ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 517.513 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-333-339

Континуальные теоремы сложения для функций Мейера и Макдональда

Нижников Александр Иванович — доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математической физики Московского педагогического государственного университета, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru
Муханов Сергей Александрович — кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Математика», Московский политехнический университет.
e-mail: s_a_mukhanov@mail.ru

Аннотация

Специальные функции математической физики составляют основу математического аппарата в разнообразных областях анализа, прикладной математики, математической физики и квантовой механики. Хотя анализу свойств специальных функций уделяется традиционно большое внимание, тем не менее, огромное количество формул, часто эквивалентных или близких по структуре, а также большое разнообразие приемов, используемых для их вывода, указывают на отсутствие единых начал в этой важной области анализа, что создает определенные трудности как для систематизации известных свойств специальных функций, так и для вывода новых соотношений. В связи с этим, использование теоретико-группового подхода к изучению базисных функций неприводимых представлений полупростых групп дает технически эффективный и удобный для приложений метод вывода новых свойств, интегральных соотношений и континуальных теорем сложения для специальных функций. В этой работе рассмотрены лишь вырожденные унитарные представления группы O(3,1), построены функции на конусе, реализующие эти представления, вычислены коэффициенты перехода между различными базисными функциями, отвечающими редукции группы Лоренца на различные подгруппы. В работе также показано, что формулы, содержащие функции Мейера и Макдональда можно получить используя представления группы Лоренца.

Ключевые слова: Континуальные теоремы сложения, функции Мейера и Макдональда, теоретико-групповые методы.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. И. Нижников, С. А. Муханов. Континуальные теоремы сложения для функций Мейера И Макдональда // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 333–339.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 517.513 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-333-339

Continual addition theorems for Meyer and Mcdonald functions

Nijnikov Alexander Ivanovich — doctor of pedagogical sciences, professor, head of chair of the mathematical physics of the Moscow Pedagogical State University, honored worker of the higher school of the Russian Federation.
e-mail: ainizhnikov@mail.ru, nizhnikov.ai@mail.ru
Mukhanov Sergey Alexandrovich — candidate of pedagogical sciences, associate professor, Department of Mathematics, Moscow Polytechnic University.
e-mail: s_a_mukhanov@mail.ru

Abstract

Special functions of mathematical physics form the basis of the mathematical apparatus in various fields of analysis, applied mathematics, mathematical physics, and quantum mechanics. Special attention is paid to the analysis of the properties of special functions. However, a huge number of formulas, often equivalent or similar in structure, as well as a wide variety of techniques used for their derivation, indicate the absence of unified principles in this important area of analysis. This causes certain difficulties for the systematization of known properties of special functions and for the derivation of new relations. A group-theoretic method to the study of basis functions of irreducible representations of semisimple groups yields a technically efficient and application-friendly method for deriving new properties, integral relations, and continual addition theorems for special functions. In this paper we consider only degenerate unitary representations of the O(3,1) group, construct functions on the cone that realizing these representations, calculate the transition coefficients between different basis functions corresponding to the reduction of the Lorentz group to different subgroups. It is also shown that formulas containing Meyer and MacDonald functions can be obtained using representations of the Lorentz group.

Keywords: Continual addition theorems, Meyer and McDonald functions, group theoretical methods.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. I. Nizhnikov, S. A. Mukhanov, 2018, "Continual addition theorems for Meyer and Mcdonald functions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 333–339.

1. Введение

Пусть $G = SO(3,1)$ - группа Лоренца, сохраняющая квадратичную форму [2, 8, 9, 10, 11]

$$[x,x] = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Тогда имеем известные разложения группы G:

- G = KAK - разложение Картана,
- G = KAN - разложение Ивасавы,
- G = MANV - разложение Гельфанда-Наймарка-Брюа,

где K - максимальная компактная подгруппа, A - максимальная абелева подгруппа, M - централизатор A в K, N - нильпотентная подгруппа, V - подгруппа, контраградиентная N. [3]

Рассмотрим $\mathfrak{H}_\sigma$ - пространство бесконечно дифференцируемых функций на конусе $[x,x] = 0$, однородных степени σ, где σ - комплексное число.

Квазирегулярное представление $g \to T_\sigma(g)$ группы Лоренца в пространстве $\mathfrak{H}_\sigma$ определяется сдвигом

$$T_\sigma(g) f(x) = f\left(g^{-1}x\right).$$

Это представление неприводимо, если σ не является целым числом. Мы полагаем, что $-2 < \operatorname{Re}\sigma < 0$. Данное условие обеспечивает абсолютную сходимость рассматриваемых интегралов. [13]

Всякая однородная функция на конусе вполне определяется своими значениями на любом многообразии, пересекающем каждую образующую конуса по одному разу. Поэтому пространство $\mathfrak{H}_\sigma$ можно реализовать как пространство бесконечно дифференцируемых функций на многообразии.

