ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 512.548.74 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-304-318

Слабо обратимые n-квазигруппы

Малышев Фёдор Михайлович — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН.
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Аннотация

Исследуются n-квазигруппы ($n \geqslant 3$) со следующим свойством *слабой обратимости*. Если на каких-то двух наборах из n аргументов с одинаковыми началами, одинаковыми концами, но с различными оставшимися средними частями (одной длины) результат операции одинаков, то при любых одинаковых началах (другой длины), при прежних средних частях и при любых одинаковых концах (соответствующей длины) результат операции будет одинаков. Для таких n-квазигрупп доказывается аналог теоремы Поста – Глускина – Хоссу, которая сводит операцию n-квазигруппы к групповой. Утверждаемое теоремой представление n-квазигрупповой операции с помощью автоморфизма группы, как оказалось, имеет место в более слабых (и вполне естественных) предположениях, нежели ассоциативность и (i, j)-ассоциативность, требовавшиеся ранее. Хорошо известные (i, j)-ассоциативные n-квазигруппы удовлетворяют рассматриваемому условию слабой обратимости.

Ключевые слова: n-квазигруппа, (i, j)-ассоциативность, автоморфизм группы, теорема Поста–Глускина–Хоссу.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
Ф. М. Малышев. Слабо обратимые $\boldsymbol{n}$-квазигруппы // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 304–318.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 512.548.74 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-304-318

Weakly invertible n-quasigroups

Malyshev Fedor Mikhailovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head Scientist Researcher, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
e-mail: malyshevfm@mi-ras.ru

Abstract

We study the n-quasigroups ($n \geqslant 3$) with the following property *weak invertibility*. If on any two sets of n arguments with the equal initials, equal ends, but with different middle parts (of the same length), the result of the operation is the same, then for any identical beginnings (of a other length), with the previous middle parts and for any identical ends (the corresponding length), the result of the operation will be the same. For such n-quasigroups An analog of the Post-Gluskin-Hoss theorem is proved, which reduces the operation of an n-quasigroup to a group one. The representation of the n-quasigroup operation proved by the theorem with the help of the automorphism of the group turned out to occur in weaker (and quite natural) assumptions, rather than the associativity and (i, j)-associativity required earlier. Well-known (i, j)-associative n-quasigroups satisfy the condition of weak invertibility.

Keywords: n-quasigroup, (i, j)-associativity, group automorphism, Post–Gluskin–Hoss theorem.

Bibliography: 20 titles.

For citation:
F. M. Malyshev, 2018, "Weakly invertible n-quasigroups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 304–318.

1. Введение

Напомним, что n-квазигрупповой операцией на множестве X называется отображение $Q : X^n \to X$, являющееся биекцией (взаимно однозначным отображением) по каждому из n аргументов при любой фиксации остальных $n-1$ аргументов (см. [1], § 8). Для $Q(x_1, \dots, x_n)$ иногда будем использовать обозначение $[x_1, \dots, x_n]$, $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$. Далее предполагается $n \geqslant 3$. (При $n = 2$ рассматриваемые в работе вопросы относятся к простым свойствам квазигрупп.)

Ассоциативная n-квазигруппа (X, Q) называется n-арной группой (см. [2], гл. 1; [3]). Условие ассоциативности задаётся семейством тождеств

$$\begin{aligned}&[x_1, \dots, x_{i-1}, [x_i, \dots, x_{i+n-1}], x_{i+n}, \dots, x_{2n-1}] = \\ &= [x_1, \dots, x_{j-1}, [x_j, \dots, x_{j+n-1}], x_{j+n}, \dots, x_{2n-1}],\end{aligned} \tag{1}$$

$1 \leqslant i < j \leqslant n$.

Теорема Поста – Глускина – Хоссу (см. [4], [5], [6], [7]) утверждает, что ассоциативная операция n-квазигруппы на множестве X может быть представлена в виде

$$[x_1, \dots, x_n] = x_1 \cdot \varphi(x_2) \cdot \dots \cdot \varphi^{n-2}(x_{n-1}) \cdot \varphi^{n-1}(x_n) \cdot c, \tag{2}$$

для некоторых: групповой операции $\cdot$ на X, $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$, $c \in X$, удовлетворяющих условиям:

$$\varphi^{n-1}(x) = c \cdot x \cdot c^{-1}, \ x \in X, \ \varphi(c) = c. \tag{3}$$

Интерес к этой теореме не ослабевает до настоящего времени. Её многочисленные аналоги доказываются и при других условиях (см., например, [7] – [19]).

Рассматриваемые в настоящей работе слабо обратимые n-квазигруппы ближе всего к давно известным (i, j)-ассоциативным n-квазигруппам, которые задаются только одним тождеством (1) с заданными $i < j$. Связанную с (i, j)-ассоциативностью литературу можно найти, например, в работе Ф.Н. Сохацкого [8], в его диссертации [9] и в упомянутой выше монографии В.Д. Белоусова [2], в которой получено окончательное строение (i, j)-ассоциативных n-квазигрупп.

Далее будем придерживаться обозначений из монографии [2], в частности, последовательность $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j$ будет обозначаться как x_i^j. При $i > j$ имеем пустую последовательность x_i^j. Через $x_i^j(\Delta)$, $\Delta \in \mathbb{Z}$, обозначаем последовательность $x_{i+\Delta}, x_{i+1+\Delta}, \dots, x_{j-1+\Delta}, x_{j+\Delta}$. Тогда $x_i^j(0) = x_i^j$, $x_i^j = x_{i+\Delta}^{j+\Delta}(-\Delta)$, $x_i^j(\Delta) = x_{i+\Delta}^{j+\Delta} = x_{i+\Delta}^{j+\Delta}(0)$, $\Delta \in \mathbb{Z}$. Последними обозначениями приходится пользоваться из-за того, что одна и та же последовательность может располагаться на различных позициях многоместной операции. Вместо $(x_i^j) \in X^{j-i+1}$ иногда будем писать $x_i^j \in X^{j-i+1}$ (без скобок).

Все возникающие в работе квазигрупповые операции $B\colon X^m \to X$ будут относиться к одному и тому же основному множеству X, поэтому иногда для сокращения саму операцию B будем называть m-квазигруппой.

Квазигруппы B', B'' одной арности m, отличающиеся домножением на подстановку $\sigma \in S_X$, $B' = \sigma B''$, $(\sigma B'')(x) = \sigma(B''(x))$, $x \in X^m$, будем считать эквивалентными и обозначать $B' \simeq B''$. Класс эквивалентности m-квазигрупп определяется разбиением

$$X^m = \coprod_{x \in X} Y_x \tag{4}$$

таким, что $Y_x \neq Y_z$ при $x \neq z$ и $|Y_x \cap \{(a_1^{i-1}, z, a_{i+1}^m(-1)) | \, z \in X\}| = 1$ при любых $x \in X$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $a_1^{m-1} \in X^{m-1}$. На подмножествах разбиения (4) m-квазигрупповые операции из соответствующего класса эквивалентности принимают одинаковые значения.

