ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 2

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-319-333

Вопросы суммирования арифметических функций,
родственных функции Чебышева

Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики, Московский педагогический государственный университет.

e-mail: elena.deza@gmail.com

Варухина Лидия Владимировна — Московский педагогический государственный университет.

e-mail: lidadgemma@mail.ru

Аннотация

Многие вопросы теории чисел связаны с исследованием *рядов Дирихле* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ и *сумматорных функций* $\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ их коэффициентов. Наиболее известным примером ряда Дирихле является *дзета-функция Римана* $\zeta(s)$, определенная для любого комплексного числа $s = \sigma + it$ с действительной частью $\Re s = \sigma > 1$ как $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Квадрат дзета-функции $\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$, $\Re s > 1$, связан с *функцией делителей* $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, дающей число натуральных делителей натурального числа n . Сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^2(s)$ является функция $D(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n)$, вопросы асимптотической оценки которой известны как *проблема делителей Дирихле*. В общем случае, $\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s}$, $\Re s > 1$, где функция $\tau_k(n) = \sum_{n=n_1 \dots n_k} 1$ дает число представлений натурального числа n в виде произведения k натуральных сомножителей. Сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^k(s)$ является функция $D_k(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n)$. Ее изучение - это *многомерная проблема делителей Дирихле*.

Логарифмическая производная $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции представима в виде $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, $\Re s > 1$. Здесь $\Lambda(n)$ - *функция Мангольда*, которая определяется как $\Lambda(n) = \log p$, если $n = p^k$ для простого p и натурального k , и как $\Lambda(n) = 0$, иначе. Таким образом, *функция Чебышева* $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ является сумматорной функцией коэф-

фициентов ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, соответствующего логарифмической производной $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции Римана. Она хорошо известна в аналитической теории чисел и связана со многими классическими задачами, прежде всего, с *асимптотическим законом распределения простых чисел*.

В частности, хорошо известно представление функции $\psi(x)$ по нулям дзета-функции: $\psi(x) = x - \sum_{|\Im \rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right)$, где $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq T \leq x$, и $\rho = \beta + i\gamma$ - *нетривиальные нули* дзета-функции Римана, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в *критической полосе* $0 < \Re s < 1$.

Мы получаем аналогичные представления, связанные с нетривиальными нулями дзета-функции Римана, для двух арифметических функций, родственных функции Чебышева:

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x-n)\Lambda(n) \text{ и } \psi_2(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n}.$$

Аналогичные результаты можно получить и для других функций, родственных функции Чебышева, если использовать логарифмические производные L -функций Дирихле.

Ключевые слова: арифметические функции, ряд Дирихле, суматорная функция коэффициентов ряда Дирихле, дзета-функция Римана, функция Чебышева, нетривиальные нули дзета-функции Римана, контурное интегрирование.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:

Е. И. Деза, Л. В. Варухина. Вопросы суммирования арифметических функций, родственных функции Чебышева // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 319–333.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 2

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-319-333

Problems of the summation of arithmetical sums, relative to Chebyshev function

Деза Елена Ивановна — Doctor of educational sciences, Associate professor, Moscow State Pedagogical University.

e-mail: elena.deza@gmail.com

Varukhina Lidiya Vladimirovna — Moscow State Pedagogical University.

e-mail: lidadgemma@mail.ru

Abstract

Many problems of Number Theory are connected with investigation of *Dirichlet series* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ and the *adding functions* $\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ of their coefficients. The most famous Dirichlet series is the *Riemann zeta function* $\zeta(s)$, defined for any $s = \sigma + it$ with $\Re s = \sigma > 1$ as $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

The square of zeta function $\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}$, $\Re s > 1$, is connected with the *divisor function* $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, giving the number of a positive integer divisors of positive integer number n . The adding function of the Dirichlet series $\zeta^2(s)$ is the function $D(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n)$; the questions of the asymptotic behavior of this function are known as *Dirichlet divisor problem*. Generally, $\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s}$, $\Re s > 1$, where function $\tau_k(n) = \sum_{n=n_1 \dots n_k} 1$ gives the number of representations of a positive integer number n as a product of k positive integer factors. The adding function of the Dirichlet series $\zeta^k(s)$ is the function $D_k(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n)$; its research is known as the *multidimensional Dirichlet divisor problem*.

The logarithmic derivative $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ of zeta function can be represented as $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, $\Re s > 1$. Here $\Lambda(n)$ is the *Mangoldt function*, defined as $\Lambda(n) = \log p$, if $n = p^k$ for a prime

number p and a positive integer number k , and as $\Lambda(n) = 0$, otherwise. So, the *Chebyshev function* $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ is the adding function of the coefficients of the Dirichlet series

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, corresponding to logarithmic derivative $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ of zeta function. It is well-known in analytic Number Theory and is closely connected with many important number-theoretical problems, for example, with *asymptotic law of distribution of prime numbers*.

