ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-376-387

Вполне разложимые однородные факторно делимые абелевы группы

Гордеева Екатерина Вячеславовна — Московский педагогический государственный университет.
e-mail: katrin.gord@me.com
Фомин Александр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, Московский педагогический государственный университет.
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Аннотация

Изучение абелевых групп без кручения конечного ранга было начато в работах Л.С. Понтрягина [1], А.Г. Куроша [2], А.И. Мальцева [3], Д. Дерри [4], Р. Бэра [5], Р. Бьюмонта и Р. Пирса [6,7]. В частности, Бьюмонт и Пирс в [6] ввели понятие факторно делимой группы без кручения. Понятие факторно делимой группы было расширено на случай смешанных групп в работе [8]. В этой же работе [8] было доказано, что категория смешанных факторно делимых групп с квазигомоморфизмами является двойственной категории групп без кручения конечного ранга также с квазигомоморфизмами. Новая версия категории [8] была получена в [9, 10]. Категории групп с квазигомоморфизмами были заменены на категории групп с отмеченными базисами и с обычными гомоморфизмами такими, что их матрицы относительно отмеченных базисов состоят из целых чисел. Двойственность [8] была также расширена в статье С. Бреаза и Ф. Шультца [11] на класс самомалых групп. Смешанные факторно делимые группы, также как и самомалые группы, находятся в настоящее время в фокусе внимания [12-35].

В данной статье мы доказываем две теоремы об однородных вполне разложимых факторно делимых смешанных группах. В первой теореме мы показываем, что для любого базиса такой группы существует разложение этой группы в прямую сумму групп ранга 1 такое, что элементы данного базиса сами являются базисами в соответствующих группах ранга 1. Более того, для любых двух базисов такие разложения изоморфны. Во второй теореме мы показываем, что любая точная последовательность смешанных факторно делимых групп $0 \to B \to A \to C \to 0$ расщепляется, если группа A является однородной вполне разложимой. Эта теорема является дуализацией следующего классического результата Бэра. Любая сервантная подгруппа однородной вполне разложимой группы без кручения конечного ранга выделяется прямым слагаемым в этой группе.

Ключевые слова: абелевы группы, прямые разложения, двойственные категории.

Библиография: 37 названий.

Для цитирования:
Е. В. Гордеева, А. А. Фомин. Вполне разложимые однородные факторно делимые абелевы группы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 376–387.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-376-387

Completely decomposable homogeneous quotient divisible abelian groups

Gordeeva Ekaterina Vyacheslavovna — Moscow State Pedagogical University.
e-mail: katrin.gord@me.com
Fomin Aleksandr Aleksandrovich — Doctor of physico-mathematical sciences, Professor, Moscow State Pedagogical University.
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

Abstract

L.S. Pontryagin [1], A.G. Kurosh [2], A.I. Mal'cev [3], D. Derry [4], R. Baer [5], R. Beaumont and R. Pierce [6,7] began research on abelian torsion free groups of finite rank. In particular, R. Beaumont and R. Pierce [6] introduced the notion of the quotient divisible torsion free group. The notion of quotient divisible group was extended to the case of mixed groups in the work [8]. It was also proved in [8] that the category of quotient divisible mixed groups with quasi-homomorphisms was dual to the category of torsion-free finite-rank groups with quasi-homomorphisms. A modern version of the duality [8] was obtained in [9, 10]. The categories of groups with quasi-homomorphisms were replaced by the categories of groups with marked bases and with usual homomorphisms such that their matrices with respect to the marked bases consisted of integers. The duality [8] was also extended by S. Breaz and P. Schultz [11] on the class of self-small groups. The mixed quotient divisible groups as well as the self-small groups are in the focus of attention now [12-35].

In the present paper we prove two theorems about homogeneous completely decomposable quotient divisible mixed groups. In the first theorem we show that for every basis of such group there exists a decomposition of this group into a direct sum of rank-1 groups such that the elements of the basis are the bases of the corresponding rank-1 groups. Moreover, for every two bases such decompositions are isomorphic. In the second theorem we show that every exact sequence of quotient divisible groups $0 \to B \to A \to C \to 0$ is splitting, if the group A is homogeneous completely decomposable. This theorem is a dual version of the following classic result by R. Baer. Every pure subgroup of a homogeneous completely decomposable torsion free group of finite rank is a direct summand of this group.

Keywords: abelian groups, direct decompositions, dual categories.

Bibliography: 37 titles.

For citation:
E. V. Gordeeda, A. A. Fomin. 2018, "Completely decomposable homogeneous quotient divisible abelian groups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2. P. 376–387.

1. Введение

Все рассматриваемые группы являются абелевыми. $Z, Q, \widehat{Z}_p$ обозначают соответственно кольца целых, рациональных и целых p-адических чисел. Кольцо полиадических чисел $\widehat{Z} = \prod\limits_p \widehat{Z}_p$ - это произведение колец целых p-адических чисел по всем простым числам p. Z_n - кольцо классов вычетов по модулю n.