Определение 1. *Для целых $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $\varpi > 1$, $s + \varpi \leqslant n$, $t + \varpi \leqslant n$, n-квазигруппа (X, Q) является (s, ϖ, t)-слабо обратимой, если из равенства $\left[a_1^s, x_{s+1}^{s+\varpi}(-s), a_{s+\varpi+1}^n\right] = \left[a_1^s, y_{s+1}^{s+\varpi}(-s), a_{s+\varpi+1}^n\right]$ при каких-то $a_1^s \in X^s$, $a_{s+\varpi+1}^n \in X^{n-s-\varpi}$, x_1^ϖ, $y_1^\varpi \in X^\varpi$ следует тождество $\left[z_1^t, x_{t+1}^{t+\varpi}(-t), z_{t+\varpi+1}^n\right] = \left[z_1^t, y_{t+1}^{t+\varpi}(-t), z_{t+\varpi+1}^n\right]$, справедливое для всех $z_1^t \in X^t$, $z_{t+\varpi+1}^n \in X^{n-t-\varpi}$. Если $s = 0$, а $\varpi = n - t$, то $(0, n - t, t)$-слабо обратимую n-квазигруппу будем называть t-слабо обратимой.*

Определение (s, ϖ, t)-слабой обратимости предполагает как бы сокращение крайних последовательностей a_1^s и $a_{s+\varpi+1}^n$ в исходном равенстве. Ясно, что любая n-квазигруппа является $(s, 1, t)$-слабо обратимой при всех s, t, $0 \leqslant s \leqslant n - 1$, $0 \leqslant t \leqslant n - 1$, поэтому в формулировке определения 1 случай $\varpi = 1$ не рассматривается. Заметим ещё, что для (s, ϖ, t)-слабо обратимой n-квазигруппы Q все эквивалентные ей n-квазигруппы σQ, $\sigma \in S_X$, также будут (s, ϖ, t)-слабо обратимыми.

Основная цель настоящей работы состоит в определении строения (s, ϖ, t)-слабо обратимых n-квазигрупп.

Предложение 1. *n-квазигруппа $Q : X^n \to X$ является (s, ϖ, t)-слабо обратимой тогда и только тогда, когда относительно переменных x_1^n со значениями в X^n справедливы тождества*

$$Q(x_1^n) = A(x_1^s, B(x_{s+1}^{s+\varpi}), x_{s+\varpi+1}^n) = C(x_1^t, D(x_{t+1}^{t+\varpi}), x_{t+\varpi+1}^n), \tag{5}$$

в которых A и C некоторые $(n - \varpi + 1)$-квазигруппы, а B и D – эквивалентные ϖ-квазигруппы.

Ясно, что условие $B \simeq D$ в формулировке предложения 1 можно было бы заменить (за счёт переопределения $(n - \varpi + 1)$-квазигруппы C) условием $B = D$. Достаточность вида (5) для (s, ϖ, t)-слабой обратимости n-квазигруппы Q очевидна. Доказательство необходимости, как и доказательство остальных ниже формулируемых предложений, будет приведено в § 2.

Следствие 1. *Если n-квазигруппа Q является (s, ϖ, t)-слабо обратимой, то она является (t, ϖ, s)-, (s, ϖ, s)- и (t, ϖ, t)- слабо обратимой.*

Следствие 2. *Если n-квазигруппа Q является (s, ϖ, s)-слабо обратимой, то она представляется в виде*

$$Q(x_1^n) = A(x_1^s, B(x_{s+1}^{s+\varpi}), x_{s+\varpi+1}^n), \tag{6}$$

где A – $(n - \varpi + 1)$-квазигруппа, B – ϖ-квазигруппа.

Следствие 2 и его доказательство содержатся также в книге [2] на стр. 112, поскольку требование (s, ϖ, s)-слабой обратимости совпадает с условием $D_{s+1,s+\varpi}$, определённом на стр. 110 книги [2].

Следствие 3. *Если n-квазигруппа Q является (s, ϖ, t)-слабо обратимой и $t \geqslant s + \varpi$, то она представляется в виде*

$$Q(x_1^n) = A(x_1^s, B(x_{s+1}^{s+\varpi}), x_{s+\varpi+1}^t, B(x_{t+1}^{t+\varpi}), x_{t+\varpi+1}^n), \tag{7}$$

где A – $(n - 2\varpi + 2)$-квазигруппа, B – ϖ-квазигруппа.

Благодаря следствиям 1, 2 и 3, далее будем предполагать $s < t < s+\varpi$. Обратим внимание, что n-квазигруппы Q вида (6) и (7) всегда являются, соответственно, (s, ϖ, s)- и (s, ϖ, t)-слабо обратимыми.

Теорема 1. *Пусть $Q : X^n \to X$ – (s, ϖ, t)-слабо обратимая n-квазигруппа и $0 \leqslant s < t < s + \varpi$, $t + \varpi \leqslant n$. Тогда*

$$Q(x_1^n) = F\left(x_1^s, \widetilde{Q}\left(x_{s+1}^{t+\varpi}\right), x_{t+\varpi+1}^n\right), \tag{8}$$

где $F : X^{n+s-t-\varpi+1} \to X$ – некоторая $(n+s-t-\varpi+1)$-квазигруппа, $\widetilde{Q} : X^{t+\varpi-s} \to X$ – некоторая $(t-s)$-слабо обратимая m-квазигруппа, $m = \varpi + t - s$. Обратно, если F – произвольная $(n+s-t-\varpi+1)$-квазигруппа, а $\widetilde{Q}$ – произвольная $(t-s)$-слабо обратимая m-квазигруппа, то n-квазигруппа Q, определённая равенством (8), будет (s, ϖ, t)-слабо обратимой.

Теорема 1 (вместе со следствиями $1, 2, 3$) показывает, что для решения поставленной задачи по выяснению строения (s, ϖ, t)-слабо обратимых n-квазигрупп в общем случае (при $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0, \varpi > 1, s+\varpi \leqslant n, t+\varpi \leqslant n$) достаточно понять строение r-слабо обратимых n-квазигрупп для произвольных $n \geqslant 3$ и $r > 0$, $1 \leqslant r < \frac{n}{2}$. (В обозначениях теоремы 1, относящихся к $(\varpi + t - s)$-квазигруппе $\widetilde{Q}$, в качестве n выступает $\varpi + t - s$ и там $r = t - s < \frac{\varpi+t-s}{2}$.)