In particular, the following representation of $\psi(x)$ is very useful in many applications: $\psi(x) = x - \sum_{|\Im \rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right)$, where $x = n + 0, 5$, $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq T \leq x$, and $\rho = \beta + i\gamma$ are *non-trivial zeros* of zeta function, i.e., the zeros of $\zeta(s)$, belonging to the *critical strip* $0 < \Re s < 1$.

We obtain similar representations over non-trivial zeros of zeta function for two arithmetic functions, relative to the Chebyshev function:

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x - n)\Lambda(n), \text{ and } \psi_2(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n}.$$

Similar results can be received also for some other functions, related to the Chebyshev function, if to use logarithmic derivatives of Dirichlet L -functions.

Keywords: arithmetical functions, Dirichlet series, adding function of the coefficients of a Dirichlet series, the Riemann zeta function, the Chebyshev function, non-trivial zeros of the Riemann zeta function, contour integration.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

E. I. Deza, L. V. Varukhina, 2018, "Problems of the summation of arithmetical sums, relative to Chebyshev function", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 319–333.

1. Введение

Многие вопросы теории чисел связаны с исследованием *рядов Дирихле* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ и *сумматорных функций* $\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ их коэффициентов $([1, 2, 5, 8, 10, 11, 16])$.

Наиболее известным примером ряда Дирихле является *дзета-функция Римана* $\zeta(s)$ $([3, 5, 12, 13, 15])$, определенная для любого комплексного числа $s = \sigma + it$ с действительной частью $\Re s = \sigma > 1$ как

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \Re s > 1.$$

Квадрат дзета-функции

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}, \Re s > 1,$$

связан с *функцией делителей* $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, дающей число натуральных делителей натурального числа n .

Именно, сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^2(s)$ является функция $D(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n)$, вопросы асимптотической оценки которой известны как *проблема делителей Дирихле* $([3, 4, 6, 7, 11])$.

В общем случае,

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s}, \Re s > 1,$$

где функция $\tau_k(n) = \sum_{n=n_1 \cdot \dots \cdot n_k} 1$ дает число представлений натурального числа n в виде произведения k натуральных сомножителей. Сумматорной функцией ряда Дирихле $\zeta^k(s)$ является функция $D_k(x) = \sum_{n \leq x} \tau_k(n)$. Ее изучение - это *многомерная проблема делителей Дирихле* ([3, 4, 5, 6, 7, 11]).

Обобщением дзета-функции Римана и еще одним известным рядом Дирихле является L -функция Дирихле, определяемая равенством

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s}, \Re s > 1,$$

где χ - *характер Дирихле* ([2, 3, 5, 15]).

Произведение нескольких L -функций дает ряд

$$L_1(s, \chi_1) \cdot \dots \cdot L_k(s, \chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}, \Re s > 1,$$

сумматорная функция коэффициентов которого имеет вид

$$C_k(x) = \sum_{n \leq x} c_n = \sum_{n_1 \cdot \dots \cdot n_k \leq x} \chi_1(n_1) \cdot \dots \cdot \chi_k(n_k).$$

Задача об оценке $C_k(x)$ является обобщением проблемы делителей Дирихле и связана с проблемой делителей в числовых полях ([6, 7, 9, 11, 16]).

Логарифмическая производная дзета-функции $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ представима в виде

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \Re s > 1.$$

Здесь $\Lambda(n)$ - *функция Мангольдта*:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & \text{если } n = p^k, p \in P, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, *функция Чебышева*

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

является сумматорной функцией коэффициентов ряда Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$, соответствующего логарифмической производной $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ дзета-функции Римана.

Функция $\psi(x)$ является хорошо известной арифметической функцией, используемой во многих областях теории чисел. Так, она тесно связана с функцией $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ (число простых, не превосходящих x), то есть с доказательством асимптотического закона распределения простых чисел ([2, 3, 5]).

Действительно, используя формулу Перрона ([14]), мы получим, что

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds, \text{ где } c > 1,$$

откуда следует классическая асимптотическая формула ([5])

$$\psi(x) = x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Данное утверждение эквивалентно асимптотическому закону распределения простых чисел ([3, 5, 15]):

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(xe^{-\frac{c}{2}\sqrt{\log x}}).$$

В монографии [5] было получено представление функции Чебышева по нулям дзета-функции Римана:

$$\psi(x) = x - \sum_{|\Im \rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq T \leq x$, и $\rho = \beta + i\gamma$ - *нетривиальные нули* дзета-функции, то есть нули $\zeta(s)$, лежащие в *критической полосе* $0 < \Re s = \sigma < 1$.