Под характеристикой $\chi = (m_p)$ понимается любая последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞, занумерованная всеми простыми числами. Для каждой характеристики $\chi = (m_p)$ определяется кольцо $Z_\chi = \prod\limits_p K_p$ как произведение по всем простым числам p колец K_p, где $K_p = Z_{p^{m_p}}$ при $m_p < \infty$ или $K_p = \widehat{Z}_p$ при $m_p = \infty$.

Две характеристики называются эквивалентными, если они различаются не более чем для конечного числа конечных компонент. Класс эквивалентности характеристики называется типом (Бэра). Классическая теорема Р. Бэра [5] утверждает, что абелевы группы без кручения ранга 1 с точностью до изоморфизма находятся во взаимно однозначном соответствии с типами.

Абелева группа A называется факторно делимой, если она содержит свободную подгруппу F конечного ранга такую, что факторгруппа A/F является периодической делимой группой. При этом сама группа A не содержит делимых периодических подгрупп. Свободный базис группы F называется базисом факторно делимой группы A. Ранг группы F называется рангом факторно делимой группы A.

Для всякой характеристики $\chi = (m_p)$ определим группу R^χ следующим образом. Если характеристика χ относится к ненулевому типу, то группа R^χ состоит из всех элементов $a \in Z_\chi$, для которых существует пара целых чисел $n \neq 0$ и m такая, что $na = m1$, где 1 - единица кольца Z_χ. Если характеристика χ относится к нулевому типу, то все ее компоненты равны нулю кроме конечного числа простых чисел $p_1, \ldots, p_k$, для которых соответствующие компоненты $m_1, \ldots, m_k$ являются конечными. Тогда характеристике χ соответствует целое число $n = p_1^{m_1} \ldots p_k^{m_k}$ и мы определяем $R^\chi = Z_n \oplus Q$. Факторно делимые группы ранга 1 были описаны О.И. Давыдовой в [12, 13].

Теорема (Давыдова) Все группы вида R^χ являются факторно делимыми группами ранга 1. Любая факторно делимая группа ранга 1 изоморфна группе R^χ для некоторой характеристики χ.

Пусть a - элемент группы A. Для каждого простого числа p обозначим через m_p наименьшее целое неотрицательное число, для которого элемент $p^{m_p}a$ делится в группе A на любую степень числа p. Если такого числа не существует, то полагаем $m_p = \infty$. Мы получаем характеристику (m_p), которая называется кохарактеристикой элемента a в группе A и обозначается $cochar(a) = (m_p)$. Если a - базисный элемент факторно делимой группы A ранга 1, то для любого элемента $x \in A$ имеет место неравенство $cochar(x) \leq cochar(a)$, в частности кохаракеристики различных базисных элементов факторно делимой группы ранга 1 одинаковы. Кохарактеристикой факторно делимой группы ранга 1 называется кохарактеристика ее базисного элемента, имеем $cochar(R^\chi) = \chi$.

Мы понимаем Z-адическое пополнение $\widehat{A}$ группы A как обратный предел следующего обратного спектра гомоморфизмов

$$\pi_n^m : A/mA \to A/nA$$

для всех пар (m, n) натуральных чисел таких, что число n является делителем числа m. Здесь $\pi_n^m(a + mA) = a + nA$. Элемент $a = (a_1, a_2, \ldots)$ группы $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A/nA$ называется сетью, если $\pi_n^m(a_m) = a_n$ для любой пары (m, n) натуральных чисел такой, что n делит m. Легко видеть, что все сети составляют подгруппу группы $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A/nA$. Эта подгруппа $\widehat{A}$ является обратным пределом данного спектра, то есть Z-адическим пополнением группы A. Для любого элемента $a \in A$, последовательность $\mu(a) = (a + A, a + 2A, a + 3A, \ldots)$ является сетью. Таким образом мы получаем естественный гомоморфизм $\mu : A \to \widehat{A}$, который мы также называем Z-адическим пополнением группы A. Заметим, что кольцо полиадических чисел $\widehat{Z}$ является Z-адическим пополнением кольца целых чисел Z, а пополнение $\widehat{A}$ любой группы A является также модулем над кольцом $\widehat{Z}$. Для всякой характеристики χ имеем $\widehat{R^\chi} = Z_\chi$.

Если $a_1, \ldots, a_n$ - элементы модуля M над коммутативным кольцом R, то $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle_R$ обозначает подмодуль, порожденный данными элементами, $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ - подгруппа, порожденная этими элементами, $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle_*$ - сервантная оболочка этих элементов, которая состоит из таких элементов $a \in M$, для которых существует целое число $m \neq 0$, при котором $ma \in \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$.

Все остальные определения и обозначения стандартны и соответствуют книге [36].