Напомним, что r-слабая обратимость, $1 \leqslant r \leqslant n-2$, означает, по определению 1, что из равенства $\left[a_1^r, x_{r+1}^n(-r)\right] = \left[a_1^r, y_{r+1}^n(-r)\right]$ при каких-то $a_1^r \in X^r$, $x_1^{n-r} \in X^{n-r}$, $y_1^{n-r} \in X^{n-r}$ следует тождество $\left[x_1^{n-r}, z_{n-r+1}^n(r-n)\right] = \left[y_1^{n-r}, z_{n-r+1}^n(r-n)\right]$, справедливое для всех $z_1^r \in X^r$. Согласно предыдущему, считаем $r < \frac{n}{2}$. Для $r \geqslant \frac{n}{2}$ r-слабо обратимая n-квазигруппа Q, согласно следствию 3, имеет вид (7), где $s = 0$, $\varpi = n - r$, $t = r$, поэтому

$$Q(x_1^n) = A\left(B\left(x_1^{n-r}\right), x_{n-r+1}^r, B\left(x_{r+1}^n\right)\right). \tag{9}$$

В работе [13] доказывается, что ассоциативные n-квазигруппы являются 1-слабо обратимыми. Там же доказывается теорема о том, что конечные 1-слабо обратимые n-квазигруппы (с точностью до эквивалентности) имеют вид (2), в котором $c = e$ – единица группы $(X, \cdot)$. Условия (3) при этом не накладываются. В результате, как следствие, получается новое доказательство теоремы Поста–Глускина–Хоссу в случае конечных множеств X. (Условия ассоциативности (1) остаётся применять к n-квазигруппам, эквивалентным n-квазигруппам специального вида, задаваемого равенством (2) с $c = e$.) Для бесконечных множеств X справедливость теоремы о таком же строении (2) для 1-слабо обратимых n-квазигрупп будет следовать из формулируемой ниже теоремы 2.

Предложение 2. *Если n-квазигруппа $Q : X^n \to X$ является (i, j)-ассоциативной, то она является $(j - i)$-слабо обратимой.*

Основным результатом настоящей работы является теорема 2 о строении r-слабо обратимых n-квазигрупп с $r < \frac{n}{2}$.

Теорема 2. *Пусть (X, Q) – конечная r-слабо обратимая n-квазигруппа, $r < n/2$, $n = n_t = n_0 + tr$, $t \geqslant 0$, $2r < n_0 \leqslant 3r$. Тогда*

$$\begin{aligned} Q(x_1^n) = Pu_0 \cdot Rv_0 \cdot \varphi(Pu_1 \cdot Rv_1) \cdot \varphi^2(Pu_2 \cdot Rv_2) \cdot \ldots \\ \ldots \cdot \varphi^t(Pu_t \cdot Rv_t) \cdot \varphi^{t+1}(Pu_{t+1} \cdot Rv_{t+1}) \cdot \varphi^{t+2}(Pu_{t+2}), \end{aligned} \tag{10}$$

где: $\cdot$ – групповая операция на множестве X, $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$,
$P : X^{n_0-2r} \to X$ – $(n_0 - 2r)$-квазигруппа, $u_i \in X^{n_0-2r}$, $i = 0, 1, \ldots, t+2$,
$R : X^{3r-n_0} \to X$ – $(3r - n_0)$-квазигруппа, $v_i \in X^{3r-n_0}$, $i = 0, 1, \ldots, t+1$,
$(x_1^n) = (u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_t, v_t, u_{t+1}, v_{t+1}, u_{t+2})$.

Теорема 2 будет доказана в § 3. Скобки вокруг аргументов отображений, как и в формулировке теоремы 2, будут опускаться, когда это возможно. Обратное к теореме 2 утверждение, очевидно, также справедливо. Для любых: групповой операции $\cdot$ на множестве X,

$\varphi \in \mathrm{Aut}(X,\cdot)$, (n_0-2r)-квазигруппы P, $(3r-n_0)$-квазигруппы R n-квазигруппа Q, задаваемая равенством (10), будет r-слабо обратимой.

Выражение (10) позволяет убедиться, что из r-слабой обратимости n-квазигруппы Q следует её αr-слабая обратимость для всех натуральных $\alpha \leqslant (n-2)/r$. В этой связи возникает (пока открытый) вопрос, будет ли n-квазигруппа Q r-слабо обратимой, если она является r_1- и r_2-слабо обратимой, а $r =$НОД(r_1, r_2)?

Строение (i,j)-ассоциативных n-квазигрупп (см. теорему 8.6 на стр. 210 в [2], а также теорему 4 на стр. 77 работы [8]) показывает, что предложение 2 справедливо в более сильной форме. Именно, следствием этих теорем является следующее предложение.

Предложение 3. *Любая (i,j)-ассоциативная n-квазигруппа является r-слабо обратимой для $r =$НОД$(i-1, j-i, n-1)$.*

Согласно теореме 8.6 монографии [2] дополнительные требования на выражение (10), обусловленные (i,j)-ассоциативностью, заключаются (по аналогии с (2) и (3)) в домножении справа на элемент $c \in X$, для которого $\varphi^{t+2}(x) = cxc^{-1}$, $x \in X$, $\varphi^{k/r}(c) = c$, где $k =$НОД$(j-i, n-1)$, при этом, $n = 1+(t+2)r$, т.е. $n_0 - 2r = 1$, и $P(x) = x$, $x \in X$.

Теорема 2 показывает, что утверждаемое теоремой Поста – Глускина – Хоссу выражение n-квазигруппы с помощью автоморфизма групповой операции имеет место в менее жёстких (и вполне естественных) предположениях, нежели ассоциативность и (i,j)-ассоциативность. Можно надеяться, что теорема 2 обеспечит более простое доказательство теоремы Белоусова о строении (i,j)-ассоциативных n-квазигрупп.

2. Доказательства вспомогательных утверждений

Как и во введении для n-квазигрупповой операции Q в этом параграфе иногда будет использоваться обозначение $Q(x_1^n) = [x_1, \dots, x_n]$.

2.1. Доказательтво предложения 1.

Доказательство. Вначале докажем достаточность. Пусть n-квазигруппа Q представляется в виде (5) и $\left[a_1^s, x_{s+1}^{s+\varpi}(-s), a_{s+\varpi+1}^n\right] = \left[a_1^s, y_{s+1}^{s+\varpi}(-s), a_{s+\varpi+1}^n\right]$ при каких-то $a_1^s \in X^s$, $a_{s+\varpi+1}^n \in X^{n-s-\varpi}$, x_1^ϖ, $y_1^\varpi \in X^\varpi$. Полагая в (5) $B = D$, имеем следующую цепочку импликаций.

$$A\left(a_1^s, B(x_{s+1}^{s+\varpi}(-s)), a_{s+\varpi+1}^n\right) = A\left(a_1^s, B(y_{s+1}^{s+\varpi}(-s)), a_{s+\varpi+1}^n\right) \Rightarrow B(x_1^\varpi) = B(y_1^\varpi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\left(z_1^t, B(x_{t+1}^{t+\varpi}(-t)), z_{t+\varpi+1}^n\right) = C\left(z_1^t, B(y_{t+1}^{t+\varpi}(-t)), z_{t+\varpi+1}^n\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[z_1^t, x_{t+1}^{t+\varpi}(-t), z_{t+\varpi+1}^n\right] = \left[z_1^t, y_{t+1}^{t+\varpi}(-t), z_{t+\varpi+1}^n\right].$$

Здесь $z_1^t \in X^t$ и $z_{t+\varpi+1}^n \in X^{n-t-\varpi}$ могут быть произвольными, поэтому достаточность в предложении 1 доказана.