Мы получаем аналогичные результаты для двух арифметических функций,

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x - n)\Lambda(n) \text{ и } \psi_2(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n}.$$

Эти функции, родственные функции Чебышева, используются в некоторых теоретико-числовых задачах, связанных с изучением асимптотического поведения суммарных функций рядов Дирихле.

Основные результаты представлены в следующих двух теоремах.

Теорема 1. Для $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$, и $2 \leq x \leq T$ имеет место формула

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x - n)\Lambda(n) = \frac{x^2}{2} - \sum_{|\Im \rho| \leq T} \frac{x^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)} + O\left(\frac{x^2 \ln x}{T}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ - нули дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в критической полосе $0 < \Re s < 1$.

Теорема 2. Для $x = n + 0,5$, $n \in \mathbb{N}$, и $2 \leq x \leq T$ имеет место формула

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n} = x - \sum_{|\Im \rho| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho^2} + O\left(\frac{x \ln x}{T}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ - нули дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в критической полосе $0 < \Re s < 1$.

2. Доказательство теоремы 1.

Доказательство состоит из четырех шагов.

1. Покажем, что для $b > 0$ и $k \geq 1$ имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < y \leq 1, \\ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^k, & \text{если } y \geq 1. \end{cases}$$

А. Пусть $0 < y < 1$. Рассмотрим контур Γ с вершинами $b \pm iT$, $U \pm iT$, где $T, U \in \mathbb{R}$, $T > 0$, и $U > b$. Так как функция $\frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)}$ аналитична в данном контуре, то по теореме о вычетах ([14]) имеем равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = 0,$$

то есть

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = O(|I_1| + |I_2| + |I_3|),$$

где I_i , $i = 1, 2, 3$, представляют собой интегралы по верхней, нижней и правой сторонам контура Γ , соответственно. Нетрудно видеть, что

$$|I_1| = |I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_b^U \frac{y^\sigma d\sigma}{(T^2 + \sigma^2)^{\frac{k+1}{2}}} \leq \frac{1}{T^{k+1}} \int_b^U y^\sigma d\sigma = \frac{y^b - y^U}{T^{k+1} |\ln y|} \leq \frac{y^b}{T^{k+1} |\ln y|},$$

в то время как

$$|I_3| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{y^U}{(U^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}} dt \leq \frac{T y^U}{U^{k+1}}.$$

Для фиксированного T и фиксированного $0 < y < 1$ мы получаем, что $\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{T y^U}{U^{k+1}} = 0$, и, при $U \rightarrow \infty$, имеем следующую оценку:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = O\left(\frac{y^b}{T^{k+1} |\ln y|}\right).$$

Теперь, при $T \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = 0.$$

В. Пусть $y = 1$. Тогда

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{ds}{s(s+1)\dots(s+k)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{d\sigma}{\sigma^2 + T^2} \leq \frac{1}{T},$$

то есть

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{s(s+1)\dots(s+k)} = 0.$$

С. Пусть $y > 1$. Рассмотрим контур Γ с вершинами $b \pm iT$, $-U \pm iT$, где $T, U \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $U > \max\{b, k\}$.

Функция $\frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)}$ имеет простой полюс в точках $s = 0, -1, \dots, -k$, лежащих внутри контура Γ , и по теореме о вычетах ([14]) мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = \sum_{l=0}^k \operatorname{Res}_{s=-l} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=-l} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} &= \lim_{s \rightarrow -l} (s+1) \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} = \\ &= \frac{y^{-l}}{-l(-l+1)\dots(-l+l-1)(-l+l+1)\dots(-l+k)}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^k \operatorname{Res}_{s=-l} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} = \\
& = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k}{y} + \frac{(k-1)k}{1 \cdot 2 \cdot y^2} - \frac{(k-2)(k-1)k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y^3} + \dots + \frac{(-1)^k}{y^k} \right) = \\
& = \frac{1}{k!} \left(C_k^0 - C_k^1 \frac{1}{y} + C_k^2 \left(\frac{1}{y} \right)^2 - \dots + (-1)^k C_k^k \left(\frac{1}{y} \right)^k \right) = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{y} \right)^k.
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-U+iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-U-iT}^{b-iT} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds \right| \leq \\
& \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^b \frac{y^\sigma d\sigma}{(T^2 + \sigma^2)^{\frac{k+1}{2}}} \leq \frac{1}{2\pi T^{k+1}} \int_{-U}^b y^\sigma d\sigma \leq \frac{y^b - y^{-U}}{T^{k+1} \ln y} \leq \frac{y^b}{T^{k+1} \ln y},
\end{aligned}$$