2. Основной текст статьи

Определение 1. *Факторно делимая группа A называется вполне разложимой, если она раскладывается в прямую сумму факторно делимых групп ранга 1. Если все эти факторно делимые группы ранга 1 изоморфны между собой, то есть определяются одной и той же кохарактеристикой χ, то группа A называется однородной вполне разложимой факторно делимой группой кохарактеристики χ. Таким образом, однородная вполне разложимая факторно делимая группа $A \cong \bigoplus\limits_n R^\chi$ полностью определяется своим рангом n и кохарактеристикой χ.*

Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где $A_1, \ldots, A_n$ - факторно делимые группы ранга 1, и $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$ - базисы этих факторно делимых групп ранга 1. Тогда группа A сама является факторно делимой и, очевидным образом, элементы $a_1, \ldots, a_n$ составляют базис факторно делимой группы A.

Теорема 1. *Пусть A - факторно делимая вполне разложимая однородная группа ранга n и кохарактеристики $\chi = (m_p)$, то есть $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $A_1 \cong \ldots \cong A_n \cong R^\chi$, и $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$ - базисы этих факторно делимых групп ранга 1.*

Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ - произвольный базис факторно делимой группы A, тогда существуют подгруппы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ группы A, такие что:

1. *Группы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ являются факторно делимыми группами ранга 1 кохарактеристики χ;*
2. *Элемент b_i принадлежит группе B_i и является базисом факторно делимой группы B_i для любого $i = 1, 2, \ldots, n$;*
3. *$A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_n$.*

Доказательство. Рассмотрим Z-адическое пополнение $\mu : A \to \widehat{A}$ группы A. Обозначим $a^\circ = \mu(a)$ для элементов $a \in A$. $\widehat{Z}$-модуль $\widehat{A} = \langle a_1^\circ\rangle_{\widehat{Z}} \oplus \ldots \oplus \langle a_n^\circ\rangle_{\widehat{Z}} = a_1^\circ Z_\chi \oplus \ldots \oplus a_n^\circ Z_\chi$ является также свободным модулем над кольцом Z_χ. Из равенства $\alpha_1 a_1^\circ + \ldots + \alpha_n a_n^\circ = 0$ следует, что все коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Z_\chi$ равны нулю. В силу этого, отображение $a_1^\circ \mapsto b_1^\circ, \ldots, a_n^\circ \mapsto b_n^\circ$ продолжается до Z_χ-модульного эндоморфизма $f : \widehat{A} \to \widehat{A}$. Покажем, что эндоморфизм $f : \widehat{A} \to \widehat{A}$ является автоморфизмом.

По теореме о вложении (Теорема 3.3 в [15]) $\widehat{Z}$-модуль $\widehat{A}$ порождается элементами $b_1^\circ, \ldots, b_n^\circ$, так как элементы $b_1, \ldots, b_n$ составляют базис факторно делимой группы A. Следовательно, гомоморфизм $f : \widehat{A} \to \widehat{A}$ является сюръективным отображением. Осталось доказать его инъективность.

Заметим, что Z-адическое пополнение любой группы раскладывается в прямое произведение p-адических пополнений по всем простым числам p, $\widehat{A} = \prod\limits_p \widehat{A}_p$. Если обозначить через $\varepsilon_p \in \widehat{Z} = \prod\limits_q \widehat{Z}_q$ полиадический идемпотент, у которого p-компонента равна единице, а остальные компоненты равны нулю, то мы получаем $\widehat{A}_p = \varepsilon_p \widehat{A}$. В нашем случае при характеристике $\chi = (m_p)$ p-адическое пополнение группы A имеет вид $\widehat{A}_p = \varepsilon_p a_1^\circ K_p \oplus \ldots \oplus \varepsilon_p a_n^\circ K_p$, где $K_p = Z_{p^{m_p}}$, если $m_p < 0$, или $K_p = \widehat{Z}_p$, если $m_p = \infty$. При этом $\widehat{A}_p$ является свободным K_p-модулем со свободным базисом $\varepsilon_p a_1^\circ, \ldots, \varepsilon_p a_n^\circ$. Эндоморфизм $f : \widehat{A} \to \widehat{A}$ индуцирует эндоморфизмы $\widehat{Z}_p$-адических модулей $f_p : \widehat{A}_p \to \widehat{A}_p$ для всех простых чисел p. Так как элементы $b_1^\circ, \ldots, b_n^\circ$ порождают $\widehat{Z}$-модуль $\widehat{A}$, то элементы $\varepsilon_p b_1^\circ, \ldots, \varepsilon_p b_n^\circ$ порождают K_p-модуль $\widehat{A}_p$ для каждого простого числа p. Поэтому все гомоморфизмы $f_p : \widehat{A}_p \to \widehat{A}_p$ сюръективны. Рассмотрим два случая. В первом случае, $m_p < \infty$, сюръективность гомоморфизма $f_p : \widehat{A}_p \to \widehat{A}_p$ равносильна его инъективности и биективности в силу конечности модуля $\widehat{A}_p$. Во втором случае, $m_p = \infty$, сюръективность гомоморфизма $f_p : \widehat{A}_p \to \widehat{A}_p$ также влечет его инъективность. Действительно, элементы $\varepsilon_p b_1^\circ, \ldots, \varepsilon_p b_n^\circ$ линейно выражаются с целыми p-адическими коэффициентами через элементы $\varepsilon_p a_1^\circ, \ldots, \varepsilon_p a_n^\circ$, то есть имеет место матричное равенство