Докажем необходимость. Пусть n-квазигруппа Q является (s,ϖ,t)-слабо обратимой. Для заданного $a = a_1^{n-\varpi} \in X^{n-\varpi}$ элементы $x_1^\varpi, y_1^\varpi \in X^\varpi$ объявим (a,s)-эквивалентными, если $[a_1^s, x_{s+1}^{\varpi+s}(-s), a_{\varpi+s+1}^n(-\varpi)] = [a_1^s, y_{s+1}^{\varpi+s}(-s), a_{\varpi+s+1}^n(-\varpi)]$. Согласно (s,ϖ,t)-слабой обратимости n-квазигруппы Q, то же самое разбиение на классы эквивалентности имеем для (z,t)-эквивалентности на X^ϖ, причём, для всех $z \in X^{n-\varpi}$ оно одно и то же. Благодаря этому разбиение на классы (a,s)-эквивалентности не зависит от конкретного $a \in X^{n-\varpi}$.

Определим отображения B и D из X^ϖ на X одинаково на каждом классе эквивалентности и различно на разных классах эквивалентности, например, $B(x_1^\varpi) = D(x_1^\varpi) = [b_1^s, x_{s+1}^{\varpi+s}(-s), b_{\varpi+s+1}^n(-\varpi)]$ для какого-либо $b_1^{n-\varpi} \in X^{n-\varpi}$. Тогда B и D будут ϖ-квазигруппами, т.к. Q является n-квазигруппой, причём, $B \simeq D$, т.к. они построены по одному и

тому же разбиению множества X^{ϖ} на классы эквивалентности. Отображения A и C из $X^{n-\varpi+1}$ на X зададим равенствами $A\left(z_1^s, z, z_{s+2}^{n-\varpi+1}(-1)\right) = Q(z_1^s, x_{s+1}^{\varpi+s}(-s), z_{\varpi+s+1}^n(-\varpi))$, $C\left(z_1^t, z, z_{t+2}^{n-\varpi+1}(-1)\right) = Q(z_1^t, x_{t+1}^{\varpi+t}(-t), z_{\varpi+t+1}^n(-\varpi))$, $B(x_1^{\varpi}) = z$. Такие задания корректны, потому как не зависят от конкретных x_1^{ϖ} из классов эквивалентности $B^{-1}(x_1^{\varpi})$. Отображения A и C будут $(n-\varpi+1)$-квазигруппами, т.к. Q является n-квазигруппой.

Предложение 1 доказано.

Следствие 1 вытекает непосредственно из выражения (5).

Доказательство представления (6) в следствии 2 совпадает с доказательством предложения 1 в случае $t = s$.

2.2. Доказательство следствия 3.

Доказательство. Пусть n-квазигруппа Q является (s, ϖ, t)-слабо обратимой и $t \geqslant s+\varpi$. По предложению 1 для некоторых $(n-\varpi+1)$-квазигрупп $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ и ϖ-квазигруппы B имеем тождества

$$\begin{aligned} Q(x_1^n) &= \widehat{A}(x_1^s, B(x_{s+1}^{s+\varpi}), x_{s+\varpi+1}^t, x_{t+1}^{t+\varpi}, x_{t+\varpi+1}^n) = \\ &= \widehat{C}(x_1^s, x_{s+1}^{s+\varpi}, x_{s+\varpi+1}^t, B(x_{t+1}^{t+\varpi}), x_{t+\varpi+1}^n). \end{aligned} \tag{11}$$

В силу второго здесь тождества, после замены в аргументах отображения $\widehat{A}$ элемента $x_{t+1}^{t+\varpi}$ на любой элемент из $B^{-1}(x_{t+1}^{t+\varpi})$, оставляя остальные компоненты в аргументах $\widehat{A}$ неизменными, значение $\widehat{A}$ не изменится. В результате, по $(n-\varpi+1)$-квазигруппе $\widehat{A}$ определяется $(n-2\varpi+2)$-квазигруппа A, для которой справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\widehat{A}(x_1^s, B(x_{s+1}^{s+\varpi}), x_{s+\varpi+1}^t, x_{t+1}^{t+\varpi}, x_{t+\varpi+1}^n) = \\ &= A(x_1^s, B(x_{s+1}^{s+\varpi}), x_{s+\varpi+1}^t, B(x_{t+1}^{t+\varpi}), x_{t+\varpi+1}^n). \end{aligned} \tag{12}$$

Из равенств (11) и (12) получаем равенство (7).

Следствие 3 доказано.

2.3. Доказательство теоремы 1.

Доказательство. Вначале докажем обратное утверждение в теореме 1. Пусть $Q(x_1^n) = F\left(x_1^s, \widetilde{Q}\left(x_{s+1}^{t+\varpi}\right), x_{t+\varpi+1}^n\right)$, где F – произвольная $(n+s-t-\varpi+1)$-квазигруппа, а $\widetilde{Q}$ – произвольная $(t-s)$-слабо обратимая $(\varpi+t-s)$-квазигруппа, $0 \leqslant s < t < s+\varpi$, $t+\varpi \leqslant n$. Покажем, что n-квазигруппа Q является (s, ϖ, t)-слабо обратимой.

Обозначим $u = x_1^s$, $v = x_{s+1}^t$, $w = x_{t+1}^{s+\varpi}$, $y = x_{s+\varpi+1}^{t+\varpi}$, $z = x_{t+\varpi+1}^n$. Предположим, что

$$Q(U, V, W, Y, Z) = Q(U, V', W', Y, Z) \tag{13}$$

для некоторых
$U \in X^s$, $V, V' \in X^{t-s}$, $W, W' \in X^{s+\varpi-t}$, $Y \in X^{t-s}$, $Z \in X^{n-t-\varpi}$.
Из (8) и (13) следует $F\left(U, \widetilde{Q}\left(V, W, Y\right), Z\right) = F\left(U, \widetilde{Q}\left(V', W', Y\right), Z\right)$, а значит и $\widetilde{Q}\left(V, W, Y\right) = \widetilde{Q}\left(V', W', Y\right)$. В силу $(t-s)$-слабой обратимости $(\varpi+t-s)$-квазигруппы $\widetilde{Q}$ получаем равенства $\widetilde{Q}\left(v, V, W\right) = \widetilde{Q}\left(v, V', W'\right)$ для всех $v \in X^{t-s}$, а, значит, и равенства

$$\begin{aligned} Q(u, v, V, W, z) &= F\left(u, \widetilde{Q}\left(v, V, W\right), z\right) = \\ &= F\left(u, \widetilde{Q}\left(v, V', W'\right), z\right) = Q(u, v, V', W', z) \end{aligned}$$

для всех $u \in X^s$, $v \in X^{t-s}$, $z \in X^{n-t-\varpi}$.