и

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-U-iT}^{-U+iT} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{y^{-U} dt}{(U^2 + t^2)^{\frac{k+1}{2}}} \leq \frac{y^{-U} T}{U^{k+1}}.$$

Так как для фиксированного T и фиксированного $y > 1$ имеет место соотношение $\lim_{U \rightarrow \infty} \frac{y^{-U} T}{U^{k+1}} \rightarrow 0$, то для $U \rightarrow \infty$ мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{y} \right)^k + O\left(\frac{y^b}{T^{k+1} \ln y} \right),$$

и, следовательно, при $T \rightarrow \infty$, имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{y^s}{s(s+1)\dots(s+k)} ds = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{y} \right)^k.$$

2. Теперь покажем, что для $b > 1$ имеет место соотношение

$$\psi_1(x) = \sum_{n \leq x} (x-n) \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds.$$

Рассмотрим функцию $\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x} \left(1 - \frac{n}{x} \right) \Lambda(n)$.

Из 1. следует, что

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{n} \right)^s}{s(s+1)} ds$$

(возьмем $k=1$ и $y = \frac{x}{n}$: для $n \leq x$ интеграл равен $1 - \frac{n}{x}$; для $n > x$ интеграл равен 0).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\Lambda(n) \left(\frac{x}{n} \right)^s}{s(s+1)} ds \right|$ равномерно сходится при $b > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\Lambda(n) \left(\frac{x}{n} \right)^s}{s(s+1)} ds \right| < x^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^b} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{b^2 + t^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{b^2 + t^2} = \frac{1}{b} \arctan \frac{x}{b} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{b},$$

$$\frac{\Lambda(n)}{n^b} < \frac{\ln n}{n^b},$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^b}$ сходится при $b > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1(x)}{x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds.$$

3. Теперь мы покажем, что для $b = 1 + \frac{1}{\ln x} > 1$ имеет место асимптотическая формула

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds + O\left(\frac{x^2 \ln x}{T}\right).$$

Из 2. мы получаем, что

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds + J_1 + J_2,$$

где

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b-iT} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds, \quad J_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{b+iT}^{b+i\infty} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds.$$

Нетрудно видеть, что

$$|J_1| = |J_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_T^\infty \frac{x^{b+1}}{b^2 + t^2} \left| \frac{\zeta'(b+it)}{\zeta(b+it)} \right| dt.$$

Так как $b > 1$, то

$$\left| \frac{\zeta'(b+it)}{\zeta(b+it)} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{b+it}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^b} = \left| \frac{\zeta'(b)}{\zeta(b)} \right|.$$

Известно ([5], [6]), что в этих условиях

$$-\frac{\zeta'(b)}{\zeta(b)} = \frac{1}{b-1} + b_0 + b_1(b-1) + \dots$$

Тогда

$$-\frac{\zeta'(b)}{\zeta(b)}(b-1) = 1 + b_0(b-1) + b_1(b-1)^2 + \dots$$

Таким образом, функция $-\frac{\zeta'(b)}{\zeta(b)}(b-1)$ является аналитической в некоторой окрестности 1, следовательно, она ограничена в этой окрестности. Так как величина $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$ близка к 1, то $|\frac{\zeta'(b)}{\zeta(b)}(b-1)| \leq C$, то есть, $-\frac{\zeta'(b)}{\zeta(b)} = O\left(\frac{1}{b-1}\right) = O(\ln x)$, и $-\frac{\zeta'(b+it)}{\zeta(b+it)} = O(\ln x)$. Тогда

$$|J_1| + |J_2| \leq C_1 x^{b+1} \ln x \int_T^\infty \frac{dt}{b^2 + t^2} \leq C_2 x^2 \ln x \int_T^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{C_2 x^2 \ln x}{T},$$

так как $x^{\frac{1}{\ln x}} = e$, и $\int_T^\infty \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_T^\infty = \frac{1}{T}$. Таким образом,

$$|J_1| + |J_2| = O\left(\frac{x^2 \ln x}{T}\right),$$

и

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds + O\left(\frac{x^2 \ln x}{T}\right).$$

