ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 3.

УДК 511.334+511.335

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-40-45

Об одном свойстве функционалов Маасса и Шинтани¹

Быковский Виктор Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Аннотация

Функционалы Маасса и Шинтани играют фундаментальную роль при изучении классических задач аналитической теории чисел: задачи Линника о распределении целых точек на гиперболоидах и задачи о среднем значении функции числа делителей квадратичных полиномов.

В работе доказывается, что эти функционалы на пространствах, состоящих из нечетных функций (нечетных относительно оператора отражения, а для голоморфных форм веса, который не делится на 4) равны нулю.

Ключевые слова: автоморфные формы, функционалы Маасса и Шинтани, спектральная теория автоморфных функций.

Библиография: 5 названий.

Для цитирования:

В. А. Быковский. Об одном свойстве функционалов Маасса и Шинтани // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 40–45.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 3.

UDC 511.334+511.335

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-40-45

On one property of the Maass and Shintani functionals²

Bykovsky Victor Alekseevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, corresponing member of RAS, Pacific national University, Khabarovsk.

e-mail: vab@iam.khv.ru

Abstract

Functionals of Maass and Shintani play a fundamental role in the study of classical problems of analytic number theory: the Linnik problem on the distribution of integer points on hyperboloids and the problem of the mean value of the function of the number of divisors of quadratic polynomials.

In the paper it is proved that these functionals on spaces consisting of odd functions (odd with respect to the reflection operator, and for holomorphic forms of weight, which is not divisible by 4) are zero.

Keywords: automorphic forms, Maass and Shintani functionals, spectral theory of automorphic functions.

Bibliography: 5 titles.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-41-05001).

²The study was performed by a grant of Russian scientific Foundation (project No. 18-41-05001).

For citation:

V. A. Bykovskii, 2018, "On one property of the Maass and Shintani functionals", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 40–45.

Посвящается 100-летию Ю. В. Линника.

1. Введение

В работе [1] Маасс определил функционалы на пространствах автоморфных функций, ассоциированные с дискриминантами целочисленных бинарных квадратичных форм. В работе [2] Шинтани определил подобного рода функционалы на пространствах голоморфных параболических форм четного веса. В настоящей работе доказывается, что эти функционалы на пространствах, состоящих из нечетных функций (нечетных относительно оператора отражения, а для голоморфных форм веса, который не делится на 4) равны нулю.

2. Определения и вспомогательные сведения

Мультипликативная группа $SL_2(\mathbb{Z})$, состоящая из матриц

$$M = \begin{pmatrix} m & n \\ l & h \end{pmatrix} \quad (m, n, l, h \in \mathbb{Z}; \det(M) = 1)$$

действует слева на верхней полуплоскости

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}; y > 0\}$$

посредством дробно-линейных преобразований

$$M(z) = \frac{mz + n}{lz + h}.$$

Так как $M(z) = (-M)(z)$, то M и $-M$ обычно отождествляют и вместо $SL_2(\mathbb{Z})$ работают с факторгруппой

$$\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z}) / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

На пространстве автоморфных относительно Γ функций $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых

$$f(M(z)) = f(z) \quad \forall M \in \Gamma,$$

действует оператор отражения (инволюция)

$$Tf(z) = f(-\bar{z}).$$

Автоморфная функция f называется четной (относительно T), если $Tf = f$, и нечетной, если $Tf = -f$. Любую f можно записать в виде

$$f = f_+ + f_-,$$

где

$$f_+ = \frac{1}{2}(f + Tf), \quad f_- = \frac{1}{2}(f - Tf),$$

соответственно, четная и нечетная функции.

Пусть

$$Q(X, Y) = aX^2 + bXY + cY^2$$

— невырожденная бинарная квадратичная форма с целыми коэффициентами и дискриминантом

$$d = b^2 - 4ac \equiv 0, 1 \pmod{4}.$$

Положим для $d > 0$

$$\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d) = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid b^2 - 4ac = d\},$$

а для $d < 0$

$$\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d) = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 \mid b^2 - 4ac = d; a > 0, c > 0\}.$$

Во втором случае квадратичные формы положительно определены.

Замечание. В дальнейшем мы будем иметь дело с дискриминантами d , отличными от квадрата.