Обратное утверждение в теореме 1 доказано.

Пусть, теперь, (s, ϖ, t)-слабо обратимая n-квазигруппа Q уже имеет вид (8) для некоторых $(n+s-t-\varpi+1)$-квазигруппы F и $(\varpi+t-s)$-квазигруппы $\widetilde{Q}$. Докажем, что тогда $\widetilde{Q}$ будет $(t-s)$-слабо обратимой $(\varpi+t-s)$-квазигруппой. Пусть $\widetilde{Q}(V, W, Y) = \widetilde{Q}(V, W', Y')$ для некоторых

$V \in X^{t-s}$, $W, W' \in X^{s+\varpi-t}$, $Y, Y' \in X^{t-s}$. Тогда

$$Q(U,V,W,Y,Z) = F(U,\widetilde{Q}(V,W,Y),Z) = F(U,\widetilde{Q}(V,W',Y'),Z) = \\ = Q(U,V,W',Y',Z), \;\; U \in X^s, \; Z \in X^{n-t-\varpi}.$$

В силу (s,ϖ,t)-слабой обратимости n-квазигруппы Q она будет (по следствию 1) и (t,ϖ,s)-слабо обратимой, поэтому $Q(u,W,Y,y,z) = Q(u,W',Y',y,z)$ для всех $u \in X^s$, $y \in X^{t-s}$, $z \in X^{n-t-\varpi}$. Тогда, согласно (8), $F(u,\widetilde{Q}(W,Y,y),z) = F(u,\widetilde{Q}(W',Y',y),z)$ и $\widetilde{Q}(W,Y,y) = \widetilde{Q}(W',Y',y)$. Этим доказана $(t-s)$-слабая обратимость $(\varpi+t-s)$-квазигруппы $\widetilde{Q}$ в условиях представления (8). Для доказательства теоремы 1 остаётся доказать возможность представления (8) в случае (s,ϖ,t)-слабо обратимости n-квазигруппы Q при $0 \leqslant s < t < s+\varpi$.

Как и при доказательстве предложения 1 для $m = \varpi + t - s$ элементы $x_1^m, y_1^m \in X^m$ назовём (a,s)-эквивалентными, $a = a_1^{n-m} \in X^{n-m}$, если $Q(a_1^s, x_{s+1}^{\varpi+t}(-s), a_{\varpi+t+1}^n(-m)) = Q(a_1^s, y_{s+1}^{\varpi+t}(-s), a_{\varpi+t+1}^n(-m))$. Представление (8) для n-квазигруппы Q будет иметь место, если разбиение множества X^m на классы (a,s)-эквивалентности не зависит от конкретного a, является одним и тем же для всех $a \in X^{n-m}$.

По предложению 1 для n-квазигруппы Q имеет место представление (5), согласно которому $x = x_1^m$ и $y = y_1^m$ будут (a,s)-эквивалентными, если $B(x_1^\varpi) = B(y_1^\varpi)$ и $x_{\varpi+1}^m = y_{\varpi+1}^m$. Такие $x, y \in X^m$ будем называть B-связанными. Аналогично, $x = x_1^m$ и $y = y_1^m$ будут (a,s)-эквивалентными, если $x_1^{t-s} = y_1^{t-s}$ и $D(x_{t-s+1}^m) = D(y_{t-s+1}^m)$. Такие $x, y \in X^m$ будем называть D-связанными. Два элемента $x, y \in X^m$ назовём связанными, если они являются или B-связанными или D-связанными. Отношение связанности на X^m продолжим по транзитивности. Связанные элементы X^m являются (a,s)-эквивалентными, но отношение связанности не зависит от $a \in X^{n-m}$.

Зафиксируем некоторый элемент $o \in X$ и номер $j_0 \in \{1,\dots,n\}$, $t+1 \leqslant j_0 \leqslant s+\varpi$, $t-s+1 \leqslant j_0 - s \leqslant \varpi$. Через $o_i^j \in X^{j-i+1}$ обозначим последовательность из $j-i+1$ элементов, равных o, а через $\mathcal{O}(j_0-s)$ – подмножество в X^m, состоящее из элементов $x_1^m = (x_1,\dots,x_m)$, для которых $x_i = o$ для всех $i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_0-s\}$, а $x_{j_0-s} \in X$ может быть произвольным, $x_1^m = (o_1^{j_0-s-1}, x_{j_0-s}^{j_0-s}, o_{j_0-s+1}^m)$. Пара различных элементов из подмножества $\mathcal{O}(j_0-s)$ не может быть связанной, т.к. она не может быть (a,s)-эквивалентной.

Каждый элемент из X^m связан с некоторым элементом из $\mathcal{O}(j_0-s)$. Действительно, для произвольного $x = x_1^m \in X^m$, $x = (x_1^{t-s}, x_{t-s+1}^\varpi, x_{\varpi+1}^m)$, имеем B-связанный с ним элемент $\tilde{x} \in X^m$ вида $\tilde{x} = (o_1^{t-s}, \tilde{x}_{t-s+1}^\varpi, x_{\varpi+1}^m)$, т.к. отображение B является ϖ-квазигруппой. В свою очередь, элемент $\tilde{x}$ D-связен с элементом из $\mathcal{O}(j_0-s)$ вида $(o_1^{j_0-s-1}, \hat{x}, o_{j_0-s+1}^m)$, $\hat{x} \in X$, т.к. отображение D является ϖ-квазигруппой.

В результате, множество X^m разбивается на подмножества связанности, каждое из которых включено в некоторый класс (a,s)-эквивалентности и пересекается с множеством $\mathcal{O}(j_0-s)$ ровно по одному элементу $(o_1^{j_0-s-1}, \hat{x}, o_{j_0-s+1}^m)$. Классы (a,s)-эквивалентности пересекаются с множеством $\mathcal{O}(j_0-s)$ тоже по одному элементу. Тем самым, отношение (a,s)-эквивалентности совпадает с отношением связанности. Но последнее не зависит от конкретного $a \in X^{n-m}$.

Теорема 1 доказана.

2.4. Доказательство предложения 2.