Пусть Γ - любое многообразие на конусе, пересекающее каждую образующую только в одной точке. Обозначим через $d\gamma$ меру на этом многообразии, такую что $dx = d(t\gamma) = tdtd\gamma$, $dx = \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{x_0}$ - инвариантная мера на конусе.

Билинейная форма

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Gamma f_1(x) f_2(x) f\gamma$$

определенная на паре пространств $\mathfrak{H}_\sigma$, $\mathfrak{H}_{-\sigma-2}$ инвариантна относительно действия группы Лоренца и не зависит от выбора многообразия на конусе. [4, 6, 7, 16]

Укажем некоторые многообразия и базисы, нужные нам в дальнейшем. [5] Рассмотрим Γ_1 - сечение конуса плоскостью $x_0 = 1$, это сечение является сферой. В качестве параметров точки x выберем координаты x_1, x_2. Координаты x_0 и x_3 выражаются через них по формулам $x_0 = 1$, $x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$.

Обозначим через $< \sigma lk/x >$ базис в пространстве $\mathfrak{H}_\sigma$ соответствующий сечению Γ_1

$$< \sigma lk/x >= x_0^{\sigma-k} C_{l-k}^{\frac{1}{2}+k}\left(\frac{x_3}{x_0}\right)(x_2 + ix_1)^k,$$

где $l = 0,1,2,...,$ $k = -l, -l+1, ..., l-1, l,$ $C_j^i(x)$ - многочлен Гегенбауэра.

Аналогично, Γ_2 - сечение конуса плоскостью $x_0 + x_3 = 1$, это сечение является параболоидом вращения

$$x = \left(\frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{2}, x_1, x_2, \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{2}\right),$$

$$< \sigma\lambda/x >= (x_0+x_3)^{\sigma} \exp \frac{i\left(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2\right)}{x_0+x_3},$$

где λ_1, λ_2 - любые вещественные числа, такие что $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ - базис в пространстве $\mathfrak{H}_\sigma$ соответствующий сечению Γ_2.

И Γ_3 - сечение конуса плоскостью $x_3 = 1$, это сечение является гиперболоидом

$$x^{\pm} = \left(\sqrt{1+x_1^2+x_2^2}, x_1, x_2, \pm 1\right),$$

$$< \sigma k\nu/x >= x_3^{\sigma-k} p^{-k}_{-\frac{1}{2}+iv} \left(\frac{x_0}{x_3}\right) (x_2+ix_1)^k,$$

где $k = 0, \pm 1, ..., \nu > 0$, $P^i_j(x)$ функция Лежандра - базис в пространстве $\mathfrak{H}_\sigma$ соответствующий Γ_3. [1, 12, 15]

2. Теоремы сложения для функций Мейера и Макдональда

Теорема 1. *При* $-2 < \operatorname{Re}\sigma < 0$

$$\frac{(-1)^{l-1} 2^{\sigma+\frac{5}{2}} \Gamma(\sigma+1) \sin\left(\sigma+\frac{3}{2}\right)\pi}{\pi^{\frac{1}{2}}(1+2l)\Gamma(\sigma+1-l)} \cdot \frac{\operatorname{ch}\alpha-1}{\operatorname{sh}\alpha} \left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-1}{\operatorname{ch}\alpha+1}\right)^{\frac{1+2l}{4}} G^{12}_{22}\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-1}{2}\middle|^{\sigma+\frac{1}{2}, -\sigma-\frac{3}{2}}_{-1, -\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{v^{-1}}{\Gamma(-\sigma)} \int\limits_0^{\infty} \rho^{-\sigma-1} K_{\sigma+1}\left(\frac{\rho}{v}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma^2(n+1)\Gamma(n-\sigma)} G^{21}_{13}\left(\frac{\rho^2}{4}\middle|^{-n}_{-\sigma-1, 0}\right) d\rho,$$

где $v = \exp\alpha$, $\lambda = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

Доказательство. Матричные элементы перехода от базиса $< \sigma lk/x >$ на сфере к базису $< \sigma\lambda/x >$ на парабалоиде имеют вид

$$< \sigma lk/\sigma'\lambda >= \frac{i^k \exp(ik\theta)}{2} \left(\frac{2}{\rho}\right)^k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(2k+1)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{l-k} \frac{(-1)^n (l+k+n) 2^{k-\sigma-1}}{(l-k+n)!\Gamma(k+n+1)\Gamma(k-\sigma+n) n!} G^{21}_{13}\left(\frac{\rho^2}{4}\middle|^{-n}_{k-\sigma-1, k}\right),$$

где $\sigma' = -\sigma-2$, $\lambda = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