4. Пусть $b = 1 + \frac{1}{\ln x} > 1$, и $2 \leq T \leq x$. Найдем T_1 , такое что $T \leq T_1 \leq T+1$, и расстояние от прямой $\Im s = T_1$ до ближайшего нетривиального нуля дзета-функции $\gg \frac{1}{\ln T}$. Это возможно, поскольку число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в полосе $T \leq \Im s \leq T+1$ есть $O(\ln T)$ (см., например, [5], [8]). Рассмотрим контур Γ с вершинами $b \pm T_1$, $-\frac{1}{2} \pm T_1$. Функция $\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$ аналитична в данном контуре, за исключением точек $s = 0$ (полюс функции $\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}$), $s = 1$ (полюс дзета-функции $\zeta(s)$), и $s = \rho_n$, где ρ_n - все нетривиальные нули дзета-функции в контуре Γ . Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds = \\ &= Res_{s=0} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) + Res_{s=1} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) + \\ &+ \sum_{|\Im \rho_n| < T_1} Res_{s=\rho_n} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) + \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(\frac{1}{s-1} + \dots\right) + \\ &+ \sum_{\Im \rho_n < T_1} \lim_{s \rightarrow \rho_n} (s - \rho_n) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} \left(-\frac{1}{s - \rho_n} + \dots\right) = \\ &= -x \left(\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\right) + \frac{x^2}{2} - \sum_{|\Im \rho_n| < T_1} \frac{x^{\rho_n+1}}{\rho_n(\rho_n+1)}. \end{aligned}$$

Оценим интегралы I_i , $i = 1, 2, 3$, по верхней, нижней и правой сторонам контура Γ , соответственно. Для первых двух интегралов мы имеем оценку

$$|I_1| + |I_2| \leq \frac{x^{b+1}}{2\pi T_1^2} \int_{-\frac{1}{2}}^b \left| \frac{\zeta'(\sigma + iT_1)}{\zeta(\sigma + iT_1)} \right| d\sigma,$$

в то время как для третьего - оценку

$$|I_3| \leq \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-T_1}^{T_1} \left| \frac{\zeta'(-\frac{1}{2} + it)}{\zeta(-\frac{1}{2} + it)} \right| \frac{dt}{\frac{1}{4} + t^2}.$$

Оценим $\left| \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right|$. В наших условиях ([5])

$$\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} = \sum_{|t - \gamma_n| \leq 1} \frac{1}{\sigma - \sigma_n + i(t - \gamma_n)} + O(\ln(|t| + 2)).$$

Если $\sigma = \frac{1}{2}$ и $|t| \leq T_1$, то

$$\left| \frac{1}{\sigma - \sigma_n + i(t - \gamma_n)} \right| \leq \frac{1}{|\sigma - \sigma_n|} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \sigma_n} \leq 2.$$

Тогда

$$\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} = O(\ln(|t| + 2)) = O(\ln T).$$

Если $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq b$ и $t = T_1$, то

$$|T_1 - \gamma_n| \gg \frac{1}{\ln T},$$

и

$$\sum_{|t - \gamma_n| \leq 1} \left| \frac{1}{\sigma - \sigma_n + i(t - \gamma_n)} \right| \leq \sum_{|t - \gamma_n| \leq 1} \frac{1}{|T_1 - \gamma_n|} \leq C \ln T \sum_{|t - \gamma_n| \leq 1} 1 \leq C_1 \ln^2 T.$$

Таким образом, в обоих случаях

$$\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} = O(\ln^2 T).$$

Тогда

$$\begin{aligned} |I_1| + |I_2| &\leq \frac{C_3 x^2 \ln^2 T}{T_1^2} \left(1 + \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{2} \right) \leq \frac{C_4 x^2 \ln^2 T}{T_1^2} \leq C_4 \frac{x^2 \ln^2 T}{T^2}; \\ |I_3| &\leq C_5 \sqrt{x} \ln T \int_{-T_1}^{T_1} \frac{dt}{t^2} \leq C_6 \frac{\sqrt{x} \ln T}{T_1} \leq C_7 \frac{\sqrt{x} \ln T}{T}. \end{aligned}$$

Так как $\frac{\ln t}{t} \rightarrow 0$ для $t \rightarrow \infty$, то $O\left(\frac{x^2 \ln^2 T}{T^2}\right) \ll O\left(\frac{x^2 \ln T}{T}\right)$; кроме того, $\ln T \leq \ln x$ для $T \leq x$.

