ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 51(091)+(092) DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-340-366

Н. М. Коробов и теория гиперболической дзета-функции решёток[1]

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, физики и информатики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Кирилина Анастасия Вячеславовна — ассистент, зам. декана факультета математики, физики и информатики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: anastasiiakir2018@gmail.com

Аннотация

В работе продолжено исследование роли Н. М. Коробова в развитии теоретико-числового метода в приближенном анализе.

Одно из центральных мест в теоретико-числовом методе в приближенном анализе занимает метод оптимальных коэффициентов. Первый пример гиперболической дзета-функции решёток появился в работах Н. М. Корбова и Н. С. Бахвалова в 1959 году как оценка погрешности интегрирования на классе E_s^α с помощью квадратурных формул, построенных на параллелепипедальных сетках.

В данной работе выделены 5 этапов-направлений в теории гиперболической дзета-функции решёток.

Во-первых, это этап становления общей теории, который исторически занимает период от 1959 года по 1990 год. За этот период Была построена теория квадратурных формул с обобщёнными параллелепипедальными сетками и показано, что норма погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α либо равна гиперболической дзета-функции решёток, случай целочисленной решётки, либо оценивается сверху через неё в случае произвольной решётки.

Второй этап начался в середине 90-х годов, когда появилось новое направление исследований гиперболической дзета-функции решёток как функции комплексного аргумента $\alpha = \sigma + it$ на метрическом пространстве решёток. Это направление продолжает развиваться и по настоящее время.

Следующий этап, который тоже начался в середине 90-х годов был связан с рассмотрением обобщённой гиперболической дзета-функции решёток, или другими словами гиперболической дзета-функции на сдинутых решётках.

Четвертый этап, который стал самостоятельным направлением исследований, начался в конце 90-х, в начале 2000-х годов. Он связан с вопросом получения функционального уравнения для аналитического продолжения гиперболической дзета-функции решёток.

Наконец, последнее новое направление этой теории логически возникшее из предыдущих связано с изучение дзета-функций моноидов натуральных чисел.

В работе раскрыта определяющая роль профессора Н. М. Коробова в становлении и развитии теории гиперболической дзета-функции решёток.

Ключевые слова: теоретико-числовой метод в приближенном анализе, гиперболическая дзета-функция решётки.

Библиография: 67 названий.

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

Для цитирования:
И. Ю. Реброва, А. В. Кирилина Н. М. Коробов и теория гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 340–366.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 51(091)+(092) DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-340-366

N. M. Korobov and the theory of the hyperbolic zeta function of lattices

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Kirilina Anastasia Vyacheslavovna — assistant, deputy dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: anastasiiakir2018@gmail.com

Abstract

The paper continues the study of the role Of N. M. Korobova in the development of the number-theoretic method in the approximate analysis.

One of the Central places in the numerical-theoretical method in the approximate analysis is the method of optimal coefficients. The first example of a hyperbolic Zeta function of lattices appeared in the works of N. M. Korbova and N. S. bakhvalova in 1959 as an evaluation of integration error on the class E_s^α using quadrature formulas constructed on parallelepiped grids.

In this paper, 5 stages-directions in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices are distinguished.

First, it is the stage of formation of the General theory, which historically occupies the period from 1959 to 1990. During this period, the theory of quadrature formulas with generalized parallelepiped grids was constructed and it was shown that the error rate of the approximate integration on the class E_s^α is either equal to the hyperbolic Zeta function of lattices, the case of an integer lattice, or is estimated from above through it in the case of an arbitrary lattice.

The second stage began in the mid-90s, when a new direction of research of the hyperbolic Zeta function of lattices as a function of the complex argument $\alpha = \sigma + it$ on the metric space of lattices appeared. This direction continues to develop to the present time.

The next stage, which also began in the mid-90s, was related to the consideration of the generalized hyperbolic Zeta function of lattices, or in other words, the hyperbolic Zeta function on the folded lattices.

The fourth stage, which became an independent direction of research, began in the late 90s, in the early 2000s. It is related to the question of obtaining a functional equation for the analytic continuation of the hyperbolic Zeta function of lattices.

Finally, the last new direction of this theory logically emerged from the previous ones is connected with the study of Zeta functions of monoids of natural numbers.

The paper reveals the defining role of Professor N. M. Korobova in the formation and development of the theory of hyperbolic Zeta function of lattices.

Keywords: a number-theoretic method in approximate analysis, a hyperbolic lattice Zeta function.

Bibliography: 67 titles.

For citation:
I. Yu. Rebrova, A. V. Kirilina 2018, "N. M. Korobov and the theory of the hyperbolic zeta function of lattices" , //*Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2. P. 340–366.

1. Введение

В работе [58] достаточно полно освещена роль Н. М. Коробова в современном этапе развития Тульской школы теории чисел, а в работе [10] дан развернутый обзор теоретико-числового метода в приближенном анализе. К сожалению, из-за недостатка место теории гиперболической дзета-функции решёток в этом обзоре уделено недостаточно места, хотя роль этой теории, на наш взгляд, в теоретико-числовом методе значительная и она в настоящее время интенсивно развивается.

Центральное понятие геометрии чисел – решетка – позволяет на единообразном языке обсуждать разные вопросы теории чисел. Так, например, решеткой является множество $\Lambda(a_1,\ldots,a_s;N)$ решений линейного сравнения

$$a_1\cdot x_1+\ldots+a_s\cdot x_s\equiv 0 \pmod N, \tag{1}$$

а также множество всех целых алгебраических чисел чисто вещественного расширения K степени s поля рациональных чисел Q

$$\Lambda(K)=\{(\Theta^{(1)},\ldots,\Theta^{(s)})\mid \Theta^{(1)}\in Z_K\}, \tag{2}$$

где Z_K – кольцо целых алгебраических чисел поля K, и $\Theta^{(1)},\ldots,\Theta^{(s)}$ – система алгебраически сопряженных чисел.

Как известно (см. [2], стр. 117), общее определение теоретико-числовой решетки в геометрии чисел следующее.

Пусть $\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_m$, $m\leqslant s$ – линейно независимая система векторов вещественного арифметического пространства R^s. Совокупность Λ всех векторов вида

$$a_1\vec{\lambda}_1+\ldots+a_m\vec{\lambda}_m,$$

где a_j независимо друг от друга пробегают все целые рациональные числа, называется m-мерной решеткой в R^s, а сами векторы $\vec{\lambda}_1,\ldots,\vec{\lambda}_m$ – базисом этой решетки.

Если $m=s$, то решетка называется полной, в противном случае – неполной. Так как в этой работе рассматриваются только полные решетки, то, следуя традиции многих изложений (см. [47]), для краткости будем говорить просто о решетках, опуская слово полная.

Множество всех s-мерных полных решеток из R^s будем обозначать через PR_s.

В 1957–1959 годах вышли первые работы [48], [49] Н. М. Коробова, в которых были применены методы теории чисел к вопросам численного интегрирования кратных интегралов. Выделение класса периодических функций позволило для оценки погрешности приближенного интегрирования использовать методы гармонического анализа и теорию тригонометрических сумм, важный раздел аналитической теории чисел.

Первые результаты по применению теоретико-числовых сеток для вычисления интегралов произвольной кратности были получены в работе [48] для периодических функций, разлагающихся в абсолютно сходящийся ряд Фурье. В этих работах Н. М. Коробова в связи с изучением погрешности приближенного интегрирования для квадратурных формул с параллелепипедальными сетками на классе E_s^α периодических функций с быстросходящимися коэффициентами Фурье (см. [49]), наверное, впервые встречается частный случай гиперболической дзета-функции решетки для вещественного $\alpha > 1$ и решетки $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta_N(a_1\cdot m_1 + \ldots + a_s\cdot m_s)}{(\overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_s)^\alpha}, \tag{3}$$

где

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m \equiv 0 \pmod N, \\ 0 & \text{при} \quad m \not\equiv 0 \pmod N, \end{cases}$$

и $(a_j, N) = 1 \quad (j = 1, \ldots, s)$. При этих условиях $\det\Lambda = N$. Здесь и далее $\sum'$ означает, что суммирование проводится по всем ненулевым точкам. Для вещественных x полагаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

Гиперболическая дзета-функция вида (3) встречается в работах многих исследователей. В частности, Н. С. Бахвалов ([1], 1959) доказал оценку

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \ll \frac{(\ln q(\Lambda) + 1)^{s-1}}{q(\Lambda)^\alpha}. \tag{4}$$

Н. М. Коробов ([49], 1959) показал, что для таких решеток

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \gg \frac{\ln^{s-1}\det\Lambda}{(\det\Lambda)^\alpha} \tag{5}$$

при любом выборе целых $a_1, \ldots, a_s$, взаимно простых с N.

