для применения уже известных результатов, так и для применения новых подходов в проблеме наилучших диофантовых приближений (А. Д. Брюно[33, 34, 35], Н. Г. Мощевитин [37]. По всей видимости, в будующем взаимосвязь между этими направлениями будет только усиливаться.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams W. W. Simultaneous Diophantine approximations and cubic irrationals // Pacific journal of mathematics. 1969. Vol. 30(1). P. 1-14.

2. Adams W. W. The best two-dimensional diophanite approximation constant for cubic irrtionals // Pacific journal of mathematics. 1980. Vol. 91(1). P. 29-30.

3. Basalov Yu. A. On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation // arXiv.org. 2018. Дата обновления: 15.04.2018. URL: https://arxiv.org/abs/1804.05385 (дата обращения: 05.05.2018).

4. Bernstein L. A 3-Dimensional Periodic Jacobi-Perron Algorithm of Period Length 8 // Journal of Number Theory. 1972. Vol. 4(1). P. 48-69.

5. Blichfeldt H. A new principle in the geometry of numbers, with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1914. Vol. 15. P. 227-235.

6. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119-121.

7. Cusick J. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12(4). P. 543-556

8. Cusick J. W. The two dimensional diophanite approximation constant // Pacific journal of mathematics. 1983. Vol. 105(1). p.53-67.

9. Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186-195

10. Dirichlet L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1842. P. 93-95.

11. Euler L. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda // Petersburger Akademie Notiz. Exhib. August 14, 1775 // Commentationes arithmeticae collectae. 1849. Vol. II. P. 99-104.

12. Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I // Math. Ann. 1927. Vol. 96. P. 169-175;

13. Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II // Math. Ann. 1928. Vol. 99. P. 71-83.

14. Hunter J. The minimum discriminant of quintic fields // Proc. Glasgow Math. Assoc. 1957. Vol. 3, P. 57-67.

15. Hurwitz A. Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationaleBriiche // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 279-284.

16. Jacobi C. G. J. Allgemeine Theorie der Kettenbruchanlichen Algorithmen, in welchenjede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird // J. Reine Angew. Math. 1868. Vol. 69. P. 29-64. // Gesammelte Werke. 1891. Vol. IV. P. 385-426.

17. Koksma J., Meulenbeld B. Sur le theoreme de Minkowski, concernant un systeme de formes lineaires reelles. I, II, III, IV // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1942. Vol. 45. P. 256-262, 354-359, 471-478, 578-584.

18. Krass S. Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // J. Number Theory. 1985. Vol. 20(2). P. 172-176

19. Krass S. The N-dimensional diophantine approximation constants // Australian Mathematical Society. 1985. Vol 32(2). P. 313-316

20. Lanker M., Petek P., Rugeji M. S. The continued fractions ladder of specific pairs of irrationals // arXiv.org. 2011. Дата обновления: 30.07.2011. URL: https://arxiv.org/abs/1108.0087 (дата обращения: 05.05.2018).

21. Mack J. M. Simultaneous Diophantine approximation // J. Austral. Math. Soc. A. 1977. Vol. 24. P. 266-285.

22. Mayer J. Die absolut-kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkorper // S.-B. Akad. Wiss. Wien Abt. Ila. 1929. Vol. 138. P. 733-742.

23. Minkovski H. Geometrie der Zahlen. Berlin: Teubner, 1896.

24. Mordell L. Lattice points in some n-dimensional non-convex regions. I, II // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1946. Vol. 49. P. 773-781, 782-792.

25. Mullender P. Lattice points in non-convex regions. I // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1948. Vol. 51. P. 874-884.

26. Murru N. On the Hermite problem for cubic irrationaliti // arXiv.org. 2014. Дата обновления: 16.01.2014. URL: https://arxiv.org/abs/1305.3285 (дата обращения: 05.05.2018).

27. Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // Manuscr. Math. 1981. Vol. 36. P. 33-46.

28. Nowak W. G. A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants // Graz. Math. Ber. 1993. Vol. 318. P. 105-110.

29. Perron O. Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Ketten-bruchalgorithmus // Math. Ann. 1907. Vol. 64. P. 1-76.

30. Spohn W. G. Blichfeldt's theorem and simultaneous Diophantine approximation // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. P. 885-894.

31. Szekers G. The n-dimensional approximation constant // Bull. Austral. Math. Soc. 1984. Vol. 29. P. 119-125.

32. Woods A. C. The asymetric product of three homogenous linear forms // Pacific J. Math. 1981. Vol. 93. P. 237–250.

33. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // Препринт № 45 ИПМ им. М.В.Келдыша. 2004. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2004-45 (дата обращения: 05.05.2018).

34. Брюно А. Д. Структура наилучших диофантовых приближений // ДАН. 2005. Т. 402, вып. 4. С. 439-444.

35. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // ДАН. 2005. Т. 402, вып. 6. С. 732-736.

36. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.

37. Мощевитин. Н. Г. К теореме Блихфельдта-Мюллендера-Спона о совместных приближениях // Тр. МИАН, 2002, том 239, с. 268-274

38. Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

39. A Database for Number Fields // A Database for Number Fields. URL: http://galoisdb.math.upb.de/ (дата обращения: 05.05.2018).

REFERENCES

1. Adams W. W. 1969, "Simultaneous Diophantine approximations and cubic irrationals", *Pacific journal of mathematics*, Vol. 30, No. 1, pp. 1-14.

2. Adams W. W. 1980, "The best two-dimensional diophanite approximation constant for cubic irrationals", *Pacific journal of mathematics*, Vol. 91, No. 1, pp. 29-30.