Таким образом, мы получили, что все три оцениваемых интеграла есть $O\left(\frac{x^2 \ln x}{T}\right)$, и, следовательно,

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \sum_{|\Im \rho_n| < T_1} \frac{x^{\rho_n + 1}}{\rho_n(\rho_n + 1)} - x \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + O\left(\frac{x^2 \ln x}{T}\right).$$

Так как

$$x \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = O\left(\frac{x^2 \ln x}{T}\right),$$

и

$$\sum_{T < |\Im \rho_n| < T_1} \left| \frac{x^{\rho_n + 1}}{\rho_n(\rho_n + 1)} \right| \leq \frac{x^2}{T^2} \sum_{T < |\Im \rho_n| < T+1} 1 \leq C_5 \frac{x^2 \ln T}{T} \leq C_5 \frac{x^2 \ln x}{T},$$

то

$$\psi_1(x) = \frac{x^2}{2} - \sum_{|\Im \rho_n| \leq T} \frac{x^{\rho_n + 1}}{\rho_n(\rho_n + 1)} + O\left(\frac{x^2 \ln x}{T}\right). \quad \square$$

3. Доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1 и также состоит из четырех этапов.

1. Покажем, что для $b > 1$ имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{y^s}{s^2} ds = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < y \leq 1, \\ \ln y, & \text{если } y \geq 1. \end{cases}$$

А. Пусть $0 < y \leq 1$, $T > 0$ и $U > b$. Рассмотрим контур Γ с вершинами $b \pm T$, $U \pm T$. Функция $\frac{y^s}{s^2}$ аналитична внутри данного контура, и по теореме о вычетах ([14]) мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{y^s}{s^2} ds = 0, \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s^2} ds = O(|I_1| + |I_2| + |I_3|),$$

где I_i , $i = 1, 2, 3$, представляют собой интегралы по верхней, нижней и правой сторонам контура Γ . Легко видеть, что

$$|I_1| = |I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_b^U \frac{y^\sigma}{T^2 + \sigma^2} d\sigma \leq \frac{1}{T^2} \int_b^U y^\sigma d\sigma = \frac{y^b - y^U}{T^2 |\ln y|} \leq \frac{y^b}{T^2 |\ln y|}.$$

С другой стороны,

$$|I_3| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{y^U}{U^2 + t^2} dt \leq \frac{y^U T}{U^2}.$$

Так как $0 < y \leq 1$, и T фиксировано, то $\frac{y^U T}{U^2} \rightarrow 0$ для $U \rightarrow \infty$, и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s^2} ds = O\left(\frac{y^b}{T^2 |\ln y|}\right).$$

Для фиксированного y и $T \rightarrow \infty$, мы получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{y^s}{s^2} ds = 0.$$

В. Пусть $y = 1$. Тогда

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{1}{s^2} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{T}.$$

При $T \rightarrow \infty$ мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{ds}{s^2} = 0 = \ln 1.$$

С. Пусть $y > 1$. Возьмем $T > 0$ и $U > b$. Рассмотрим контур Γ с вершинами $-U \pm T$ и $b \pm T$. Функция $\frac{y^s}{s^2}$ аналитична в этом контуре, за исключением точки $s = 0$, где она имеет полюс, и, пользуясь теоремой о вычетах ([14]), мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{y^s}{s^2} ds = \operatorname{Res}_{s=0} \frac{y^s}{s^2}.$$

Так как $(y^s)' = y^s \ln y$, то $(y^s)'(0) = \ln y$, и мы получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{y^s}{s^2} ds = \ln y, \quad \text{и} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s^2} ds = \ln y + O(|I_1| + |I_2| + |I_3|),$$

где I_i , $i = 1, 2, 3$, представляют собой интегралы по верхней, нижней и правой сторонам контура Γ . Нетрудно видеть, что

$$|I_1| = |I_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{y^\sigma}{\sigma^2 + T^2} d\sigma \leq \frac{y^b}{T^2 \ln y}, \quad \text{и} \quad |I_3| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{y^{-U}}{U^2 + t^2} dt \leq \frac{y^U T}{U^2}.$$

Для фиксированного T и фиксированного $y > 1$ мы имеем соотношение $\frac{y^{-UT}}{U^2} \rightarrow 0$ при $U \rightarrow \infty$, то есть

$$\int_{b-iT}^{b+iT} \frac{y^s}{s^2} ds = \ln y + O\left(\frac{y^b}{T^2 \ln y}\right).$$

Для $T \rightarrow \infty$ мы получаем, что

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{y^s}{s^2} ds = \ln y.$$

2. Теперь мы покажем что при $b > 1$ имеет место соотношение

$$\psi_2(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s^2} ds.$$

Из 1. следует, что

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2} ds$$

(возьмем $y = \frac{x}{n}$: если $n \leq x$, то интеграл равен $\ln \frac{x}{n}$; если $n > x$, то интеграл равен 0). Кроме того,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\Lambda(n) \left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2} ds \right| \leq x^b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{b^2 + t^2} = \frac{\pi x^b}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^b} \leq \frac{\pi x^b}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^b},$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^b}$ сходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2} ds$ абсолютно сходится, и мы имеем право поменять порядок суммирования и интегрирования. Тогда