Доказательство. Пусть n-квазигруппа Q является (i,j)-ассоциативной, $i < j$. Проверим, что она является $(j-i)$-слабо обратимой. Обозначим $u = x_1^{i-1}$, $v = x_i^{j-1}$, $w = x_j^{n+i-1}$, $y = x_{n+i}^{n+j-1}$, $z = x_{n+j}^{2n-1}$. Пусть $[V,W] = [V,W']$ для некоторых $V \in X^{j-i}$, $W, W' \in X^{n-j+i}$. Тогда

$$[u,[V,W],y,z] = [u,[V,W'],y,z] \tag{14}$$

для произвольных $u \in X^{i-1}$, $y \in X^{j-i}$, $z \in X^{n-j}$. Применяя к обеим частям равенства (14) условие (i,j)-ассоциативности, получаем $[u,V,[W,y],z] = [u,V,[W',y],z]$ и, затем, $[W,y] = [W',y]$. Предложение 2 доказано.

3. Строение r-слабо обратимых n-квазигрупп

В настоящем параграфе доказывается основная в работе теорема 2 о строении r-слабо обратимых n-квазигрупп. В теореме 2 предполагается $r < n/2$. В случае $r \geqslant n/2$ r-слабо обратимые n-квазигруппы, как доказано в § 2, имеют вид (9). Теорема 2 вместе с теоремой 1, следствиями 2 и 3 даёт исчерпывающее представление о строении (s, ϖ, t)-слабо обратимых n-квазигрупп в общем случае для $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, $\varpi > 1$, $s + \varpi \leqslant n$, $t + \varpi \leqslant n$.

В настоящем параграфе для левых и правых сдвигов на элемент a в множестве X с групповой операцией $\cdot$ будем использовать обозначения $\mathcal{L}_a$, $\mathcal{R}_a : X \to X$, $a \in X$, $\mathcal{L}_a x = ax$, $\mathcal{R}_a x = xa$, $x \in X$. При произведениях отображений и подстановок действия будут производиться в порядке справа налево. Скобки вокруг аргументов отображений будут опускаться, когда это возможно.

В доказательстве теоремы 2 будет использована следующая простая лемма.

Лемма 1. *Если для подстановок σ, σ_1, $\sigma_2 \in S_X$ в группе X выполняется тождество*

$$\sigma(x \cdot y) = \sigma_1 x \cdot \sigma_2 y, \tag{15}$$

справедливое при любых $x, y \in X$, то для некоторых элементов $a, b \in X$ и автоморфизма $\psi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$ имеем:

$$\sigma = \mathcal{R}_{ab}\psi, \tag{16}$$

$$\sigma_1 = \mathcal{R}_a\psi, \tag{17}$$

$$\sigma_2 = \mathcal{L}_{a^{-1}}\mathcal{R}_{ab}\psi. \tag{18}$$

Обратно, для любых $a, b \in X$ и любого автоморфизма $\psi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$ справедливо тождество (15), в котором подстановки σ, σ_1, σ_2 заданы равенствами (16), (17), (18).

Доказательство. Положим $a = \sigma_1 e$, $b = \sigma_2 e$, e – единица группы, $\psi = \mathcal{R}_{b^{-1}a^{-1}}\sigma$. Полагая в (15) сначала $x = e$, затем $y = e$, получаем $\sigma_2 = \mathcal{L}_{a^{-1}}\sigma$, $\sigma_1 = \mathcal{R}_{b^{-1}}\sigma$. Подставляя полученные σ_1, σ_2 в (15), убеждаемся, что $\psi = \mathcal{R}_{b^{-1}a^{-1}}\sigma \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$.

Лемма 1 доказана.

3.1. Доказательство теоремы 2.

Доказательство. Вместо равенства (10) будет доказываться чуть более слабое выражение:

$$\begin{gathered} Q(x_1^n) = \tau\left[Pu_0 \cdot Rv_0 \cdot \varphi(Pu_1 \cdot Rv_1) \cdot \varphi^2(Pu_2 \cdot Rv_2) \cdot \ldots \right. \\ \left. \ldots \cdot \varphi^t(Pu_t \cdot Rv_t) \cdot \varphi^{t+1}(Pu_{t+1} \cdot Rv_{t+1}) \cdot \varphi^{t+2}(Pu_{t+2})\right] \end{gathered} \tag{19}$$

для некоторой подстановки $\tau \in S_X$. Напомним, что в равенстве (19):
$\cdot$ – групповая операция на множестве X, $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$,
$P : X^{n_0 - 2r} \to X$ – $(n_0 - 2r)$-квазигруппа, $u_i \in X^{n_0 - 2r}$, $i = 0, 1, \ldots, t + 2$,
$R : X^{3r - n_0} \to X$ – $(3r - n_0)$-квазигруппа, $v_i \in X^{3r - n_0}$, $i = 0, 1, \ldots, t + 1$,

$$(x_1^n) = (u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_t, v_t, u_{t+1}, v_{t+1}, u_{t+2}),$$

$n = n_t = n_0 + tr$, $2r < n_0 \leqslant 3r$, $t \geqslant 0$, $r < n/2$. (При $n_0 = 3r$ под 0-квазигруппой R понимается элемент множества X, $R \in X$.)

Равенство (10) из (19) получается при переходе к групповой операции $x * y = \tau(\tau^{-1}x \cdot \tau^{-1}y)$. Единицей будет $e_* = \tau(e)$, если $e \in X$ – единица группы $(X, \cdot)$. Вместо φ, P и R будут выступать, соответственно, $\phi = \tau\varphi\tau^{-1} \in \mathrm{Aut}(X, *)$, $\widetilde{P} = \tau P$ и $\widetilde{R} = \tau R$. Полагая в (19) $\varphi = \tau^{-1}\phi\tau$, $P = \tau^{-1}\widetilde{P}$, $R = \tau^{-1}\widetilde{R}$ и $x \cdot y = \tau^{-1}(\tau x * \tau y)$, x, $y \in X$, для $Q(x_1^n)$ получим выражение вида (10), в котором вместо φ, P, R, $\cdot$ выступают, соответственно, ϕ, $\widetilde{P}$, $\widetilde{R}$, $*$.

Равенство (19) (при некоторых τ, P, R, $\cdot$, φ) для r-слабо обратимой n-квазигруппы Q докажем индукцией по $t \geqslant 0$. Вначале проверим индуктивный переход, затем проведём доказательство для $t = 0$, когда $2r < n \leqslant 3r$ или $n/3 \leqslant r < n/2$.