$$(f(\varepsilon_p a_1^\circ), \ldots, f(\varepsilon_p a_n^\circ)) = (\varepsilon_p b_1^\circ, \ldots, \varepsilon_p b_n^\circ) = (\varepsilon_p a_1^\circ, \ldots, \varepsilon_p a_n^\circ) M_p,$$

где M_p - некоторая матрица размера $n \times n$ с целыми p-адическими элементами. Но так как элементы $\varepsilon_p b_1^\circ, \ldots, \varepsilon_p b_n^\circ$ порождают $\widehat{Z}_p$-модуль $\widehat{A}_p$, то аналогичным образом имеет место матричное равенство

$$(\varepsilon_p a_1^\circ, \ldots, \varepsilon_p a_n^\circ) = (\varepsilon_p b_1^\circ, \ldots, \varepsilon_p b_n^\circ) N_p$$

для некоторой матрицы N_p размера $n \times n$ с целыми p-адическими элементами. Из этих двух равенств следует равенство $(\varepsilon_p a_1^\circ, \ldots, \varepsilon_p a_n^\circ) = (\varepsilon_p a_1^\circ, \ldots, \varepsilon_p a_n^\circ) M_p N_p$, которое означает, что матрицы M_p и N_p являются взаимно обратными. Обратимость матрицы M_p в свою очередь означает обратимость гомоморфизма $f_p : \widehat{A}_p \to \widehat{A}_p$. Так как $\widehat{Z}_p$-модульные гомоморфизмы $f_p : \widehat{A}_p \to \widehat{A}_p$ обратимы для всех простых чисел p, то и $\widehat{Z}$-модульный гомоморфизм $f : \widehat{A} \to \widehat{A}$ обратим, то есть является автоморфизмом.

Если характеристика χ относится к ненулевому типу, то гомоморфизм Z-адического пополнения $\mu : A \to \widehat{A}$ является мономорфизмом и мы можем осуществить отождествление вдоль него так, что $a^\circ = a$ для любого элемента $a \in A$. Тогда получим, что группа A совпадает с сервантной оболочкой любого своего базиса в аддитивной группе $\widehat{A}$, более детально см. [15]. Таким образом, мы имеем $A = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_* = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle_* \subset \widehat{A}$. Автоморфизм f модуля $\widehat{A}$ индуцирует групповой автоморфизм $f : A \to A$, при котором $f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_n) = b_n$. Полагая $B_1 = f(A_1), \ldots, B_n = f(A_n)$, мы получаем все три утверждения теоремы.

Если характеристика χ относится к нулевому типу, то $R^\chi = Z_m \oplus Q$ и $Z_\chi = Z_m$ для некоторого целого положительного числа m. Группа A имеет вид $A \cong Z_m^n \oplus V$, где $\widehat{A} \cong Z_m^n$, а V - это векторное прстранство над полем рациональных чисел размерности n. В этом случае наши элементы имеют вид $a_1 = a_1^\circ + v_1, \ldots, a_n = a_n^\circ + v_n; b_1 = b_1^\circ + u_1, \ldots, b_n = b_n^\circ + u_n$, где $v_1, \ldots, v_n$ и $u_1, \ldots, u_n$ - два базиса векторного пространства V. Как это было сделано выше, мы строим автоморфизм $f : \widehat{A} \to \widehat{A}$, при котором $f(a_1^\circ) = b_1^\circ, \ldots, f(a_n^\circ) = b_n^\circ$. Потом мы его расширяем до автоморфизма группы A, определяя так, что $f(v_1) = u_1, \ldots, f(v_n) = u_n$. Получаем автоморфизм $f : A \to A$, при котором $f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_n) = b_n$. Подгруппы $B_1 = f(A_1), \ldots, B_n = f(A_n)$ удовлетворяют всем трем утверждениям теоремы, что завершает доказательство. $\square$

Следствие 1. *Пусть $a \in A$ элемент вполне разложимой однородной факторно делимой группы кохарактеристики χ. Тогда:*

- *$cochar(a) \leq \chi$.*
- *Если элемент a принадлежит какому-либо базису факторно делимой группы A, то $cochar(a) = \chi$.*

Следствие 2. *Пусть A вполне разложимая однородная факторно делимая группа. Тогда для любых двух базисов $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ факторно делимой группы A существует автоморфизм $f : A \to A$, при котором $f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_n) = b_n$.*

Нашей задачей теперь является перенос на случай смешанных факторно делимых групп классического результата Р. Бэра [5] о том, что любая сервантная подгруппа вполне разложимой однородной группы без кручения конечного ранга выделяется прямым слагаемым, см. [36] Лемма 86.8.