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^s}{s^2} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{x^s}{s^2} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds.$$

3. Покажем, что при $b = 1 + \frac{1}{\ln x} > 0$ и $T > 0$ имеет место соотношение

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s^2} ds + O\left(\frac{x \ln x}{T}\right).$$

Из 2. следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s^2} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s^2} ds + O(|J_1| + |J_2|). \end{aligned}$$

При этом

$$|J_1| = |J_2| \leq \frac{1}{2\pi} \int_T^{\infty} \frac{x^b}{b^2 + t^2} \left| \frac{\zeta'(b+it)}{\zeta(b+it)} \right| dt \leq \frac{C_8 x^b \ln x}{2\pi} \int_T^{\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{C_9 x \ln x}{T}.$$

4. Пусть $2 \leq T \leq x$, и $b = 1 + \frac{1}{\ln x} > 1$. Рассмотрим контур Γ с вершинами $-\frac{1}{2} \pm T_1$, $b \pm T_1$, где T_1 выбрано так же, как при доказательстве теоремы 1. Функция $\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) \frac{x^s}{s^2}$ аналитична

в данном контуре, за исключением точек $s = 0$ (полюс функции $\frac{x^s}{s^2}$), $s = 1$ (полюс функции $\zeta(s)$), и $s = \rho_n$ (все нетривиальные нули $\zeta(s)$ с $|\gamma_n| < T_1$). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s^2} ds &= Res_{s=0} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s^2} + Res_{s=1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s^2} + \\ &+ \sum_{|\Im \rho_n| < T_1} Res_{s=\rho_n} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s^2} = a_0 \ln x + a_1 - \sum_{|\Im \rho_n| < T_1} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n^2} + x, \end{aligned}$$

где $a_0 = -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$ и a_1 - коэффициенты, полученные из равенства $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s^2} ds = x - \sum_{|\Im \rho_n| < T_1} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n^2} + O\left(\frac{x \ln x}{T}\right) + O(|I_1| + |I_2| + |I_3|),$$

где I_i , $i = 1, 2, 3$, представляют собой интегралы по верхней, нижней и верхней сторонам контура Γ . Мы знаем (см. доказательство теоремы 1.), что

$$\left| \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right| = O(\ln^2 T)$$

для $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq b$ и $t = T_1$, и что

$$\left| \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right| = O(\ln T)$$

для $\sigma = -\frac{1}{2}$ и $|t| \leq T_1$. Тогда

$$|I_1| = |I_2| \leq \frac{C_{10} x \ln^2 T}{T^2} \left(b + \frac{1}{2} \right) \leq \frac{C_{11} x \ln^2 T}{T^2},$$

$$|I_3| \leq \frac{C_{12} \ln T}{\sqrt{x}} \int_{-T_1}^{T_1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{C_{13} \ln T}{\sqrt{x} T}.$$

Заметим, что

$$O\left(\frac{x \ln^2 T}{T^2}\right) = O\left(\frac{x \ln T}{T}\right),$$

так как $\frac{\ln T}{T} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$,

$$\frac{x \ln T}{T} = O\left(\frac{x \ln T}{T}\right),$$

так как $T \leq x$,

$$a_0 \ln x + a_1 = O(\ln x) = O\left(\frac{x \ln T}{T}\right),$$

так как $T \leq x$,

$$\sum_{T < |\Im \rho_n| < T_1} \left| \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n^2} \right| \leq \frac{x}{T^2} \sum_{T \leq |\Im \rho_n| < T+1} 1 \leq C_{14} \frac{x \ln T}{T^2} = O\left(\frac{x \ln T}{T}\right),$$

так как $|x^{\rho_n}| < x^{\beta_n} \leq x$, и $|\gamma_n| < T$. Следовательно,

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \ln \frac{x}{n} = x - \sum_{|\Im \rho_n| \leq T} \frac{x^{\rho_n}}{\rho_n^2} + O\left(\frac{x \ln T}{T}\right). \quad \square$$

4. Заключение

Таким образом, в статье получены новые результаты, связанные с проблемой представления арифметических функций в виде сумм по нетривиальным нулям дзета-функции Римана.

В дальнейшем интересно было бы рассмотреть вопросы получения новых теоретико-числовых результатов, связанных с указанной проблемой. Одной из перспективных задач является получение аналогичных представлений по нетривиальным нулям дзета-функции Римана других арифметических функций, родственных функции Чебышева; такие функции нетрудно построить, если использовать логарифмические производные L -рядов Дирихле.