Были построены алгоритмы нахождения $a_1, \ldots, a_s$ таких, что

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \ll \frac{\ln^{s\alpha}\det\Lambda}{(\det\Lambda)^\alpha} \quad \text{(Н. М. Коробов, 1960)}, \tag{6}$$

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \ll \frac{\ln^{(s-1)\alpha}\det\Lambda}{(\det\Lambda)^\alpha} \quad \text{(Н. С. Бахвалов, Н. М. Коробов)}. \tag{7}$$

Перечисленные результаты относятся к начальному этапу развития теории гиперболической дзета-функции решёток.

Цель данной статьи — дать обзор истории развития теории гиперболической дзета-функции решёток на протяжении 60 лет от первых работ до современных.

2. Начало общей теории

В общем виде гиперболическая дзета-функция решеток встречается в работах К. К. Фролова [64], [65]. В кандидатской диссертации [65] К. К. Фролов показал, что для любого $\alpha > 1$ и произвольной s-мерной решетки Λ ряд[2]

$$\sideset{}{'}\sum_{\vec{x}\in\Lambda} (\overline{x}_1\cdot\ldots\cdot\overline{x}_s)^{-\alpha}$$

[2]Символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключается $\vec{x} = \vec{0}$, и для любого вещественного x величина $\overline{x}$ задается равенством $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

сходится абсолютно.

Рассмотрев алгебраическую решетку вида (2), К. К. Фролов показал, что при $t>1$ для решетки $\Lambda(t,K)=t\Lambda(K)$ с $\det\Lambda(t,K)=t^s\det\Lambda(K)$ справедлива оценка

$$\zeta_H(\Lambda(t,K)|\alpha)\ll\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t,K)}{(\det\Lambda(t,K))^{\alpha}}. \tag{8}$$

Развитие метода К. К. Фролова содержится в работах [3], [4] В. А. Быковского и работах [23], [24], [25] Н. М. Добровольского.

Термин *"гиперболическая дзета-функция решетки"* был введен Н. М. Добровольским в работах [23], [25], в которых получены нижние оценки для гиперболической дзета-функции произвольной s-мерной решетки

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha)\geqslant C_1(\alpha,s)(\det\Lambda)^{-1}\quad\text{при}\quad 0<\det\Lambda\leqslant1,$$

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha)\geqslant C_2(\alpha,s)(\det\Lambda)^{-\alpha}\ln^{s-1}\det\Lambda\quad\text{при}\quad\det\Lambda>1, \tag{9}$$

где $C_1(\alpha,s)$, $C_2(\alpha,s)>0$ – константы, зависящие только от α и s, доказана верхняя оценка для гиперболической дзета-функции s-мерной решетки

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha)\leqslant C_3(\alpha,s)C_1(\Lambda)^s\quad\text{при}\quad q(\Lambda)=1,$$

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha)\leqslant C_4(\alpha,s)q^{-\alpha}(\Lambda)(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}\quad\text{при}\quad q(\Lambda)>1. \tag{10}$$

Эта теорема является обобщением теоремы Н. С. Бахвалова, то есть обобщением неравенства (4). Из оценки (10) получены различные следствия. В частности, из нее автоматически следует результат К. К. Фролова (8), так как гиперболический параметр $q(\Lambda(t,K))=t^s$ при $t>1$.

Также Н. М. Добровольским доказана теорема: для любой целочисленной решетки Λ и натурального n справедливо представление

$$\zeta_H(\Lambda|2n)=-1+(\det\Lambda)^{-1}\sum_{\vec{x}\in M(\Lambda)}\prod_{j=1}^{s}\left(1-\frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{(2n)!}B_{2n}(x_j)\right), \tag{11}$$

где $B_{2n}(x)$ – полином Бернулли порядка $2n$ и $M(\Lambda)$ – обобщенная параллелепипедальная сетка решетки Λ. Эта теорема указывает на аналогию между гиперболической дзета-функцией решетки и дзета-функцией Римана, для которой

$$\zeta(2n)=(-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!}B_{2n}.$$

Для гиперболической дзета-функции решетки $\Lambda(t,K)$ Добровольским Н. М., Ваньковой В. С., Козловой С. Л. ([31]) была получена асимптотическая формула

$$\zeta_H(\Lambda(t,K)|\alpha)=\frac{2\cdot(\det\Lambda(K))^{\alpha}}{R\cdot(s-1)!}\left(\sum_{(w)}\frac{1}{|N(w)|^{\alpha}}\right)\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t,K)}{(\det\Lambda(t,K))^{\alpha}}+$$

$$+O\left(\frac{\ln^{s-2}\det\Lambda(t,K)}{(\det\Lambda(t,K))^{\alpha}}\right), \tag{12}$$

где R – регулятор поля K ([9]) и в сумме $\sum_{(w)}\frac{1}{|N(w)|^{\alpha}}$ суммирование проводится по всем главным идеалам кольца Z_K.

Создание начал общей теории гиперболической дзета-функции решёток заняло около пятнадцати лет с 1976 по 1990 годы. В 1976 году К. К. Фролов выпускник Московского Физтеха выпустил свою первую работу [64] по теоретико-числовому методу в приближенном анализе. И осенью 1976 года он выступил с несколькими докладами на семинаре профессора Н. М. Коробова на мех-мате в МГУ имени М. В. Ломоносова. Это выступление не было случайным. Дело в том, что научным руководителем К. К. Фролова был В. М. Солодов, научным руководителем которого в своё время был профессор Н. М. Коробов.

Выступление К. К. Фролова вызвало большой интерес у участников семинара. По тематике исследований содержание доклада К. К. Фролова наиболее близко было Н. М. Добровольскому, которому Н. М. Коробов и поручил разбираться в этой работе К. К. Фролова. В 1977 году Н. М. Добровольский выступил на семинаре Н. М. Коробова с новым вариантом изложения метода К. К. Фролова, который опирался на теорему Дирихле о группе единиц алгебраического поля. В 1979 году состоялась защита К. К. Фролова в Диссертационном совете при ВЦ Академии наук СССР. Профессор Н. М. Коробов был первым оппонентом по этой диссертации. Защите предшествовала длительная проверка диссертации К. К. Фролова. Эту работу Н. М. Коробов поручил выполнить Н. М. Добровольскому, как наиболее погруженному участнику семинара в эту проблему. Первая проверка дала достаточно много замечаний, по результатам которых К. К. Фролов сделал новый вариант изложения существенно более качественный. Этот новый вариант, в котором была заложена общая теория гиперболической дзета-функции на основе геометрии чисел, и был защищен в конце 1979 года.

В 1980 году Н. М. Добровольский перешёл на работу из КИВЦ Главприоксстроя в Тульский государственный педагогический институт им. Л. Н. Толстого. Так как в тот период времени в силу определенных обстоятельств профессор Н. М. Коробов не принимал в аспирантуру новых аспирантов, то Н. М. Добровольский вынужден был поступить в 1981 году в аспирантуру в Туле к профессору М. Д. Гриндлнгеру, но с согласия своего нового официального научного руководителя продолжал ездить на семинары в Москву к профессору Н. М. Коробову.

Поворотным моментом во взаимоотношениях Н. М. Коробова и Н. М. Добровольского стала осень 1982 года. Через Д. А. Митькина, который был в это время вторым руководителем семинара, Н. М. Коробов пригласил снова на семинар Н. М. Добровольского и поручил ему сделать обзор публикаций по тематике семинара в различных изданиях за рубежом. Результаты этого обзора Н. М. Коробов собирался использовать в докладе на Всесоюзной конференции по диофантовым приближениям, проведение которой было назначено на начало февраля 1983 года. В результате этой работы Н. М. Добровольский получил бесценную информацию по своему научному направлению, кроме того по просьбе Н. М. Коробова ученый секретарь конференции доцент А. И. Галочкин во время конференции включил выступление Н. М. Добровольского в одну из секций, которой руководил молодой исследователь из Беларуссии, будущий профессор В. И. Берник.