Прежде всего заметим, что сервантная подгруппа однородной вполне разложимой факторно делимой группы не обязательно выделяется прямым слагаемым. В [14] показано, что периодическая часть факторно делимой группы ранга 1 не выделяется прямым слагаемым, если в кохарактеристике $\chi = (m_p)$ этой группы бесконечное количество компонент удовлетворяет условию $0 < m_p < \infty$. Мы получаем, что для такой характеристики χ периодическая часть однородной вполне разложимой факторно делимой группы кохарактеристики χ, будучи сервантной подгруппой, во-первых, сама не является факторно делимой группой и, во-вторых, не выделяется прямым слагаемым.

Чтобы дуализировать теорему Бэра, мы переформулируем ее на языке коротких точных последовательностей. Условие сервантности подгруппы B группы A в теореме Бэра равносильно условию, что факторгруппа A/B является группой без кручения. Теорема Бэра приобретает следующий вид. Если в короткой точной последовательности групп без кручения конечного ранга $0 \to B \to A \to C \to 0$ группа A является однородной вполне разложимой, то эта последовательность расщепляется. Такая формулировка подсказывает нам формулировку нашей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $0 \to B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C \to 0$ - короткая точная последовательность факторно делимых групп. Если группа A является однородной вполне разложимой группой, то эта последовательность расщепляется и все три группы являются однородными вполне разложимыми одной и той же кохарактеристики.*

Доказательство. Фиксируем произвольные базисы $b_1, \ldots, b_k$ и $c_{k+1}, \ldots, c_n$ в факторно делимых группах B и C соответственно. Рассмотрим элементы $a_1 = f(b_1), \ldots, a_k = f(b_k) \in A$, а также произвольные элементы $a_{k+1}, \ldots, a_n \in A$, удовлетворяющие условию $g(a_{k+1}) = c_{k+1}, \ldots, g(a_n) = c_n$. Как показано в [9], Лемма 1, элементы $a_1, \ldots, a_n$ составляют базис факторно делимой группы A. Тогда по Теореме 1 мы получаем, что $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, где $A_1, \ldots, A_n$ - изоморфные между собой факторно делимые группы ранга 1 и $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$ - базисы этих факторно делимых групп.

Обозначим $H = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$. Точность последовательности, в частности, означает, что $Ker(g) = Im(f)$. Мы хотим доказать, что $H = Im(f)$. Предположим, что не выполняется включение $H \subset Im(f)$. Тогда подгруппа $G = H \cap Im(f)$ отлична от группы H и факторгруппа H/G отлична от нуля. Рассмотрим подгруппу $F = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \subset H$. Имеют место включения $H \supset G \supset F$. По теореме об изоморфизме $H/G \cong (H/F)/(G/F)$. Так как элементы $a_1, \ldots, a_k$ составляют базис факторно делимой группы H, то факторгруппа H/F является делимой периодической группой. Поэтому и факторгруппа H/G также является ненулевой периодической делимой группой. Рассмотрим ограничение гомоморфизма $g : A \to C$ на подгруппу H. По другой теореме об изоморфизме гомоморфизм $g : H \to C$ индуцирует мономорфизм $\overline{g} : H/Ker(g) \to C$, то есть ненулевая делимая периодическая группа $H/G = H/Ker(g)$ вкладывается в группу C. Это противоречит тому, что группа C является факторно делимой. Таким образом, должно выполняться равенство $H = G$, что равносильно включению $H \subset Im(f) = Ker(g)$. Из этого включения следует, что группа $Im(f)$ раскладывается в прямую сумму $Im(f) = H \oplus T$, где $T \subset A_{k+1} \oplus \ldots \oplus A_n$. Заметим, что элементы бесконечного порядка в группе $A_{k+1} \oplus \ldots \oplus A_n$ имеют ненулевые образы при гомоморфизме $g : A \to C$. Поэтому группа T является периодической подгруппой факторно делимой группы $A_{k+1} \oplus \ldots \oplus A_n$ и, следовательно, группа T является периодической редуцированной группой. Так как элементы $b_1, \ldots, b_k$ составляют базис факторно делимой группы B, то факторгруппа $B/\langle b_1, \ldots, b_k\rangle$ является периодической делимой группой. В силу изоморфизма $f : B \to Im(f)$, факторгруппа $Im(f)/\langle a_1, \ldots, a_k\rangle \cong B/\langle b_1, \ldots, b_k\rangle$ также является делимой периодической группой. С другой стороны, эта группа

$$Im(f)/F = (H \oplus T)/F \cong (H/F) \oplus T$$

не является делимой, если группа T отлична от нуля.