С другой стороны, было бы интересно рассмотреть конкретные задачи на применение уже полученных представлений ([5]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боревиц З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. - М.: Наука, 1985.
2. Виноградов И.М. Основы теории чисел. - М.: Наука, 1981.
3. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана. - М.: Физматлит, 1994.
4. Карацуба А.А. Равномерная оценка остаточного члена в проблеме делителей Дирихле // Известия АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36, N 3. С. 475 - 483.
5. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. - М.: Наука, 1983.
6. Пантелеева (Деза) Е.И. К вопросу о проблеме делителей Дирихле в числовых полях // Математические заметки. 1988. Т. 44, вып. 4. С. 494 - 505.
7. Пантелеева (Деза) Е.И. Одно замечание к вопросу о проблеме делителей // Математические заметки. 1993. Т. 53, вып. 4. С. 148 - 152.
8. Пантелеева (Деза) Е.И. О средних значениях некоторых арифметических функций // Математические заметки. 1994. Т. 55, вып. 5. С. 7 - 12.
9. Пантелеева (Деза) Е.И. Проблема делителей Дирихле в кольце целых Гауссовых чисел // Труды МПГУ. 2001. N 4. С. 23 - 34.
10. Пантелеева Е.И., Варухина Л.В. Об оценке сумматорных функций рядов Дирихле // Научные труды математического факультета МПГУ. Юбилейный сборник. - М.: МПГУ, 2000. С. 45 - 56.
11. Пантелеева Е.И., Варухина Л.В. Об оценке дзетовой суммы и проблеме делителей Дирихле // Вестник Санкт-петербургского Университета. 2013. Серия 1, вып. 4. С. 15 - 24.
12. Прахар К. Распределение простых чисел. - М., Мир, 1967.
13. Титчмарш Е.К. Теория дзета-функции Римана. - М.: ИЛ, 1953.
14. Титчмарш Е.К. Теория функций. - М.: Наука, 1980.
15. Ivić A. The Riemann zeta-function. - New Jork: J. Wiley & Sons, 1985.
16. Panteleeva (Deza) E.I., Varukhina L.V. On mean values of some arithmetic functions in number fields // Discrete Mathematics. 2008. Vol. 308. P. 4892 - 4899.

REFERENCES

1. Borevich, Z.I. & Shafarevich, I.R. 1985, "Theory of numbers", *M.: Nauka*.
2. Vinogradov, I.M. 1981, "Bases of the theory of numbers", *M.: Nauka*.
3. Voronin, S.M. & Karatsuba, A.A. 1994, "Riemann zeta function", *M.: Fizmatlit*.
4. Karatsuba, A.A. 1972, "Uniform estimate of error term in Dirichlet divisor problem", *Izv. Acad. of Sci. SSSR, Math.*, Vol. 36, N 3, pp. C. 475 – 483.
5. Karatsuba, A.A. 1983, "Bases of the analytical theory of numbers", *M.: Nauka*.
6. Panteleeva (Deza), E.I. 1988, "Dirichlet divisor problem in number fields", *Mathematical notes*, Vol. 44, issue 4, pp. 494 – 505.
7. Panteleeva (Deza), E.I. 1993, "A remark to Divisor problem", *Mathematical notes*, Vol. 53, issue 4, pp 148 – 152.
8. Panteleeva (Deza), E.I. 1994, "Average values of some arithmetic functions", *Mathematical notes*, Vol. 55, issue 5, pp. 7 – 12.
9. Panteleeva (Deza), E.I. 2001, "Dirichlet divisor problem in the ring of the Gaussian integers", *Works of MPGU*, № 4, pp. 23 – 34.
10. Panteleeva (Deza), E.I. & Varukhina, L.V. 2000, "Estimations of adding function of Dirichlet series", in *Scientific works of mathematical department of MPGU*, *M.: MPGU*, pp. 45 – 56.
11. Panteleeva (Deza), E.I. & Varukhina L.V. 2013, "On estimation of zeta sums and Dirichlet divisor problem", *Issue of St. Petersburg University*, Series 1, issue 4, pp. 15 – 24.
12. Prahar, K. 1967, "Distribution of prime numbers", -*M.: Mir*.
13. Titchmarsh, E.K. 1953, "The theory of the Riemann zeta function", *M.: IL*.
14. Titchmarsh, E.K. 1980, "The theory of functions", *M.: Nauka*.
15. Ivić, A. 1985, *The Riemann zeta function*, *New York: J. Wiley & Sons*.
16. Panteleeva (Deza), E.I. & Varukhina, L.V. 2008, "On mean values of some arithmetic functions in number fields", *Discrete Mathematics*, Vol. 308, pp. 4892 – 4899.

Получено 16.06.2018

Принято в печать 17.08.2018