После окончания конференции Н. М. Коробов предложил Н. М. Добровольскому получить рациональный вариант теоремы Рота о квадратичном отклонении. При этом профессор Н. М. Коробов поставил очень жёсткие сроки: два — три месяца. В основе постановки этой задачи лежал рассказ профессора Н. М. Коробова, как он построил параллелепипедальные сетки, исходя из неэффективной теоремы И. И. Пятецкого-Шапиро о квадратурных формулах, в которой доказывалось существование действительных чисел $\theta_1, \ldots, \theta_s$, притом для каждой периодической функции и для каждого количества узлов N квадратурной формулы, вообще говоря, своих значений $\theta_1, \ldots, \theta_s$ таких, что квадратурная формула с узлами $(\{k\theta_1\}, \ldots, \{k\theta_s\})$ $(k = 1, \ldots, N)$ имеет порядок погрешности приближенного интегрирования $O\left(N^{-1} \ln N\right)$ (см. [51], стр. 85 — 87).

Задача была выбрана очень удачно. Уже в начале апреля Н. М. Добровольский выступил с докладом на кафедральном семинаре, а 25 апреля в день рождения А. Н. Колмогорова передал члену редколлегии Успехов математических наук профессору В. М. Тихомирову статью с решением поставленной задачи. Это было очень удачным стартом и за год удалось получить все основные результаты [20], [21], [22], [23], [24], которые вошли в кандидатскую диссертацию [25], [26], [27]. Интересно отметить, что на защите кандидатской диссертации Н. М. Добровольского, которая состоялась 21 октября 1985 года в Московском государственном педагогическом институте им. В. И. Ленина, первым оппонентом был профессор Н. М. Коробов, вторым — старший научный сотрудник К. К. Фролов, отзыв ведущей организации от Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова подготовил профессор А. В. Малышев.

Именно в работе [23] произошло выделение гиперболической дзета-функции решёток как самостоятельного объекта исследований. К заключительной работе второго этапа — **Начало общей теории** следует отнести работу [31], в которой была получена асимптотическая формула (12) для дзета-функции алгебраической решётки.

Кроме этого, на данном этапе была выполнена серия важных работ по применению теории дивизоров для поиска оптимальных коэффициентов для параллелепипедальных сеток, принадлежащая С. М. Воронину и Н. Тимергалиеву (см. [5], [6], [8], [62]). Фактически в этих работах указаны алгоритмы поиска целочисленных решеток с большим значением гиперболического параметра решетки.

3. Гиперболическая дзета-функция решёток как функция комплексного аргумента на пространстве решёток

К середине 90-х годов логика развития теории гиперболической дзета-функции решёток привела к необходимости исследовать этот объект уже не только при вещественных $\alpha > 1$, когда он задан дзета рядом

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^{-\alpha}, \tag{13}$$

но и во всей полуплоскости $\alpha = \sigma + it$, $\sigma > 1$.

Таким образом, гиперболической дзета-функцией $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ решетки Λ ([23]) для комплексного аргумента α называется функция, задаваемая в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it \quad (\sigma > 1)$ абсолютно сходящимся рядом

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s)^{-\alpha}. \tag{14}$$

По теореме Абеля ([66], с.106) гиперболическую дзета – функцию решеток можно представить в следующем интегральном виде

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \alpha \int\limits_1^\infty \frac{D(t|\Lambda)dt}{t^{\alpha+1}}, \tag{15}$$

где $D(t|\Lambda)$ – количество ненулевых точек решетки Λ в гиперболическом кресте $K(t)$.

Прежде всего заметим, что гиперболическая дзета – функция решеток является рядом Дирихле. Действительно, дадим несколько определений и обозначений.

Норменным спектром решетки Λ называется множество значений нормы на ненулевых точках решетки Λ:

$$N_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = N(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Lambda\backslash\{\vec{0}\}\}, \quad N(\vec{x}) = |x_1 x_2 \ldots x_s|. \tag{16}$$

Соответственно, усеченным норменным спектром решетки Λ — множество значений усеченной нормы на ненулевых точках решетки:

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Lambda \backslash \{\vec{0}\}\}, \quad q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_s. \tag{17}$$

Усеченный норменный спектр является дискретным числовым множеством, т.е.

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots\} \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} \lambda_k = \infty.$$

Очевидно, что

$$N(\Lambda) = \inf_{\lambda \in N_{sp}(\Lambda)} \lambda, \quad q(\Lambda) = \min_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} \lambda = \lambda_1.$$

Для норменного минимума решётки $N(\Lambda)$ и гиперболического параметра решётки $q(\Lambda)$ выполнено очевидное неравенство $N(\Lambda) \leqslant q(\Lambda)$.

Порядком точки спектра называется количество точек решетки с заданным значением нормы. Если таких точек решетки бесконечно много, то говорят, что точка спектра имеет бесконечный порядок. Порядок точки λ норменного спектра обозначается через $n(\lambda)$, а порядок точки λ усеченного норменного спектра, соответственно, $q(\lambda)$.

Из дискретности усеченного норменного спектра вытекает, что гиперболическую дзета-функцию произвольной решетки Λ можно представить как ряд Дирихле:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = {\sum_{\vec{x} \in \Lambda}}' (\overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s)^{-\alpha} = {\sum_{\vec{x} \in \Lambda}}' q(\vec{x})^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} q(\lambda_k) \lambda_k^{-\alpha} = \sum_{\lambda \in Q_{sp}(\Lambda)} q(\lambda) \lambda^{-\alpha}. \tag{18}$$

Так как $D(t|\Lambda) = 0$ при $t < q(\Lambda)$, то

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \alpha \int\limits_{q(\Lambda)}^{\infty} \frac{D(t|\Lambda)dt}{t^{\alpha+1}}. \tag{19}$$

Из равенства (18) следует, что для любого комплексного $\alpha = \sigma + it$ в правой полуплоскости $(\sigma > 1)$ определена регулярная функция комплексного переменного, заданная рядом (14), и справедливо неравенство

$$|\zeta_H(\Lambda|\alpha)| \leqslant \zeta(\Lambda|\sigma). \tag{20}$$

Возникает естественный вопрос о продолжении для произвольной решетки Λ гиперболической дзета – функции решетки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ на всю комплексную плоскость. В работах [41], [37], эти вопросы исследовались для PZ_s – множества всех целочисленных решеток, PQ_s – множества всех рациональных решеток, PD_s – множества всех решеток с диагональными матрицами. Доказано, что для любой целочисленной решетки $\Lambda \in PZ_s$ гиперболическая дзета – функция $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ является регулярной функцией во всей α – плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс порядка s.

Для любой решетки $\Lambda \in PQ_s$ гиперболическая дзета-функция $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ является регулярной аналитической функцией во всей α-плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс порядка s.

Изучено поведение гиперболической дзета-функции решеток на пространстве решеток. В частности, установлено что, если последовательность решеток $\{\Lambda_n\}$ сходится к решетке Λ, то последовательность гиперболических дзета-функций решеток $\zeta_H(\Lambda_n|\alpha)$ равномерно сходится к гиперболической дзета-функции решетки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в любой полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.

Другой результат такого типа формулируется следующим образом. Для любой точки α из α-плоскости, кроме точки $\alpha = 1$, найдется окрестность $|\alpha - \beta| < \delta$ такая, что для любой решетки $\Lambda = \Lambda(d_1, \ldots, d_s) \in PD_s$

$$\lim_{M \to \Lambda} \zeta_H(M|\beta) = \zeta_H(\Lambda|\beta),$$

причем эта сходимость равномерна в окрестности точки α.

Получение этих результатов существенно опирается на асимптотическую формулу для числа точек произвольной решетки в гиперболическом кресте.

В случае целочисленной решетки $\Lambda = Z^s$ вопрос о величине $D(t|\Lambda)$ тесно связан с проблемой делителей Дирихле.

Пусть $D(N) = \sum\limits_{1\leqslant xy\leqslant N} 1 = \sum\limits_{n=1}^{N} \tau(n)$. Хорошо известен результат Дирихле

$$D(N) = N\ln N + (2\gamma - 1)N + O(\sqrt{N}), \tag{21}$$

где γ – константа Эйлера.