Пусть $t > 0$. По предложению 1 имеем тождество

$$Q(x_1^n) = A(x_1^r, B(x_{r+1}^n)) = C(D(x_1^{n-r}), x_{n-r+1}^n), \tag{20}$$

справедливое для всех $x_1^n \in X^n$, в котором A и C – $(r+1)$-квазигруппы, а B и D – $(n-r)$-квазигруппы, причём, $B \simeq D$, $B = \pi D$, $\pi \in S_X$. По теореме Хоссу (см. [20] или теорему 4.2 на стр. 88 в [2]) из двух представлений (20) следует тождество

$$Q(x_1^n) = K(x_1^r) \circ L(x_{r+1}^{n-r}) \circ M(x_{n-r+1}^n), \tag{21}$$

где: $\circ$ – групповая операция на X, K и M – r-квазигруппы, L – $(n-2r)$-квазигруппа. В нашем случае (по доказательству предложения 1) дополнительно имеем тождество

$$K(x_1^r) \circ L(x_{r+1}^{n-r}) = \pi(L(x_1^{n-2r}) \circ M(x_{n-2r+1}^{n-r})), \quad \pi \in S_X. \tag{22}$$

Проверим, что $Q'(x_1^{n-r}) = K(x_1^r) \circ L(x_{r+1}^{n-r})$ тоже является r-слабо обратимой $(n-r)$-квазигруппой, $n - r = n_0 + (t-1)r = n_{t-1}$. Пусть

$$K(a_1^r) \circ L(x_{r+1}^{n-r}) = K(a_1^r) \circ L(y_{r+1}^{n-r}).$$

Тогда справедливо равенство

$$K(a_1^r) \circ L(x_{r+1}^{n-r}) \circ M(z_{n-r+1}^n) = K(a_1^r) \circ L(y_{r+1}^{n-r}) \circ M(z_{n-r+1}^n) \tag{23}$$

для всех $z_{n-r+1}^n \in X^r$. Согласно (21) и в силу r-слабой обратимости n-квазигруппы Q из равенств (23) следуют равенства

$$K(x_{r+1}^{2r}) \circ L(x_{2r+1}^{n-r}, z_{n-r+1}^n) \circ M(z_{n+1}^{n+r}) = K(y_{r+1}^{2r}) \circ L(y_{2r+1}^{n-r}, z_{n-r+1}^n) \circ M(z_{n+1}^{n+r}),$$

справедливые для всех $z_{n-r+1}^{n+r} \in X^{2r}$, из которых, в свою очередь, следуют равенства

$$K(x_{r+1}^{2r}) \circ L(x_{2r+1}^{n-r}, z_{n-r+1}^n) = K(y_{r+1}^{2r}) \circ L(y_{2r+1}^{n-r}, z_{n-r+1}^n),$$

справедливые для всех $z_{n-r+1}^n \in X^r$. Таким образом, $(n-r)$-квазигруппа $Q'(x_1^{n-r}) = K(x_1^r) \circ L(x_{r+1}^{n-r})$ является r-слабо обратимой и к ней можно применять предположение индукции. Тогда из равенств (21), (19) и (20) получим тождества

$$\begin{aligned} Q(x_1^n) = \tau' \big[& Pu_0 \cdot Rv_0 \cdot \varphi(Pu_1 \cdot Rv_1) \cdot \varphi^2(Pu_2 \cdot Rv_2) \cdot \ldots \\ & \ldots \cdot \varphi^t(Pu_t \cdot Rv_t) \cdot \varphi^{t+1} Pu_{t+1} \big] \circ M(v_{t+1}, u_{t+2}) = \\ & = A(u_0, v_0, B(u_1, v_1, \ldots, u_{t+1}, v_{t+1}, u_{t+2})) = \\ & = C(D(u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_t, v_t, u_{t+1}), v_{t+1}, u_{t+2}). \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь: $\tau' \in S_X$, $\cdot$ – групповая операция на множестве X, отличная вообще говоря от $\circ$, P – $(3r - n_0)$-квазигруппа, R – $(n_0 - 2r)$-квазигруппа, $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$.

Полагая в (24) $M(v_{t+1}, u_{t+2}) = e_\circ$, получим выражение для $D(u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_t, v_t, u_{t+1})$. Полагая же в (24) $Pu_0 \cdot Rv_0 = e$ и уменьшая индексы на единицу, получим выражение для $B(u_0, v_0, u_1, v_1, \ldots, u_t, v_t, u_{t+1})$. После этого с учётом эквивалентности $D \simeq B$ получим тождество

$$\begin{aligned} \rho\tau' \big[& Pu_0 \cdot Rv_0 \cdot \varphi(Pu_1 \cdot Rv_1) \cdot \ldots \cdot \varphi^t(Pu_t \cdot Rv_t) \cdot \varphi^{t+1} Pu_{t+1} \big] = \\ & = \tau' \big[\varphi(Pu_0 \cdot Rv_0) \cdot \varphi^2(Pu_1 \cdot Rv_1) \cdot \ldots \\ & \ldots \cdot \varphi^t(Pu_{t-1} \cdot Rv_{t-1}) \cdot \varphi^{t+1} Pu_t \big] \circ M(v_t, u_{t+1}), \end{aligned} \tag{25}$$

справедливое при некоторой подстановке $\rho \in S_X$. Левая часть в (25) эквивалентна $(n-r)$-квазигруппе D, а правая часть эквивалентна $(n-r)$-квазигруппе B.

Обозначим

$$\mathcal{X} = Pu_0 \cdot Rv_0 \cdot \varphi(Pu_1 \cdot Rv_1) \cdot ... \cdot \varphi^{t-1}(Pu_{t-1} \cdot Rv_{t-1}) \cdot \varphi^t Pu_t.$$

Тождество (25) перепишется в виде

$$\rho\tau' \left[\mathcal{X} \cdot \varphi^t Rv_t \cdot \varphi^{t+1} Pu_{t+1}\right] = \tau'\varphi\mathcal{X} \circ M(v_t, u_{t+1}), \tag{26}$$

где $\mathcal{X}$, v_t, $u_{t+1} \in X$ – произвольные. Полагая

$$\mathcal{Y} = \varphi^{-1}(\mathcal{X} \cdot \varphi^t Rv_t \cdot \varphi^{t+1} Pu_{t+1}),$$

из (24) и (26) получаем

$$Q(x_1^n) = \tau'\varphi\mathcal{Y} \circ M(v_{t+1}, u_{t+2}) = \rho\tau'[\mathcal{Y} \cdot \varphi^t Rv_{t+1} \cdot \varphi^{t+1} Pu_{t+2}] =$$
$$= \rho\tau'\varphi^{-1}[\mathcal{X} \cdot \varphi^t Rv_t \cdot \varphi^{t+1} Pu_{t+1} \cdot \varphi^{t+1} Rv_{t+1} \cdot \varphi^{t+2} Pu_{t+2}].$$

В результате имеем представление (19) с $\tau = \rho\tau'\varphi^{-1}$.

Справедливость индуктивного перехода доказана.