Отсюда следует, что

$$< \sigma'\lambda/k >= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^{l} < \sigma lk'/\sigma'\lambda > \cdot < \sigma' lk'/x > .$$

Применяя к данным базисным функциям на конусе преобразование Пуассона мы получаем искомую теорему сложения для функций Мейера и Макдональда. [12] □

Теорема 2. *Имеет место соотношение*

$$\frac{(-1)^{\sigma-1} \pi^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch}^{\sigma}\alpha}{\Gamma(\sigma)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n) 2^{n-\sigma-2} \Gamma\left(\frac{n-\sigma-\frac{1}{2}+i\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-\sigma-\frac{1}{2}-i\nu}{2}\right) \operatorname{th}^n\alpha}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-\sigma)} =$$

$$= \frac{v^{-1}}{\Gamma(-\sigma)} \int\limits_0^\infty \rho^{\sigma-1} K_{\sigma+1}\left(\frac{\rho}{v}\right) \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\nu+n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\nu+n\right)\Gamma(\sigma-n+1)}{2^{\sigma+n}\Gamma(n+1)} \times$$

$$\times \left[\frac{(-1)^2 2^k}{\Gamma(n-\sigma)} G_{13}^{11}\left(\frac{\rho^2}{4} \Big|_{0,-\sigma-1}^{-n} \right) + \frac{\exp\left(\frac{i\pi\sigma}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} G_{13}^{20}\left(\frac{\rho^2}{4} \Big|_{-\sigma-1,0}^{-n} \right) \right] d\rho$$

Доказательство. Рассмотрим матричные элементы перехода от базиса $< \sigma k\nu/x >$ на гиперболоиде к базису $< \sigma\lambda/x >$ на параболоиде. Имеем

$$< \sigma k\nu_+/\sigma'\lambda >= \frac{i^k \exp(ik\theta)}{2^{\sigma-k+2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\nu\right)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\nu-n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\nu+n\right)\Gamma(\sigma-k+1-n)}{\Gamma(1-k+n)\,n!} \cdot G_{13}^{11}\left(\frac{\rho^2}{4} \Big|_{k,\frac{k}{2}-\sigma-1}^{-\frac{k}{2}-n} \right),$$

$$< \sigma k\nu_-/\sigma'\lambda >= \frac{i^k \exp(ik\theta)}{2^{\sigma-k+2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\nu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\nu\right)} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\nu+n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\nu+n\right)\Gamma(\sigma-k+1)}{\Gamma(1-k+n)\,n!\exp\left(\frac{i\pi(k-\sigma)}{2}\right)} \cdot G_{13}^{20}\left(\frac{\rho^2}{4} \Big|_{\frac{k}{2}-\sigma-1,k}^{-\frac{k}{2}-n} \right).$$

Из этого следует, что

$$< \sigma k\nu/x >= \int\limits_0^\infty < \sigma k\nu/\sigma'\lambda > \cdot < \sigma\lambda/x > d\rho,$$

где $k' = -k$.

Аналогично доказательству предыдущей теоремы, применим к указанным базисным функциям на конусе преобразование Пуассона и, в результате, получим необходимое интегральное соотношение. [15, 14] □

Другие интегральные соотношения можно получить вычисляя ядра представления $T_\sigma(g)$ в различных базисах. Из сравнения полученных выражений ядер и вытекают новые соотношения для специальных функций.

3. Заключение

Ясно, что мы рассмотрели далеко не все возможные теоремы сложения для специальных функций с помощью различных реализаций представлений групп в пространстве однородных функций. В частности представляет интерес реализация базисных функций неприводимых представлений группы $SO(1,4)$ на конусе 5-мерного пространства Минковского для редукции на различные подгруппы. Важно также иметь формулы преобразований от одной реализации представлений к другой. В дальнейшем мы предполагаем рассмотреть такие вопросы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erdelyi A.Ed. Tables of Integral Transforms. - New York : McGraw-Hill, 1954. - Vol. 1.

2. Kerimov G. A., Verdiev Yi. A. Clebsch-Gordan coefficients of the groups SO(p,1) // Reports on Mathematical Physics. - 1984 г. - No. 2: Т. 20. - с. 247-254.

3. Knapp A. W.,Stein E. M. Interwining Operators for Semisimple Groups // The Annals of Mathematics, Second Series. - 1971 г. - Vol. 93, No. 3. - с. 489-578.

4. Koornwinder T. H. The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics // SIAM J. Appl. Math. - 1973 г. - Т. 25. - с. 236-246.

5. Macfadyen N. W. The reduction $O(3,1) \supset O(2,1) \supset O(1,1)$ // Journal of mathematical physics. - 1971 г.. - 3 March. - с. 492-498.