Для $\Lambda = Z^2$ мы получаем связь с теоремой Дирихле ([66], с.73). Количество точек решетки Z^2 в гиперболическом кресте выражается через сумматорную функцию для числа делителей

$$D(t|Z^2) = 4[t] + 4D(t). \tag{22}$$

В случае $\Lambda = Z^s$ мы получаем связь с многомерной проблемой делителей Дирихле ([7], с.117):

$$D(t|Z^s) = \sum_{k=1}^{s} C_s^k 2^k D_k(t), \tag{23}$$

где

$$D_k(t) = \sum_{n\leqslant t} \tau_k(n).$$

Л. Дирихле ([67]) был рассмотрен вопрос о поведении среднего значения функции $\tau_k(n)$ и получена асимптотическая формула. Проблемой уточнения остаточного члена для числа точек решетки $\Lambda = Z^s$, $s = 2, 3, \ldots$ занимались Г. Ф. Вороной, Э. Ландау, Г. Харди и Дж. Литтлвуд, Д. Р. Хис-Браун, Г. Ричерт, А. Ивич, А. А. Карацуба, Е. И. Пантелеева (Деза) и др. [7].

Наряду с классическим направлением уточнения теоремы Дирихле для решетки $\Lambda = Z^s$ возникает естественный вопрос об обобщении теоремы Дирихле на случай произвольной решетки Λ. Этими вопросами занималась А. Л. Рощеня в работах [59], [60], [61].

4. Обобщенная гиперболическая дзета-функция решеток

Пусть решетка $\Lambda \subset R^s$ и $s \geqslant 2$ – натуральное число.

Для произвольного вектора $\vec{b} \in R^s$ определим обобщенную гиперболическую дзета–функцию $\zeta_H(\Lambda|\alpha, \vec{b})$ решетки Λ с помощью дзета–ряда

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha, \vec{b}) = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}' (\overline{(x_1 + b_1)} \cdot \ldots \cdot \overline{(x_s + b_s)})^{-\alpha}, \tag{24}$$

который, как будет показано ниже (теорема 1), абсолютно сходится в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$. Здесь $\sum'$ означает, что суммирование проводится по всем точкам решетки Λ, отличным от $-\vec{b}$.

Из определения $\zeta_H(\Lambda|\alpha, \vec{b})$ видно, что при фиксированной решетке Λ и заданном $\alpha = \sigma + it$ $(\sigma > 1)$ функция

$$F(\vec{b}) = \zeta_H(\Lambda|\alpha, \vec{b})$$

будет периодической функцией с решеткой периодов Λ, т.е. для любой точки $\vec{t} \in \Lambda$ и любого $\vec{b} \in R^s$ справедливо равенство

$$F(\vec{b}) = F(\vec{b} + \vec{t}).$$

Отсюда, в частности, следует, что при $\vec{b} \in \Lambda$

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha, \vec{b}) = \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s)^{-\alpha},$$

где $\sum'$ означает, что суммирование проводится по ненулевым точкам решетки Λ; при $\vec{b} \notin \Lambda$

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha, \vec{b}) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda} (\overline{(x_1 + b_1)} \cdot \ldots \cdot \overline{(x_s + b_s)})^{-\alpha}.$$

Для произвольной сдвинутой решетки $\Lambda + \vec{b}$, $\Lambda \in PR_s$ норменным минимумом является величина

$$N(\Lambda + \vec{b}) = \inf_{\vec{x}\in(\Lambda+\vec{b})\setminus\{\vec{0}\}} N(\vec{x}),$$

усеченным норменным минимумом, или гиперболическим параметром, величина

$$q(\Lambda + \vec{b}) = \min_{\vec{x}\in(\Lambda+\vec{b})\setminus\{\vec{0}\}} q(\vec{x}).$$

Так как

$$\max(1, N(\vec{x})) \leqslant q(\vec{x}),$$

то

$$\max(1, N(\Lambda + \vec{b})) \leqslant q(\Lambda + \vec{b}),$$

для любой решетки Λ.

Для произвольного вектора $\vec{b}$ назовем норменным спектром сдвинутой решетки $\Lambda + \vec{b}$ множество значений нормы на ненулевых точках сдвинутой решетки $\Lambda + \vec{b}$:

$$N_{sp}(\Lambda + \vec{b}) = \{\lambda \mid \lambda = N(\vec{x}),\ \vec{x} \in (\Lambda + \vec{b})\setminus\{\vec{0}\}\},$$

соответственно, усеченным норменным спектром сдвинутой решетки $\Lambda + \vec{b}$ — множество значений усеченной нормы на ненулевых точках сдвинутой решетки:

$$Q_{sp}(\Lambda + \vec{b}) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}),\ \vec{x} \in (\Lambda + \vec{b})\setminus\{\vec{0}\}\}.$$

Очевидно, что

$$N(\Lambda + \vec{b}) = \inf_{\lambda\in N_{sp}(\Lambda+\vec{b})} \lambda,$$

$$q(\Lambda + \vec{b}) = \min_{\lambda\in Q_{sp}(\Lambda+\vec{b})} \lambda.$$

Назовем порядком точки спектра количество точек сдвинутой решетки с заданным значением нормы. Если таких точек сдвинутой решетки бесконечно много, то говорим, что точка спектра имеет бесконечный порядок. Порядок точки λ норменного спектра будем обозначать через $n(\lambda)$, а порядок точки λ усеченного норменного спектра, соответственно, $q(\lambda)$. Справедлив следующий аналог леммы 1 из работы [41].

Для любой решетки $\Lambda + \vec{b}$ и любой точки λ из усеченного норменного спектра $Q_{sp}(\Lambda + \vec{b})$ порядок точки λ конечен и $Q_{sp}(\Lambda + \vec{b})$ — дискретен.

Отсюда следует, что

$$Q_{sp}(\Lambda + \vec{b}) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots\}$$

и

$$q(\Lambda + \vec{b}) = \lambda_1, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty.$$

Отсюда вытекает, что обобщенную гиперболическую дзета – функцию произвольной решетки Λ можно представить как ряд Дирихле:

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha,\vec{b}) = \sum_{\vec{x}\in(\Lambda+\vec{b})\setminus\{\vec{0}\}} q(\vec{x})^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} q(\lambda_k)\lambda_k^{-\alpha} = \sum_{\lambda\in Q_{sp}(\Lambda+\vec{b})} q(\lambda)\lambda^{-\alpha}. \tag{25}$$

Теорема 1. *Для любого $\alpha = \sigma + it$ в правой полуплоскости ряд Дирихле $\zeta_H(\Lambda \mid \alpha, \vec{b})$ абсолютно сходится и в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$ равномерно сходится.*

Так как при $\alpha = \sigma + it$ и $\sigma \geqslant \sigma_0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{q(\lambda_k)}{\lambda_k^{\alpha}} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q(\lambda_k)}{\lambda_k^{\sigma_0}} = \zeta_H(\Lambda \mid \sigma_0, \vec{b}),$$

то из теоремы 1 следует, что для любого комплексного $\alpha = \sigma + it$ в правой полуплоскости ($\sigma > 1$) определена регулярная функция комплексного переменного, заданная рядом (24) и справедливо неравенство

$$|\zeta_H(\Lambda|\alpha,\vec{b})| \leqslant \zeta_H(\Lambda|\sigma,\vec{b}).$$

Теорема 2. *Если последовательность решеток $\{\Lambda_n\}$ сходится к решетке Λ, то для любого вектора $\vec{b}$ последовательность обобщенных гиперболических дзета-функций решеток $\zeta_H(\Lambda_n|\alpha,\vec{b})$ равномерно сходится к обобщенной гиперболической дзета-функции решетки $\zeta_H(\Lambda|\alpha,\vec{b})$ в любой полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 > 1$.*

Рассмотрим периодизированную дзета – функцию Гурвица, равную

$$\zeta(\alpha, a) = \sum_{0<n+a} \frac{1}{(n+a)^{\alpha}},$$

$$\zeta(\alpha, a) = \zeta(\alpha, \{a\}), \quad \zeta(\alpha) = \zeta(\alpha, 0) = \zeta(\alpha, 1).$$

Как известно, полагая

$$\}a\{= \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \{a\} = 0, \\ \{a\} & \text{при} \quad \{a\} > 0, \end{cases}$$

имеем следующие представления $\zeta(\alpha, a)$:
при ($\sigma > 0$)

$$\zeta(\alpha, a) = \}a\{^{-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{2} + \{-a\} + \alpha \int_1^{\infty} \frac{\frac{1}{2} - \{x-a\}}{x^{\alpha+1}}\, dx;$$

при ($\sigma > -1$)

$$\zeta(\alpha, a) = \}a\{^{-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{2} + \{-a\} - \frac{\alpha}{2}(\{-a\} - \{-a\}^2) +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_1^{\infty} \frac{\{x-a\} - \{x-a\}^2}{x^{\alpha+2}}\, dx;$$

при ($\sigma < 0$)

$$\zeta(\alpha, a) = 2(2\pi)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) \times$$
$$\times \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n a)}{n^{1-\alpha}} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n a)}{n^{1-\alpha}} \right).$$

Функция $\zeta(\alpha, a)$ — регулярная функция во всей α-плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс первого порядка с вычетом, равным 1.