Таким образом, мы доказали, что $T = 0$, откуда следует, что $H = Im(f)$. В результате мы получаем, что $B \cong A_1 \oplus \ldots \oplus A_k, C \cong A_{k+1} \oplus \ldots \oplus A_n$ и $A \cong B \oplus C$. Теорема доказана. □

3. Заключение

Рассмотрим категорию, объектами которой являются абелевы группы без кручения конечного ранга, а морфизмами - обычные гомоморфизмы этих групп. Для групп A и B группа $Hom(A, B)$ сама является группой без кручения конечного ранга и может быть устроена довольно сложно. Для этой категории у нас нет функтора двойственности в категорию смешанных факторно делимых групп. Зато мы имеем такие функторы для двух близких категорий.

Во-первых, это категория, объектами которой являются абелевы группы без кручения конечного ранга, а морфизмами - квазигомоморфизмы. Для двух групп A и B квазигомоморфизмами из A в B называются элементы группы $Q \otimes Hom(A, B)$. В данном случае группа $D = Q \otimes Hom(A, B)$ является делимой оболочкой группы $Hom(A, B)$. Для этой категории в [8] был построен функтор двойственности в категорию смешанных факторно делимых групп с квазигомоморфизмами. Однако с помощью этой двойственности затруднительно переносить на смешанные группы результаты о почти вполне разложимых группах, которые составляют значительную часть современной теории абелевых групп без кручения конечного ранга, так как в данной категории почти вполне разложимые группы не различаются от вполне разложимых.

Более тонким инструментом является третья категория, объектами которой являются абелевы группы без кручения конечного ранга с отмеченными базисами (максимальными линейно независимыми системами элементов), а морфизмами - обычные гомоморфизмы, у которых матрицы относительно отмеченных базисов состоят из целых чисел. Группа морфизмов F из A в B в этом случае является свободной подгруппой того же ранга группы $Hom(A, B)$. Таким образом, морфизмы трех категорий связаны между собой следующим образом: $F \subset Hom(A, B) \subset D$. Для этой третьей категории имеется функтор двойственности в категорию смешанных факторно делимых групп также с отмеченными базисами, см. [9, 10].

В силу различности этих трех категорий перенос классических результатов теории абелевых групп без кручения конечного ранга на случай смешанных факторно делимых групп при помощи двойственности не является непосредственным. Это, в частности, показывает наша статья, а также теоремы О.И. Давыдовой [12, 13]. Тем больший интерес представляют теоремы подобного рода.

В заключение отметим, что в [34, 35] разработаны методы дуализации при помощи двойственности [9, 10] результатов о почти вполне разложимых группах на примере групп А.Л.С. Корнера [37] с аномальными прямыми разложениями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л. С. Теория топологических коммутативных групп // УМН 1936. Vol. 2, №1. P. 177–195.

2. Kurosh A. G. Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen von endlichen Range // Ann. of Math 1937. Vol. 38, №1. P. 175-203.

3. Мальцев А. И. Абелевы группы конечного ранга без кручения // Матем. сб. 1938. Vol. 4, №1. P. 45-68.

4. Derry D. Über eine Klasse von abelschen Gruppen // Proc. London Math. Soc. 1938. Vol. s2, №43. P. 490-506.

5. Baer R. Abelian groups without elements of finite order // Duke Math. 1937. Vol. 3, №1. P. 68-122.

6. Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion free rings // Ill. J. Math. 1961. Vol. 5, №1. P. 61-98.

7. Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion free groups of rank two // Mem. Amer. Math. Soc. 1961. Vol. 38, №1. P. 1–41.

8. Fomin A. A., Wickless W. J. Quotient divisible abelian groups // Proc. A.M.S. 1998. Vol. 126, №1. P. 45-52.

9. Fomin A. A. Invariants for Abelian groups and dual exact sequences // J. Algebra 2009. Vol. 322, №7. P. 2544-2565.

10. Яковлев А. В. Двойственность категорий абелевых групп без кручения конечного ранга и факторно делимых групп // Зап. научн. сем. ПОМИ 2010. Vol. 375, №1. P. 195-202.

11. Breaz S., Schultz P. Dualities for self–small groups // Proc. A.M.S. 2012. Vol. 140, №1. P. 69-82.

12. Давыдова О. И. Факторно делимые группы ранга 1 // Фундамент. и прикл. Матем. 2007. Vol. 13, №3. P. 25-33.

13. Давыдова О. И. Гомоморфизмы факторно делимых групп ранга 1 // Фундамент. и прикл. Матем. 2015. Vol. 20, №5. P. 57-60.

14. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. Матем. 2012. Vol. 17, №8. P. 153-167.

15. Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. Матем. 2015. Vol. 20, №5. P. 157-196.

16. Wickless W. J. Direct sums of quotient divisible groups // Communications in Algebra 2003. Vol. 31, №1. P. 79-96.

17. Albrecht U., Breaz S., Vinsonhaler C., Wickless W. Cancellation properties for quotient divisible groups // Journal of Algebra 2007. Vol. 317, №1. P. 424–434 .