Группа действует слева на $\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$ по правилу

$$M : \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \rightarrow M \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} M^t = \begin{pmatrix} a(M) & b(M)/2 \\ b(M)/2 & c(M) \end{pmatrix}.$$

Оно соответствует линейной замене переменных X и Y для квадратичной формы

$$\begin{aligned} Q(X, Y) &= aX^2 + bXY + cY^2 \rightarrow \\ (MQ)(X, Y) &= Q(mX + lY, nX + hY) = a(M)X^2 + b(M)XY + c(M)Y^2. \end{aligned}$$

Для $d > 0$ сопоставим каждой точке $(a, b, c) \in \mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$ ориентированную полуокружность

$$\{z \in \mathbb{H} \mid a - b\operatorname{Re} z + c|z|^2 = 0\}$$

с параметрическим представлением

$$L(\varphi) = \mathcal{P}_d(a, b, c)(\varphi) = \operatorname{Ce}(L) + \operatorname{Ra}(L) \exp(\operatorname{sign}(c)i\varphi) \quad (0 < \varphi < \pi),$$

где

$$\operatorname{Ce}(L) = \frac{b}{2c}, \quad \operatorname{Ra}(L) = \frac{\sqrt{d}}{2c}.$$

Она начинается из точки $x_1 = \operatorname{Ce}(L) + \operatorname{Ra}(L)$ и кончается в $x_2 = \operatorname{Ce}(L) - \operatorname{Ra}(L)$ — корнях квадратного уравнения $a - bx - cx^2 = 0$. Преобразование $(a, b, c) \rightarrow (-a, -b, -c)$ меняет ориентацию элементов множества

$$\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d) = \mathcal{P}_d(\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d))$$

на противоположную. Для $d < 0$ соответствие

$$(a, b, c) \rightarrow \frac{b}{2c} + \frac{\sqrt{d}}{2c}$$

определяет биекцию

$$\mathcal{P}_d : \mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d) \rightarrow \mathbb{H} = \mathbb{H}_{\mathbb{Z}}(d)$$

с обратной к ней

$$\mathcal{P}_d^{-1}(z) = \left(\frac{\sqrt{|d|}}{2} \cdot \frac{|z|^2}{\operatorname{Im} z}, \sqrt{|d|} \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}, \frac{\sqrt{|d|}}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{Im} z} \right).$$

При этом для любого элемента M из Γ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d) & \xrightarrow{M} & \mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d) \\ \mathcal{P}_d \downarrow & & \downarrow \mathcal{P}_d \\ \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d) & \xrightarrow{M} & \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d) \end{array}$$

коммутативна. Стабилизатор Γ_L любого элемента L из $\widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d)$ — бесконечная циклическая группа. Ее образующую M_L выберем так, чтобы переход от точки z по дуге L к $M_L(z)$ соответствовал ориентации L . При этом для любой точки z из L в качестве $\Gamma_L \backslash L$ можно выбрать дугу $(z, M_L(z))$.

Для дискриминантов d на линейном пространстве непрерывных автоморфных функций определим линейный функционал

$$\Omega_d(f) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{d}}{2} \right)^{-1/2} \sum_{L \in \Gamma \backslash \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d)} \int_{\Gamma_L \backslash L} f(z) \sqrt{d\zeta^2}$$

с Γ -инвариантной метрикой

$$d\zeta^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Пусть k — натуральное число. Голоморфная на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ функция f называется параболической формой веса $2k$, если для любого элемента M из Γ

$$(f|_{2k}M)(z) = (lz + h)^{-2k} f(M(z)) = f(z)$$

и автоморфная функция $y^k |f(z)|$ ограничена на $\mathbb{H}$. Обозначим через S_{2k} линейное пространство всех параболических форм веса $2k$ со скалярным произведением Петерсона

$$\langle f, g \rangle_{2k} = \iint_{\Gamma \backslash \mathbb{H}} f(z) \overline{g(z)} y^{2k-2} dx dy.$$

Оно конечномерно и

$$\dim S_{2k} = \begin{cases} [k/6], & \text{если } k \not\equiv 1 \pmod{6} \\ [k/6] - 1, & \text{если } k \equiv 1 \pmod{6}. \end{cases}$$

В частности, S_{2k} пусто для $k = 1, 2, 3, 4, 5, 7$ и одномерно для $k = 6, 8, 9, 10, 11, 13$.