С помощью периодизированной дзета-функции Гурвица удается доказать существование аналитического продолжения для обобщенной гиперболической дзета-функции решёток.

Теорема 3. *Для любого вектора $\vec{b} \in R^s$ и любой целочисленной решетки $\Lambda \in PZ_s$ обобщенная гиперболическая дзета – функция $\zeta_H(\Lambda|\alpha, \vec{b})$ является регулярной функцией во всей α–плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс порядка s.*

Теорема 4. *Для любого вектора $\vec{b} \in R^s$ и любой решетки $\Lambda \in PQ_s$ обобщенная гиперболическая дзета – функция $\zeta_H(\Lambda|\alpha, \vec{b})$ является регулярной функцией во всей α – плоскости, за исключением точки $\alpha = 1$, в которой она имеет полюс порядка s.*

Важность обобщенной гиперболической дзета-функции решёток вытекает из следующего.

Рассмотрим вопрос о приближенном вычислении коэффициента Фурье

$$c(\vec{m}) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{x})} d\vec{x}$$

с помощью квадратурной формулы с параллелепипедальными сетками:

$$c(\vec{m}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) e^{-2\pi i\frac{(m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s)k}{N}} - R_{N,\vec{m}}[f],$$

где $R_{N,\vec{m}}[f]$ – линейный функционал погрешности приближенного вычисления коэффициента Фурье $c(\vec{m})$.

Рассмотрим норму линейного функционала погрешности $R_{N,\vec{m}}[f]$ на классе E_s^α:

$$\|R_{N,\vec{m}}[f]\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}=1} |R_{N,\vec{m}}[f]|.$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 5. *Для нормы линейного функционала погрешности $R_{N,\vec{m}}[f]$ справедливо равенство*

$$\|R_{N,\vec{m}}[f]\|_{E_s^\alpha} = \delta_\Lambda(\vec{m}) + \zeta_H(\Lambda \mid \alpha, \vec{m}) - (\overline{m}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{m}_s)^{-\alpha},$$

где

$$\delta_\Lambda(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \vec{m} \in \Lambda, \\ 0, & \text{если} \quad \vec{m} \notin \Lambda, \end{cases}$$

$\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s, N)$ *– решетка решений сравнения*

$$a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s \equiv 0 \pmod{N},$$

и

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha, \vec{m}) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x_1 + m_1} \cdot \ldots \cdot \overline{x_s + m_s})^{-\alpha}$$

– обобщенная гиперболическая дзета-функция решетки Λ.

Следствие 1. *При $\alpha = 2n$, n – натуральное, для любой целочисленной решетки $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$ и целочисленного вектора $\vec{m}$ справедливо равенство*

$$\zeta_H(\Lambda \mid 2n, \vec{m}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\prod_{j=1}^{s}\left(1 - \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n)!} \cdot B_{2n}\left(\left\{\frac{a_j k}{N}\right\}\right)\right)\right) \times$$
$$\times e^{-2\pi i\frac{(m_1 a_1 + \ldots + m_s a_s)k}{N}} - \delta_\Lambda(\vec{m}),$$

где $B_{2n}(\vec{x})$ – полином Бернулли.

5. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции решёток

С помощью периодизированной дзета-функции Гурвица достаточно просто удаётся получить существование аналитического продолжения гиперболической дзета-функции решёток для случая целочисленных решёток и рациональных, но получение функционального уравнения, которое было бы аналогом функционального уравнения для дзета-функции Римана, вызывало определённые трудности.

Первый результат в этом напрвлении был получен Н. М. Добровольским и относился к случаю решётки решений линейного сравнения (1).

Следующий существенный шаг был сделан только в 2006 году М. Н. Добровольским, который нашёл функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции произвольной целочисленной решётки [14]–[19]. Ключом к получению функционального уравнения в случае произвольной целочисленной решётки послужило использование тригонометрических сумм сеток и некоторых рядов Дирихле с периодическими коэффициентами.

Следующее продвижение потребовало ещё шесть лет. В 2012 году удалось в большой коллективной работе получить функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки [11]–[12].

К сожалению, нас не устраивает форма этого функционального уравнения. Нам не удалось получить его в таком виде, чтобы и в левую, и в правую части входили только гиперболические дзета-функции решётки и взаимной решётки. Дело в том, что если бы удалось получить функциональное уравнение в таком виде, то в нём можно было бы переходить к пределу по последовательности решёток, так как если существует предел решёток, то существует и предел взаимных решёток и он будет равен взаимной решётке к предельной решётке. А так как множество декартовых решёток всюду плотно в пространстве всех решёток, то отсюда следовало бы существование аналитического продолжения гиперболической дзета-функции произвольной решётки и, по-видимому, функциональное уравнение.

Разработка этого направления привела естественным образом к необходимости разобраться с одномерным случаем. Так появилось понятие гиперболической дзета-функции Гурвица, теория которой была построена в работе [33].

Хотя вопрос об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции алгебраических решёток остается открытым, но в последнее время удалось продвинуться в уточнении асимптотической формулы в случае квадратичных, кубических и биквадратичных чисто вещественных полей. Остановимся только на случае квадратичного поля, так как следующие два слишком громоздкие.

Обозначим через $\zeta_{D_0}(\alpha|F)$ дзета-функцию Дедекинда главных идеалов квадратичного поля F:

$$\zeta_{D_0}(\alpha|F) = \sum_{(\omega)} |N(\omega)|^{-\alpha},$$

тогда

$$\zeta'_{D_0}(\alpha|F) = -\sum_{(\omega)} \ln(N(\omega))|N(\omega)|^{-\alpha}.$$

Теорема 6. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = \frac{2(\det\Lambda)^\alpha \zeta_{D_0}(\alpha|F)}{R}\cdot\frac{\ln\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^\alpha} -$$
$$-\frac{2(\det\Lambda)^\alpha}{R(\det\Lambda(t))^\alpha}\left(\ln(\det\Lambda)\,\zeta_{D_0}(\alpha|F)+\zeta'_{D_0}(\alpha|F)\right)+$$
$$+\frac{2(\det\Lambda)^\alpha\zeta_{D_0}(\alpha|F)}{(\det\Lambda(t))^\alpha}\left(\theta_1(\alpha)+\frac{\theta_2(\alpha)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha R}{2}\right)}\right),$$

где $|\theta_1(\alpha)|\leqslant 1$ *и* $\frac{1}{\varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}}\leqslant\theta_2(\alpha)\leqslant\varepsilon_0^{(1)\frac{\alpha}{2}}$, ε_0 *— фундаментальная единица квадратичного поля* F *и* R *— регулятор этого поля.*

6. Основные направления современных исследований

В работе [30] были выделены следующие основные направления современных исследований по развитию теории гиперболической дзета-функции решёток:

1. Проблема правильного порядка убывания гиперболической дзета-функции при вещественных $\alpha\to\infty$.
2. Проблема существования аналитического продолжения в левую полуплоскость $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma\leqslant 1)$ гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$.
3. Аналитическое продолжение для случая решёток С. М. Воронина $\Lambda(F,q)$.
4. Аналитическое продолжение для случая решётки совместных приближений.
5. Аналитическое продолжение для случая алгебраической решётки $\Lambda(t,F)=t\Lambda(F)$.
6. Аналитическое продолжение для случая произвольной решётки Λ.
7. Проблема поведения гиперболической дзета-функции решётки $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ в критической полосе.
8. Проблема значений тригонометрических сумм сеток.

Коротко остановимся на сути этих проблем.