18. Царев А. В. Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторноделимые группы // Алгебра и анализ 2006. Vol. 18, №4. P. 198-214.

19. Любимцев О. В. Вполне разложимые факторно делимые абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки 2015. Vol. 98, №1. P. 125–133.

20. Wickless W. Multi-isomorphism for quotient divisible groups // Houston J. Math. 2006. Vol. 31, №1. P. 1-19.

21. Царев А. В. Модуль псевдорациональных отношений факторно делимой группы // Алгебра и анализ 2010. Vol. 22, №1. P. 223–239.

22. Царев А. В. Псевдорациональный ранг факторно делимой группы // Фундамент. и прикл. матем. 2005. Vol. 11, №3. P. 201–213.

23. Царев А. В. T-кольца и факторно делимые группы ранга 1 // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2013. Vol. 24, №4. P. 50–53.

24. Крючков Н. И. Компактные группы, двойственные факторно делимым абелевым группам // Фундамент. и прикл. матем. 2015. Vol. 20, №5. P. 113–119.

25. Любимцев О. В. Об определяемости вполне разложимых факторно делимых абелевых групп своими полугруппами эндоморфизмов // Изв. вузов. Матем. 2017. Vol. 10, №1. P. 75–82.

26. Files S., Wickless W. Direct Sums of Self-Small Mixed Groups // J. Algebra 1999. Vol. 222, №1. P. 1-16.

27. Albrecht U., Wickless B. Finitely generated and cogenerated QD groups // Rings, modules, algebras, and abelian 2004. Vol. 236, №1. P. 13-26.

28. Albrecht U., Breaz S., Wickless W. Self-small abelian groups // Bulletin of the Australian Mathematical Society 2009. Vol. 80, №2. P. 205-216.

29. Fomin A. A., Wickless W. Self-small mixed abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible // Communications in Algebra 1998. Vol. 26, №11. P. 3563-3580.

30. Albrecht U., Breaz S., Wickless W. Purity and Self-Small Groups // Communications in Algebra 2007. Vol. 35, №11. P. 3789-3807.

31. Zemlicka J. When Products of Self-Small Modules are Self-Small // Communications in Algebra 2008. Vol. 36, №7. P. 2570-2576.

32. Breaz S., Zemlicka J. When every self-small module is finitely generated // J. Algebra 2007. Vol. 315, №2. P. 885-893.

33. Albrecht U., Breaz S. A note on self-small modules over RM-domains // J. Algebra and Its Applications 2014. Vol. 13, №1. P. (8 pages).

34. Fomin A. A. Quotient divisible and almost completely decomposable groups // Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A. L. S. Corner, de Gruyter, Berlin - New York 2008. Vol. 1, №1. P. 147-167.

35. Фомин А. А. Почти вполне разложимые группы // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, Матер. XIII Международной конференции, посвященной 85-летию профессора С.С. Рышкова, Тула, 25-30 мая 2015 г.,Тула: Изд-во ТГПУ им.Л.Н.Толстого 2015. P. 49-52.

36. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы // М.: Мир, т.1, т.2. 1974, 1977.

37. Corner A. A note on rank and direct decomposition of torsion-free abelian groups // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1969. Vol. 66, №1. P. 239-240.

REFERENCES

1. Pontryagin, L. S. 1934, "The theory of topological commutative groups", *Ann. of Math*, vol. 13, no. 1, pp. 361-388.

2. Kurosh, A. G. 1937, "Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen von endlichen Range", *Ann. of Math*, vol. 38, no. 1, pp. 175-203.

3. Malcev, A. I. 1938, "Torsionsfreie Abelsche Gruppen vom endlichen Rang", *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, vol. 4, no. 1, pp. 45–68.

4. Derry, D. 1938, "Über eine Klasse von abelschen Gruppen", *Proc. London Math. Soc.*, vol. s2, no. 43, pp. 490-506.

5. Baer, R. 1937, "Abelian groups without elements of finite order", *Duke Math.*, vol. 3, no. 1, pp. 68-122.

6. Beaumont, R. A., Pierce, R. S. 1961, "Torsion free rings", *Ill. J. Math.*, vol. 5, no. 1, pp. 61-98.

7. Beaumont, R. A., Pierce, R. S. 1961, "Torsion free groups of rank two", *Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 38, no. 1, pp. 1–41.

8. Fomin, A. A., Wickless, W. J. 1998, "Quotient divisible abelian groups", *Proc. A.M.S.*, vol. 126, no. 1, pp. 45-52.

9. Fomin, A. A. 2009, "Invariants for Abelian groups and dual exact sequences", *J. Algebra*, vol. 322, no. 7, pp. 2544-2565.

10. Yakovlev, A. B. 2010, "Duality of the categories of torsion-free Abelian groups of finite rank and quotient divisible Abelian groups", *J. Math. Sci.*, vol. 171, no. 3, pp. 416–420.