Функционалы Шинтани (см. [2]) определяются по формуле

$$\Omega_d^{(2k)}(f) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{d}}{2} \right)^{-k-\frac{1}{2}} \sum_{L \in \Gamma \backslash \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d)} \int_{\Gamma_L \backslash L} g_L(z) dz$$

с инвариантной относительно Γ_L дифференциальной формой

$$g_L(z) dz = (a(L) - b(L)z + c(L)z^2)^{k-1} f(z) dz,$$

где $(a(L), b(L), c(L)) = \mathcal{P}_d^{-1}(L)$.

Для $d < 0$

$$\Omega_d(f) = \left(\frac{|d|}{4} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\sum_{z \in \Gamma \backslash \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{Z}}(d)} \frac{1}{|\Gamma_z|} f(z) \right).$$

3. Основной результат

Теорема. Пусть d — любой дискриминант, отличный от квадрата. Тогда

1) Для любой нечетной автоморфной функции f

$$\Omega_d(f) = 0;$$

2) Для любого нечетного k и любой функции $f \in S_{2k}$

$$\Omega_d^{(2k)}(f) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На $\mathbb{K}_{\mathbb{Z}}(d)$ действует инволюция

$$(a, b, c) \rightarrow (a, -b, c).$$

Ей соответствует инволюция

$$z \rightarrow -\bar{z}$$

на верхней полуплоскости $\mathbb{H}$, которая индуцируется биекцией $\mathcal{P}_d$. Принимая во внимание коммутативную диаграмму из предыдущего параграфа, отсюда находим что

$$\Omega_d(f) = -\Omega_d(f).$$

Действуя точно также в случае 2) и принимая во внимание то, что инволюция $z \rightarrow -\bar{z}$ меняет ориентацию на противоположную, получим

$$\Omega_d^{(2k)}(f) = -\Omega_d^{(2k)}(f) = 0.$$

4. Заключение

Функционалы Маасса и Шинтани играют фундаментальную роль при изучении классических задач аналитической теории чисел: задачи Линника о распределении целых точек на гиперболоидах и задачи о среднем значении функции числа делителей квадратичных полиномов. По этому поводу см. работы [3–5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maass H. Über die räumliche Verteilung der Punkte in Gittern mit indefiniter Metrik. Math. Ann., **138**, 1959. P. 287–315.
2. Shintani T. On construction of holomorphic cusp forms of half-integral weight, Nagoya Math. J. V. 58, 1975. P. 83–126.
3. Быковский В.А. Спектральные разложения некоторых автоморфных функций и их теоретико-числовые приложения. В кн.: Записки научных семинаров. ЛОМИ. Л.: "Наука", 1984, С. 15–33.
4. Duke W. Hyperbolic distribution problems and half-integral weight, Invent. Math., **92**, 1988. P. 73–90.
5. Liu S. and Masri R. The average of the divisor function over values of quadratic polynomial, Proc. Amer. Math. Soc., 143, 2015. P. 4143–4160.

REFERENCES

1. Maass H, 1959, "Über die räumliche Verteilung der Punkte in Gittern mit indefiniter Metrik", *Math. Ann.*, **138**, P. 287–315.
2. Shintani T, 1975, "On construction of holomorphic cusp forms of half-integral weight", *Nagoya Math. J.* V. 58, pp. 83–126.
3. Bykovskij V. A., 1984, "Spektral'nye razlozheniya nekotoryh avtomorfnyh funkcij i ih teoretiko-chislovye prilozheniya", *V kn.: Zapiski nauchnyh seminarov. LOMI*. L.: "Nauka", pp. 15–33.
4. Duke W., 1984, "Hyperbolic distribution problems and half-integral weight", *Invent. Math.*, **92**, X pp. 73–90.
5. Liu S. and Masri R., 2015, "The average of the divisor function over values of quadratic polynomial", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143, pp. 4143–4160.

Получено 17.09.2018

Принято к печати 10.10.2018