Правильным порядком убывания последовательности гиперболических дзета-функций $\zeta(\Lambda_n|\alpha)$ при $\det\Lambda_n\to\infty$ называется наименьший возможный порядок $s-1$, когда при $\alpha>1$

$$\zeta(\Lambda_n|\alpha)=O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda_n}{\det^\alpha\Lambda_n}\right)\quad\text{при }\det\Lambda_n\to\infty\quad(n\to\infty,\,\alpha\to\infty).$$

Из асимптотической формулы (12) для дзета-функции алгебраической решётки следует, что на классе алгебраических решёток правильный порядок достижим. Из непрерывности гиперболической дзета-функции на пространстве решёток следует, что правильный порядок убывания гиперболической дзета-функции решёток достижим на классе рациональных решёток. Действительно, достаточно брать рациональные решётки из очень маленьких окрестностей алгебраических решёток.

Возникает естественный вопрос, а на классе целочисленных решёток правильный порядок убывания достижим или нет?

Если достижим, то необходимо указать алгоритм построения таких оптимальных параллелепипедальных сеток, для которых будет правильный порядок погрешности приближенного интегрирования на классах E_s^α. Другими словами, в этом случае необходимо построить алгоритм вычисления модуля N и оптимальных коэффициентов по модулю N, для которых выполняется оценка

$$\zeta(\Lambda(1, a_1, \ldots, a_{s-1}; N)|\alpha) = O\left(\frac{\ln^{s-1} N}{N^\alpha}\right), \quad (\alpha > 1),$$

где $\Lambda(1, a_1, \ldots, a_{s-1}; N)$ — решётка решений сравнения

$$m_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_{s-1} m_{s-1} \equiv 0 \pmod N.$$

Если такой порядок недостижим, то мы получим некоторый аналог теоремы Лиувиля—Туэ—Зигеля—Рота ([63]) для алгебраических решёток, так как отсутствие правильного порядка будет означать, что алгебраические решётки нельзя хорошо приближать целочисленными.

Мы не будем останавливаться на описании следующих пяти направлений, так как они подробно освещены в работе [30]. Перейдем сразу к двум последним.

На важность проблемы поведения гиперболической дзета-функции решётки в критической полосе указывал в беседах Н. М. Коробов. Он высказывал гипотезу, что аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решётки в критическую полосу из правой полуплоскости и аналитическое продолжение в критическую полосу гиперболической дзета-функции взаимной решётки или присоединённых решёток из левой полуплоскости позволит получать константы в соответствующих теоремах переноса.

Естественно, что для этого необходимо получить явные формулы для гиперболической дзета-функции решётки в критической полосе. Причём необходимо иметь две формулы — через характеристики решётки и через характеристики взаимной решётки.

По мнению Н. М. Коробова аналитическое продолжение гиперболической дзета-функции решёток является аналогом теоремы А. О. Гельфонда, которая является своеобразной формой теоремы переноса.

Что касается проблемы значений тригонометрических сумм сеток, то здесь ситуация следующая.

Нормированные тригонометрические суммы параллелепипедальных сеток имеют два значения: 0 и 1.

Для нормированных тригонометрических сумм двумерных сеток Смоляка таких значений три: 0, 1 и -1 (см. [43]).

Для нормированных тригонометрических сумм неравномерных сеток имеется или хорошая равномерная оценка $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, или они равны 1.

Очень важно получить оценки нормированных тригонометрических сумм для алгебраических сеток.

Если эти суммы имеют спектр значений, не сосредоточенный около точек 0 и 1, то алгебраические сетки нельзя хорошо приблизить параллелепипедальными сетками, а алгебраические решётки нельзя хорошо приблизить целочисленными решётками.

В последнее время в этом направлении сделан определённый прогресс. Е. М. Раровой в работе [56] удалось получить следующий результат.

Пусть $\rho_1(x) = 1 - |x|$ и $\rho_1(\vec{x}) = \prod_{j=1}^s \rho_1(x_j)$. Рассмотрим тригонометрическую сумму с весами алгебраической сетки

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x} \in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\} = \vec{x},\, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho_1(\vec{y}) \right) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})}.$$

Теорема 7. *При $t \to \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \quad (26)$$

Теорема 8. *При $t \to \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^2\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \quad (27)$$

Более подробно с состоянием теории гиперболической дзета-функции решёток можно познакомиться по работам [11, 13, 12, 23, 30, 31, 33, 34, 37, 41].

7. Дзета-функция моноидов натуральных чисел

В процессе анализа различных одномерных случаев неожиданно возник вопрос о дзета-функциях моноидов натуральных чисел. Среди всех моноидов натуральных чисел особое место занимают моноиды с однозначным разложением на простые элементы. Здесь важно подчеркнуть, что среди простых элементов моноида встречаются как простые числа, так и псевдопростые числа. В работе [44] начаты эти исследования, а в [45] продолжены.

В коллективной работе [46] авторы столкнулись с интересным явлением.

Пусть $\mathbb{P}_1$ — произвольное бесконечное подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$, $p_1 < < p_2 < p_3 < \ldots$ — естественная нумерация всех простых чисел из $\mathbb{P}_1$ и $\vec{p}_n = (p_1, \ldots, p_n)$ для любого натурального n.

Теорема 9. *Для любого $\mathbb{P}_1$ справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{n\to\infty}\zeta^-(M(\vec{p}_n)|\alpha) = 0 \quad \textit{при } \sigma < 0, \quad (28)$$

$$\lim_{n\to\infty}\zeta^+(M(\vec{p}_n)|\alpha) = \zeta(M(\mathbb{P}_1)|\alpha) \quad \textit{при } \sigma > \sigma_{\mathbb{P}_1}, \quad (29)$$

где $\sigma_{\mathbb{P}_1} \leqslant 1$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$.

При этом для любой полуплоскости с $\sigma \leqslant \sigma_0 < 0$ сходимость в (28) равномерная, а в (29) эта сходимость равномерная для любой полуплоскости с $\sigma \geqslant \sigma_0 > \sigma_{\mathbb{P}_1}$.

Следствие 2. *Для любого бесконечного множества простых $\mathbb{P}_1$ не существует аналитической функции равной*

$$\lim_{n\to\infty}\zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$$

на всей комплексной плоскости.

Аналогичное утверждение справедливо для $\sigma > \sigma_{\mathbb{P}_1}$

$$\lim_{n\to\infty}\zeta^*(M(\vec{p}_n)|\alpha),$$

так как в правой полуплоскости предел равен $\zeta^*(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$, а в левой полуплоскости $\sigma < 0$ каждая точка будет особой точкой предельной функции.

Авторы попытались дать следующее объяснением данного явления Если рассмотреть последовательность дзета-функций $\zeta(M(\vec{p}_n)|\alpha)$ мероморфных функций на комплексной α-плоскости, то мы имеем вложенную последовательность множеств полюсов этих функций:

$$S(M(\vec{p}_1)) \subset S(M(\vec{p}_2)) \subset \ldots \subset S(M(\vec{p}_n)) \subset \ldots,$$

которая сходится к множеству $S(M(\mathbb{P}_1))$, заданному равенством

$$S(M(\mathbb{P}_1)) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(M(\vec{p}_n)).$$

Нетрудно видеть, что множество $S(M(\mathbb{P}_1))$ всюду плотно на мнимой оси, поэтому если доказать что $S(M(\mathbb{P}_1))$ является множеством особых точек, то оно будет выполнять функции заградительного ряда для аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_1))|\alpha)$, когда $\sigma_{\mathbb{P}_1} = 0$.

Для случая $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}$ это заведомо не так, так как $\sigma_{\mathbb{P}} = 1$ и на прямой $\sigma = 1$ имеется только один полюс дзета-функции Римана.

Поэтому авторы выдвинули следующую гипотезу.

Гипотеза. *Для любого экспоненциального множества PE простых чисел множество $S(M(PE))$ является множеством особых точек дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ моноида $M(PE)$ и образует заградительный ряд для существования аналитического продолжения дзета-функции $\zeta(M(PE)|\alpha)$ в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$.*

Аналогично, $S(M(PE))$ является множеством нулей функции $\zeta^*(M(PE)|\alpha)$ и образует заградительный ряд для существования аналитического продолжения дзета-функции $\zeta^*(M(PE)|\alpha)$ в левую полуплоскость $\sigma \leqslant 0$.

8. Заключение

Из предыдущего видно, что последние 33 года теория гиперболической дзета-функции решёток активно развивается Тульской школой теории чисел, в возрождении которой существенную роль сыграли профессора Н. М. Коробов и В. И. Нечаев.