11. Breaz, S., Schultz, P. 2012, "Dualities for self–small groups", *Proc. A.M.S.*, vol. 140, no. 1, pp. 69-82.

12. Davydova, O. I. 2008, "Rank-1 quotient divisible groups", *J. Math. Sci.*, vol. 154, no. 3, pp. 295–300.

13. Davydova, O. I. 2018, "Homomorphisms of Rank-1 Quotient Divisible Groups", *J. Math. Sci.*, vol. 230, no. 3, pp. 389–391.

14. Fomin, A. A. 2014, "To Quotient Divisible Group Theory. I", *J. Math. Sci.*, vol. 197, no. 5, pp. 688–697.

15. Fomin, A. A. 2018, "On the Quotient Divisible Group Theory. II", *J. Math. Sci.*, vol. 230, no. 3, pp. 457–483.

16. Wickless, W. J. 2003, "Direct sums of quotient divisible groups", *Communications in Algebra*, vol. 31, no. 1, pp. 79-96.

17. Albrecht, U., Breaz, S., Vinsonhaler, C. & Wickless W. 2007, "Cancellation properties for quotient divisible groups", *Journal of Algebra*, vol. 317, no. 1, pp. 424–434 .

18. Tsarev, A. V. 2007, “Modules over the ring of pseudorational numbers and quotient divisible groups“, *St. Petersburg Math. J.*, vol. 18, no. 4, pp. 657–669.

19. Lyubimtsev, O. V. 2015, “Completely decomposable quotient divisible abelian groups with UA-rings of endomorphisms“, *Mathematical Notes*, vol. 98, no. 1, pp. 130–137.

20. Wickless, W. 2006, “Multi-isomorphism for quotient divisible groups“, *Houston J. Math.*, vol. 31, no. 1, pp. 1-19.

21. Tsarev, A. V. 2010, “The module of pseudo-rational relations of a quotient divisible group“, *St. Petersburg Math. J.*, vol. 22, no. 1, pp. 163-174 .

22. Tsarev, A. V. 2007, “Pseudorational rank of a quotient divisible group“, *J. Math. Sci.*, vol. 144, no. 2, pp. 4013–4022.

23. Tsarev, A. V. 2013, “T-rings and quotient divisible groups of rank 1,“, *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, vol. 24, no. 4, pp. 50-53.

24. Kryuchkov, N. I. 2018, “Compact Groups That Are Duals of Quotient Divisible Abelian Groups“, *J. Math. Sci.*, vol. 230, no. 3, pp. 428–432.

25. Lyubimtsev, O. V. 2017, “Characterization of completely decomposable quotient divisible abelian groups by their endomorphism semigroups“, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, vol. 61, no. 10, pp. 65–71.

26. Files, S., Wickless, W. 1999, “Direct Sums of Self-Small Mixed Groups“, *J. Algebra*, vol. 222, no. 1, pp. 1-16.

27. Albrecht, U., Wickless, B. 2004, “Finitely generated and cogenerated QD groups“, *Rings, modules, algebras, and abelian*, vol. 236, no. 1, pp. 13-26.

28. Albrecht, U., Breaz, S. & Wickless, W. 2009, “Self-small abelian groups“, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 80, no. 2, pp. 205-216.

29. Fomin, A. A., Wickless, W. 1998, “Self-small mixed abelian groups G with $G/T(G)$ finite rank divisible“, *Communications in Algebra*, vol. 26, no. 11, pp. 3563-3580.

30. Albrecht, U., Breaz, S. & Wickless, W. 2007, “Purity and Self-Small Groups“, *Communications in Algebra*, vol. 35, no. 11, pp. 3789-3807.

31. Zemlicka, J. 2008, “When Products of Self-Small Modules are Self-Small“, *Communications in Algebra*, vol. 36, no. 7, pp. 2570-2576.

32. Breaz, S., Zemlicka, J. 2007, “When every self-small module is finitely generated“, *J. Algebra*, vol. 315, no. 2, pp. 885-893.

33. Albrecht, U., Breaz, S. 2014, “A note on self-small modules over RM-domains“, *J. Algebra and Its Applications*, vol. 13, no. 1, pp. (8 pages).

34. Fomin, A. A. 2008, “Quotient divisible and almost completely decomposable groups“, *Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A. L. S. Corner, de Gruyter, Berlin - New York*, vol. 1, no. 1, pp. 147-167.

35. Fomin, A. A. 2015, “Almost completely decomposable groups“, *Proceedings of the XIII International conference devoted to the 85-th Birthday of Professor S.S. Ryshkov, May 25-30, 2015, Tula*, pp. 49-52. (Russian)

36. Fuchs, L. 1970, 1973 “Infinite Abelian Groups“, *New York: Academic Press*, vol. 1, vol. 2.

37. Corner, A. 1961, “A note on rank and direct decomposition of torsion-free abelian groups“, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 57, no. 1, pp. 230-233.

Получено 16.06.2018
Принято в печать 17.08.2018