3. Basalov Yu. A. 2018, "On estimating the constant of simultaneous Diophantine approximation", Available at: https://arxiv.org/abs/1804.05385.

4. Bernstein L. 1972, "A 3-Dimensional Periodic Jacobi-Perron Algorithm of Period Length 8", *Journal of Number Theory*, Vol. 4, Issue 1, pp. 48-69.

5. Blichfeldt H. 1914, "A new principle in the geometry of numbers, with some applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 15, pp. 227-235.

6. Cassels J. W. S. 1955, "Simultaneous Diophantine approximation", *J. London Math. Soc.*, Vol. 30, pp. 119-121.

7. Cusick J. W. 1980, "Estimates for Diophantine approximation constants", *Journal of Number Theory* , Vol. 12, Issue 4, pp. 543-556.

8. Cusick J. W. 1983, "The two dimensional diophanite approximation constant", *Pacific journal of mathematics* , Vol. 105, No. 1, pp. 53-67.

9. Davenport. H. 1955, "On a theorem of Furtwängler", *J. London Math. Soc.* , Vol. 30, pp. 186-195.

10. Dirichlet L. G. P. 1842, "Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen", *S. B. Preuss. Akad. Wiss.* , pp. 93-95.

11. Euler L. 1849, "De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda", *Petersburger Akademie Notiz. Exhib. August 14, 1775 Commentationes arithmeticae collectae*, Vol. II, pp. 99-104.

12. Furtwängler H. 1927, "Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I", *Math. Ann.*, Vol. 96, pp. 169-175.

13. Furtwängler H. 1928, "Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II", *Math. Ann.*, Vol. 99, pp. 71-83.

14. Hunter J. 1957, "The minimum discriminant of quintic fields", *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, Vol. 3, pp. 57-67.

15. Hurwitz A. 1891, "Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationaleBriiche", *Math. Ann.*, Vol. 39, pp. 279-284.

16. Jacobi C. G. J. 1891, "Allgemeine Theorie der Kettenbruchanlichen Algorithmen, in welchenjede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird", *J. Reine Angew. Math., 1868. Vol. 69, pp. 29-64. Gesammelte Werke* , Vol. IV, pp. 385-426.

17. Koksma J., Meulenbeld B. 1942, "Sur le theoreme de Minkowski, concernant un systeme de formes lineaires reelles. I, II, III, IV", *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci.*, Vol. 45, pp. 256-262, 354-359, 471-478, 578-584.

18. Krass S. 1985, “Estimates for n-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$“, *J. Number Theory* , Vol. 20, Is. 2, pp. 172-176.

19. Krass S. 1985, “The N-dimensional diophantine approximation constants“, *Australian Mathematical Society* , Vol. 32, Is. 2, pp. 313-316.

20. Lanker M., Petek P., Rugeji M. S. 2011, “The continued fractions ladder of specific pairs of irrationals“, Available at: https://arxiv.org/abs/1108.0087

21. Mack J. M. 1977, “Simultaneous Diophantine approximation“, *J. Austral. Math. Soc. A.*, Vol. 24, pp. 266-285.

22. Mayer J. 1929, “Die absolut-kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkorper“, *S.-B. Akad. Wiss. Wien Abt. Ila.* Vol. 138, pp. 733-742.

23. Minkovski H. 1896, *Geometrie der Zahlen* Teubner, Berlin.

24. Mordell L. 1946, “Lattice points in some n-dimensional non-convex regions. I, II“, *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci.*, Vol. 49, pp. 773-781, 782-792

25. Mullender P. 1948, “Lattice points in non-convex regions. I“, *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci.*, V. 51, pp. 874-884.

26. Murru N. 2013, “On the Hermite problem for cubic irrationaliti“, Available at: https://arxiv.org/abs/1305.3285v3.

27. Nowak W. G. 1981, “A note on simultaneous Diophantine approximation“, *Manuscr. Math.*, Vol. 36, pp. 33-46.

28. Nowak W. G. 1993, “A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants“, *Graz. Math. Ber.*, Vol. 318. pp. 105-110.

29. Perron O. 1907, “Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Ketten-bruchalgorithmus“, *Math. Ann.*, Vol. 64. pp. 1-76.

30. Spohn W. G. 1968, “Blichfeldt’s theorem and simultaneous Diophantine approximation“, *Amer. J. Math.*, Vol. 90, pp. 885-894.

31. Szekers G. 1984, “The n-dimensional approximation constant“, *Bull. Austral. Math. Soc*, Vol. 29, pp. 119-125.

32. Woods A. C. 1981, “The asymetric product of three homogenous linear forms“, *Pacific J. Math.*, Vol. 93, pp. 237-250.

33. Bruno A. D. 2004, “Algorithm of the generalized continued fraction“, *Preprint No. 45. Institute of Applied Mathematics of M. V. Keldysh* Available at: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2004-45

34. Bruno A. D. 2005, “Структура наилучших диофантовых приближений“, *Reports of the Academy of Sciences*, Vol. 402, No. 4, pp. 439-444.

35. Bruno A. D. 2005, “Algorithm of the generalized continued fraction“, *Reports of the Academy of Sciences*, Vol. 402, No. 6, 732-736.

36. Cassels J. W. S. 1965, *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Mir.

37. Moshchevitin N. G. 2002, “To the Blichfeldt-Mullender-Spohn theorem on simultaneous approximations“, *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, Vol. 239, pp. 268-274

38. Schmidt W. M. 1983, *Diophantine Approximation*, Mir.

39. A Database for Number Fields. Available at: http://galoisdb.math.upb.de/

Получено 08.05.2018
Принято в печать 17.08.2018