Под руководством В. И. Нечаева были защищены две диссертации аспирантками из Тулы: А. Л. Рощеней (1998 г.) и И. Ю. Ребровой (2000 г.). Их диссертации были целиком посвящены изучению гиперболической дзета-функции решёток и обобщённой гиперболической дзета-функции решёток.

Эта тематика находилась под пристальным вниманием профессора Н. М. Коробова. В июне 2000 г. состоялась защита докторской диссертации Н. М. Добровольского, на которой Н. М. Коробов выступал как научный консультант.

Во втором издании своей монографии [53] Н. М. Коробов целый раздел посвятил результатам, полученным в Тульской школе теории чисел.

Всё выше сказанное позволяет говорить об определяющей роли Н. М. Коробова в судьбе Тульской школы теории чисел и в истории развития теории гиперболической дзета-функции решёток, которую трудно переоценить.

Авторы выражают свою благодарность профессору Н. М. Добровольскому за постоянное внимание и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

2. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

3. Быковский В.А. О правильном порядке погрешности оптимальных кубатурных формул в пространствах с доминирующей производной и квадратичных отклонениях сеток // Препринт. Владивосток. 1985.

4. Быковский В.А. Экстремальные кубатурные формулы для анизотропных классов // Препринт. Хабаровск. 1995, с. 1 - 13.

5. Воронин С.М. О квадратурных формулах // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. N 5, с. 189 - 194.

6. Воронин С.М. О построении квадратурных формул // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. N 4.

7. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета – функция Римана. М.: ФизМатЛит, 1994.

8. Воронин С.М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Матем. заметки, 1989, Т. 46, N 2, с. 34 - 41.

9. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М.; Л.: Гостехиздат, 1940.

10. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2017. Том 18 № 4(64). С. 6-85.

11. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с. http://elibrary.ru/item.asp? id=20905960

12. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

13. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices // Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. doi: 10.1007/978-3-319-03146-0_2.

14. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82–90.

15. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник 2004. Т. 5, вып. 1(9). С. 95–121.

16. Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // Чебышевский сборник 2006. Т. 3, вып. 2(4). С. 43–59.

17. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. // ДАН. Т. 412, № 3, Январь 2007. С. 302–304.

18. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. № 3. С. 18–23.

19. Добровольский М. Н. Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, МГУ 2009.

20. Добровольский Н. М. Эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении // УМН. Т. 39 (123). 1984. С. 155–156.

21. Добровольский Н. М. Оценки отклонений модифицированных сеток Хэммерсли — Рота. / Деп. в ВИНИТИ 23.02.84, N 1365–84.

22. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6089–84.

23. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, N 6090–84.

24. Добровольский Н.М. О квадратурных формулах на классах E_s^α и H_s^α. Деп. ВИНИТИ, N 6091-84.

25. Добровольский Н.М. Теоретико – числовые сетки и их приложения: Дис. ... канд. физ. - мат. наук. – Тула, 1984.

26. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения: / Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

27. Добровольский Н. М. Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

28. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения: / Дис. ... док. физ.–мат. наук. Москва, 2000.

29. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и их приложения / Н. М. Добровольский. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

30. Н. М. Добровольский О современных проблемах теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2015. Т. 16, вып. 1. С. 176–190.

31. Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета-функция алгебраических решёток. / Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, N 2327–В90.

32. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, Д. К. Соболев, В. Н. Соболева Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб., 2017. Т. 18, вып. 2. С. 98–128.

33. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб., 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

34. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Е. И. Юшина Гиперболическая дзета-функция решётки квадратичного поля // Чебышевский сб., 2015. Т. 16, вып. 4. С. 100–149.

35. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток. // Чебышевский сборник, Т. 2, Тула, 2001, С. 41–53.

36. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Об оценке погрешности квадратурных формул с оптимальными параллелепипедальными сетками // Чебышевский сборник. 2002 Т. 3, вып. 1(3). С. 41–48.

37. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решеток // Мат. заметки. Т. 63, вып. 4. 1998. С. 522–526.

38. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Устян А. Е., Подсыпанин Ф. В., Подсыпанин Е. В. Тульская школа теории чисел (к 105-летнему юбилею Владимира Дмитриевича Подсыпанина (16.01.1910 - 11.10.1968) и 65-летию Тульской школы теории чисел) // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 20-85.

39. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб. тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

40. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.

41. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2, вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77–87.

42. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решетки в гиперболическом кресте // Матем. заметки, 1998, Т.63. Вып. 3, с.363–369.

43. Добровольский Н. Н. Отклонение двумерных сеток Смоляка // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 1(21). С. 110–152.

44. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

45. Н. Н. Добровольский О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С.

46. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 106–123.

47. Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965.

48. Коробов Н.М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // Докл. АН СССР, 1957. Т.115, N 6, с. 1062-1064.

49. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207–1210.

50. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19–25.

51. Коробов Н.М. Теоретико – числовые методы в приближенном анализе. М.: Наука, 1963

52. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83—90.

53. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) / М.: МЦНМО, 2004.

54. Коробов Н. М. О некоторых свойствах специальных полиномов // Труды IV Международной конференции " Современные проблемы теории чисел и ее приложения" Чебышевский сборник. 2001. Т. 1. С. 40–49.

55. Н. М. Коробов, Н. М. Добровольский Критерии оптимальности и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 105–128.

56. Е. М. Рарова О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1(69). С. – .

57. Реброва И.Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета – функции решеток и ее аналитическое продолжение// Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3, с. 99-108.

58. И. Ю. Реброва Н. М. Коробов и Тульская школа теории чисел // В сборнике "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения" : Материалы XV Междунар. конф., посвященной столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова. — Тула: ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2018. — 392 с. С. 368–371.

59. Рощеня А.Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек целочисленной решетки в гиперболическом кресте // Тезисы докладов III-й Межд. конф. "Современные проблемы теории чисел и ее приложения". Тула, 1996. С. 120.

60. Рощеня А.Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек сдвинутой решетки под гиперболой $x \cdot y = N$. Тула, 1996. Деп. в ВИНИТИ. N 2743-В-96.

61. Рощеня А.Л. Обобщение теоремы Дирихле о числе точек целочисленной решетки в гиперболическом кресте. Тула, 1997. Деп. в ВИНИТИ. N 2087-N-97.

62. Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных // Матем. сб. 1990. Т. 181. N 4, с. 490 - 505.

63. Фельдман Н. И. Приближение алгебраических чисел. М.: Изд-во Московского университета, 1981.

64. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818 — 821.

65. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

66. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.

67. Dirichlet L. Uber die Bestimmung der mitteleren Werte in der Zahlentheorie // Abh. Akad. Berlin (Werke, 2, 49-66)–1849. Math. Abh., 69-83.

REFERENCES

1. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

2. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. 1985, Number theory. M.: Science, 507 p.

3. Bykovskij, V.A 1985, O pravil'nom poryadke pogreshnosti optimal'nykh kubaturnykh formul v prostranstvakh s dominiruyushhej proizvodnoj i kvadratichnykh otkloneniyakh setok [About the right order of error of optimal cubature formulas in space with dominating derivative and quadratic deviations of grids], Preprint DVNTS AN SSSR, Vladivostok, Russia.

4. Bykovskij, V.A 1995, Ehkstremal'nye kubaturnye formuly dlya anizotropnykh klassov [Extremal cubature formulas for anisotropic classes], Preprint, Khabarovsk, Russia.

5. Voronin, S.M. 1994, "On quadrature formulas", Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya, vol. 58, no. 5, pp. 189–194.

6. Voronin, S.M. 1995, "About the construction of quadrature formulas", Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Seriya matematicheskaya, vol. 59, no. 4.

7. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

8. Voronin, S.M. & Temirgaliev, N. 1989, "On quadrature formulas associated to divisors of the field of Gaussian numbers", Matematicheskie zametki, vol. 46, no. 2, pp. 34–41.

9. Hecke, E., Lectures on the theory of algebraic numbers. M.; L.: Gostekhizdat, 1940.

10. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.

11. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i algoritmy poiska optimal'nykh koehffitsientov [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. L.N. Tolstogo, Tula, Russia.

12. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

13. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices", Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, pp. 23–62.

14. Dobrovol'skii, M. N. 2003, "Estimates of sums over a hyperbolic cross", Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.9, no. 1, pp. 82-90.