6. Shilin I. A., Nizhnikov A. I. Some formulas for Legendre functions induced by the Poisson transform. // Acta Polytechnica, 2011. Vol. 51 с. 70-73.

7. Shilin I. A., Nizhnikov A. I. Some formulas for Legendre functions related to the Poisson transform and Lorentz group representation. // Journal of Physics: Conference Series, 2012. Vol. 346. с. 1-6.

8. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. - М.: Мир, 1980.

9. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп, М.: Наука, 1991.

10. Виленкин Н. Я., Нижников А. И. Интегральные соотношения для G-функций Мейера и представления n-мерной группы Лоренца // Известия ВУЗов, Математика. - 1979 г. № 5. - с. 13-19.

11. Гельфанд И. М., Граев М. И., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. - М.: Физматлит, 1962

12. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. - С.Пб.: БХВ-Петербург, 2011. - 7-е изд.

13. Нижников А. И. Полупростые группы ранга I и связанные с ними специальные функции. // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. - Тула: Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, 2015. с. 94-97.

14. Нижников А. И, Шилин И. А. Кратные интегральные преобразования и линейные комбинации функций Уиттекера, Макдональда и Бесселя // Преподаватель XXI век. - 2012, No. 1, Т. 2. - с. 227-232.

15. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3-х томах. Том 3. Специальные функции. Дополнительные главы. - М.: Физматлит, 2003. - 2-е изд.

16. Хелгассон С. Группы и геометрический анализ. - Москва : Мир, 1987.

REFERENCES

1. Erdelyi, A. E., 1954. *Tables of Integral Transforms.* Vol. 1. New York: McGraw-Hill.

2. Kerimov, G. A., Verdiev, Y. A., 1984. “Clebsch-Gordan coefficients of the groups SO(p,1)”. *Reports on Mathematical Physics*, **Vol. 20(2)**, pp. 247-254.

3. Knapp, A. W., Stein, E. M., 1971. “Interwining Operators for Semisimple Groups”. *The Annals of Mathematics, Second Series*, **Vol. 93**, No. 3, pp. 489-578.

4. Koornwinder, T. H., 1973. “The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics”. *SIAM J. Appl. Math.*, **Vol. 25**, pp. 236-246.

5. Macfadyen, N. W., 1971. “The reduction $O(3,1) \supset O(2,1) \supset O(1,1)$”. *Journal of mathematical physics*, **Issue 3 March**, pp. 492-498.

6. Shilin, I. A., Nizhnikov, A. I., 2011. “Some formulas for Legendre functions induced by the Poisson transform”. *Acta Polytechnica*, Vol. 51, pp. 70-73.

7. Shilin, I. A., Nizhnikov, A. I., 2012. “Some formulas for Legendre functions related to the Poisson transform and Lorentz group representation”. *Journal of Physics: Conference Series*, **Vol. 346**, pp. 1-6.

8. Barut, A. O., Raczka R., 1980. *Theory of group representations and applications.* Moscow: Mir.

9. Vilenkin, N. Ya., 1991. *Special‘ny‘e funkcii i teoriya predstavlenij grupp [Special Functions and the Theory of Group Representations].* Moscow, Nauka.

10. Vilenkin, N. Ya., Nizhnikov A. I., 1979. “Integral relations for the Meyer G-functions and the representation of the n-dimensional Lorentz group”. *Izvestiya VUZov, Mathematics.* **Vol. 5**, 13-19.

11. Gel’fand, I. M., Graev, M. I., Vilenkin N. Ya. , 1962. *Integral Geometry and Representation Theory.* Moscow: Fizmatlit.

12. Gradstein, I. S., Ryshik, I. .M., 2011. *Tables of series, products and integrals.* 7-е . S.Pb.: BHV-Peterburg.

13. Nizhnikov, A. I., 2015. “Semisimple groups of rank I and related special functions”. *Algebra, teoriya chisel i diskretnaya geometriya: sovremenny‘e problemy‘ i prilozheniya. Materialy‘ XIII mezhdunarodnoj konferencii, posvyashhennoj 85-letiyu so dnya rozhdeniya professora Sergeya Sergeevicha Ry‘shkova. [Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications. Materials of the XIII International Conference, dedicated to the 85th anniversary of the birth of Professor Sergey Sergeevich Ryshkov.].*

14. Nizhnikov, A. I., Shilin, I. A., 2012. “Multiple integral transforms and linear combinations of Whittaker, McDonald, and Bessel functions”. *Prepodavatel’ XXI vek*, **Vol.2(1)**, pp. 227-232.

15. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A., Marichev, O. I., 2003. *Integrals and Series, Vol. 3: More Special Functions.* Moscow: Fizmatlit.

16. Helgason, S., 1987. *Groups and geometric analysis.* Moscow, Mir.

Получено 18.05.2018
Принято в печать 17.08.2018