15. Dobrovol'skii, M. N. 2004, "The optimum coefficients of the combined meshes", Chebyshevskij sbornik, vol. 5, no. 1(9), pp. 95–121.

16. Dobrovol'skii, M. N. 2006, "Dirichlet series with periodic coefficients and a functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.

17. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Doklady akademii nauk, vol. 412, no. 3, pp. 302–304.

18. Dobrovol'skii, M. N. 2007, "Functional equation for hyperbolic dzeta-function of integer lattices", Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, no. 3, pp. 18–23.

19. Dobrovol'skii, M. N. 2009, Some number-theoretic methods of approximate analysis, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, Russia.

20. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "An effective proof of Roth's quadratic deviation theorem", Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 39(123), pp. 155–156.

21. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Estimates of variance of modified grids Hammersly Rota", Dep. v VINITI, no. 1365– 84.

22. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.

23. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.

24. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", Dep. v VINITI, no. 6091–84.

25. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Number-theoretic meshes and their applications", Ph.D. Thesis, Tula, Russia.

26. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Abstract of Ph.D. dissertation, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

27. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Teoriya chisel i ee prilozheniya: Tezisy dokladov Vsesoyuznoj konferentsii, Tbilisi, USSR, pp. 67–70.

28. Dobrovol'skii, N. M. 2000, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications", D. Sc. Thesis, Tula State Pedagogical University, Tula, Russia.

29. Dobrovol'skii, N. M. 2005, Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i ikh prilozheniya [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni L.N.Tolstogo, Tula, Russia.

30. Dobrovol'skii, N. M. 2015, "On modern problems of the theory of hyperbolic Zeta function of lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 16, no. 1, pp. 176–190.

31. Dobrovol'skii, N. M., Van'kova, V.S. & Kozlova, S. L. 1990, "The hyperbolic Zeta function of algebraic lattices", Dep. v VINITI, no. 2327– B90.

32. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Sobolev, D.K. & Soboleva, V.N. 2017, "Classification of pure-real algebraic irrationalities", Chebyshevskij sbornik, vol. 18, no. 2, pp. 98–128.

33. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Sobolev, D.K., Soboleva, V.N., Dobrovol'skaya, L. P. & Bocharova, O. E. 2016, "On the hyperbolic Hurwitz Zeta function ", Chebyshevskij sbornik, vol. 17, no. 3, pp. 72–105.

34. Dobrovol'skii, N. M., Dobrovol'skii, N. N., Soboleva, V.N., Sobolev, D.K. & Yushina, E.I. 2015, "Hyperbolic dzeta-function of lattices of quadratic fields", Chebyshevskij sbornik, vol. 16, no. 4, pp. 100–149.

35. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2001, "The optimal coefficients for mixed meshes", Chebyshevskij sbornik, vol. 2, pp. 41–53.

36. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2002, "On the error estimation of quadrature formulas with optimal parallelepipedal grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 1(3), pp. 41–48.

37. Dobrovol'skii, N. M., Rebrova, I. YU. & Roshhenya, A.L. 1998, "Continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices", Matematicheskie zametki, vol. 63, no. 4, pp. 522–526.

38. Dobrovolsky N. M., Rebrov I. Y., A. E. Ustyan, podsypanin F. V., E. V. podsypanin Tula school of number theory (to the 105th anniversary of Vladimir Dmitrievich Podsypanina (16.01.1910 - 11.10.1968) and the 65th anniversary of the Tula school of number theory) // In the book: Algebra, number theory and discrete geometry: contemporary issues and applications proceedings of the XIII International conference. Tula state pedagogical University. L. N. Tolstoy. 2015. S. 20-85.

39. Dobrovol'skii, N. M. & Roshhenya, A.L. 1995, "On the number of lattice points in a hyperbolic cross", Algebraicheskie, veroyatnostnye, geometricheskie, kombinatornye i funktsional'nye metody v teorii chisel: Sbornik tezisov doklada II Mezhdunarodnoj konferentsii [Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Proceedings of the II international conference], Voronezh, Russia, p. 53.

40. Dobrovol'skii, N. M. & Roshhenya, A.L. 1996, "On the analytic continuation of the hyperbolic Zeta function of rational lattices", Sovremennye problemy teorii chisel i ee prilozheniya: Sbornik tezisov doklada III Mezhdunarodnoj konferentsii [Modern problems of number theory and its applications: Proceedings of the III international conference], Tula, Russia, p. 49.

41. Dobrovol'skii, N. M. & Roshhenya, A.L. 1996, "On continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 2, no. 1, pp. 77–87.

42. Dobrovol'skii, N. M.; Roshchenya, A. L. 1998, "On the number of points in a lattice in a hyperbolic cross." , *Mat. Zametki.* Vol. 63, no. 3, pp. 363–369. (Russian); translation in Math. Notes. 1998. Vol. 63, no. 3–4, pp. 319–324.

43. Dobrovol'skii, N. N. 2007, "Deviation of two-dimensional Smolyak grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 1(21), pp. 110–152.

44. Dobrovolsky N. N., 2017, *The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, № 4. P. 187–207.

45. Dobrovolsky N. N., 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, № 1. P. 79–105.

46. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 106–123.

47. Kassels, Dħ. V. S. 1965, "Vvedenie v geometriyu chisel." , (Russian) [An introduction to the geometry of numbers] Translated from the English by A. N. Andrianov and I. V. Bogacenko. Edited by A. V. Malyshev *Izdat. "Mir", Moscow* 421 pp.

48. Korobov, N.M. 1957, "Approximate evaluation of multiple integrals by using methods of the theory of numbers", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 115, no. 6, pp. 1062–1065.

49. Korobov, N.M. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

50. Korobov, N.M. 1959, “The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients”, Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

51. Korobov, N.M. 1963, O teoretiko-chislovykh metodakh v priblizhennom analize [On number-theoretic methods in approximate analysis], Mashgiz, Moscow, Russia.

52. Korobov, N.M., “On some problems of number theory arising from the needs of approximate analysis”, Soobshhenie na IV matematicheskom s"ezde (ne opublikovano).

53. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

54. Korobov, N.M. 1994, “Quadrature formulas with combined grids”, Matematicheskie zametki, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.

55. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

56. Rarova, 2018, “Weighted number of points of algebraic net”, // Chebyshevskij sbornik, vol. 19, no. 1, pp. – .

57. Rebrova, I.YU. 1996, “Continuity of the hyperbolic Zeta function of lattices”, Tezisy dokladov III Mezhdunarodnoj konferentsii: Sovremennye problemy teorii chisel (Abstracts of the III international conference: modern problems of number theory), Tula, Russia, p. 119.

58. Rebrova, I.YU. 1998, “Continuity of the generalized hyperbolic lattice Zeta function and its analytic continuation”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.

59. Rebrova, I.YU. 1999, The space of lattices and functions on it, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

60. Roshhenya, A.L. 1996, “Generalization of Dirichlet’s theorem on the number of points of an integer lattice in a hyperbolic cross”, Tezisy dokladov III Mezhdunarodnoj konferentsii: Sovremennye problemy teorii chisel (Abstracts of the III international conference: modern problems of number theory), Tula, Russia, p. 120.

61. Roshhenya, A.L. 1996, “A generalization of Dirichlet’s theorem on the number of points of a shifted lattice under hyperbole $x \cdot y = N$”, Dep. v VINITI, no. 2743–B–96.

62. Roshhenya, A.L. 1997, “Generalization of Dirichlet’s theorem on the number of points of an integer lattice in a hyperbolic cross”, Dep. v VINITI, no. 2087–N–97.

63. Roshhenya, A.L. 1998, Analytic continuation of the hyperbolic Zeta function of lattices, Ph.D. Thesis, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

64. Temirgaliev, N. 1990, “Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of many variables ”, Matematicheskij sbornik, vol.181, no. 4, pp. 490–505.

65. Fel’dman, N. I. 1981, "Priblizheniya algebraicheskikh chisel." (Russian) [Approximations of algebraic numbers] *Moskov. Gos. Univ.*, Moscow, 200 pp.

66. Frolov, K.K. 1976, “Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions”, Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

67. Frolov, K.K. 1979, Quadrature formulas on classes of functions, Ph.D. Thesis, Vychislitel’nyj tsentr Akademii Nauk SSSR, Moscow, USSR.

Получено 24.04.2018
Принято в печать 17.08.2018