Осталось теорему 2 доказать для $t = 0$ (начало индукции). Тогда $n = n_0 = 3(n-2r)+$ $+2(3r-n)$, $2r < n \leqslant 3r$, $n/3 \leqslant r < n/2$, $(x_1^n) = (u_0, v_0, u_1, v_1, u_2), u_0, u_1, u_2 \in X^{n-2r}$, $v_0, v_1 \in X^{3r-n}$. Необходимо убедиться, что для r-слабо обратимых n-квазигрупп Q при таких соотношениях между n и r имеет место тождество

$$Q(x_1^n) = \tau[Pu_0 \cdot Rv_0 \cdot \varphi(Pu_1 \cdot Rv_1) \cdot \varphi^2 Pu_2] \tag{27}$$

при некоторых $\tau \in S_X$, групповой операции $\cdot$ на X, $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$, $(n-2r)$-квазигруппе P и $(3r-n)$-квазигруппе R.

Согласно (21) и (22) имеем:

$$Q(x_1^n) = K(u_0, v_0) \cdot Lu_1 \cdot M(v_1, u_2), \tag{28}$$

$$K(u_0, v_0) \cdot Lu_1 = \pi[Lu_0 \cdot M(v_0, u_1)], \tag{29}$$

где: $\cdot$ – групповая операция на X с единицей $e \in X$, K и M – r-квазигруппы, L – $(n-2r)$-квазигруппа, $\pi \in S_X$. Полагая в (29) $\quad Lu_0 = e$, получаем

$$M(v_0, u_1) = \pi^{-1}(\mathcal{A}v_0 \cdot Lu_1), \tag{30}$$

где $\mathcal{A}$ – некоторая $(3r-n)$-квазигруппа. Аналогично, полагая в (29) $\quad Lu_1 = e$, получаем

$$K(u_0, v_0) = \pi(Lu_0 \cdot \mathcal{B}v_0), \tag{31}$$

где $\mathcal{B}$ – некоторая $(3r-n)$-квазигруппа. Полагая $Lu_0 = x$, $Lu_1 = y$, с учётом (30) и (31) из (29) получаем

$$\pi(x \cdot \mathcal{B}v_0) \cdot y = \pi[x \cdot \pi^{-1}(\mathcal{A}v_0 \cdot y)]. \tag{32}$$

При $x = y = e$ из (32) следует

$$\mathcal{A} = \pi\mathcal{B}. \tag{33}$$

Пусть далее $3r - n > 0$. Полагая в (32) $\quad \mathcal{B}v_0 = e$ и обозначая $\pi e = c$, $\pi x = z$, получаем

$$\pi^{-1}(z \cdot y) = \pi^{-1}(z) \cdot \pi^{-1}\mathcal{L}_c y.$$

Согласно лемме 1 из последнего тождества, справедливого для произвольных z, $y \in X$, получаем

$$\pi^{-1} = \mathcal{R}_{ab}\,\varphi = \mathcal{R}_a\,\varphi, \;\; \pi^{-1}\mathcal{L}_c = \mathcal{L}_{a^{-1}}\mathcal{R}_{ab}\,\varphi$$

для некоторых $a, b \in X$ и $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$. Из полученных равенств следует:

$$b = e, \;\; \pi^{-1} = \psi^{-1}\mathcal{L}_{c^{-1}}, \;\; \pi = \mathcal{L}_c\,\psi, \;\; \psi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot).$$

Из (31), (30) и (28) теперь получаем

$$K(u_0, v_0) = \mathcal{L}_c\psi(Lu_0 \cdot \mathcal{B}v_0), \;\; M(v_0, u_1) = \mathcal{B}v_0 \cdot \psi^{-1}Lu_1,$$
$$Q(x_1^n) = \mathcal{L}_c\,\psi(Lu_0 \cdot \mathcal{B}v_0) \cdot Lu_1 \cdot \mathcal{B}v_1 \cdot \psi^{-1}Lu_2.$$

В результате имеем представление (27), в котором $\tau = \mathcal{L}_c\,\psi$, $\varphi = \psi^{-1}$, $P = L$, $R = \mathcal{B}$.

Осталось рассмотреть случай $n = 3r$. Тогда конец вывода представления (27) проведём особо. В этом случае во всех рассуждениях, предшествующих формуле (33), можно считать $\mathcal{A}v_0 = \mathcal{A} \in X$, $\mathcal{B}v_0 = \mathcal{B} \in X$. Выражения (28) – (33) тогда примут следующий вид:

$$\begin{gathered} Q(x_1^n) = Ku_0 \cdot Lu_1 \cdot Mu_2, \;\; Ku_0 \cdot Lu_1 = \pi(Lu_0 \cdot Mu_1), \\ Mu_1 = \pi^{-1}(A \cdot Lu_1), \;\; Ku_0 = \pi(Lu_0 \cdot \mathcal{B}), \\ \pi\mathcal{B} = \mathcal{A}, \;\; \pi\mathcal{R}_{\mathcal{B}}x \cdot y = \pi(x \cdot \pi^{-1}\mathcal{L}_{\pi\mathcal{B}}y). \end{gathered} \tag{34}$$

Полагая в последнем из этих равенств $\pi\mathcal{R}_{\mathcal{B}}x = z$, получаем

$$\pi^{-1}(z \cdot y) = \mathcal{R}_{\mathcal{B}^{-1}}\pi^{-1}z \,\cdot\, \pi^{-1}\mathcal{L}_{\pi\mathcal{B}}y.$$

Применяя лемму 1 к полученному тождеству, справедливому при всех $z, y \in X$, для некоторых $a, b \in X$, $\varphi \in \mathrm{Aut}(X, \cdot)$ получаем

$$\pi^{-1} = \mathcal{R}_{ab}\,\varphi, \;\; \mathcal{R}_{B^{-1}}\pi^{-1} = \mathcal{R}_a\,\varphi, \;\; \pi^{-1}\mathcal{L}_{\pi B} = \mathcal{L}_{a^{-1}}\mathcal{R}_{ab}\,\varphi.$$

Из этих равенств следует:

$$\pi = \varphi^{-1}\mathcal{R}_{b^{-1}a^{-1}}, \;\; \mathcal{B} = b, \;\; \mathcal{A} = \pi\mathcal{B} = \varphi^{-1}(a^{-1}). \tag{35}$$

Из равенств (34), (35) следует

$$\begin{gathered} Q(x_1^n) = Ku_0 \cdot Lu_1 \cdot Mu_2 = \pi(Lu_0 \cdot \mathcal{B}) \cdot Lu_1 \cdot \pi^{-1}(A \cdot Lu_2) = \\ = \varphi^{-1}(Lu_0 \cdot b \cdot b^{-1}a^{-1}) \cdot Lu_1 \cdot \varphi(\varphi^{-1}(a^{-1}) \cdot Lu_2) \cdot ab = \\ = \varphi^{-1}(Lu_0 \cdot a^{-1}) \cdot Lu_1 \cdot a^{-1} \cdot \varphi(Lu_2) \cdot ab = \\ = \mathcal{R}_{ab}\,\varphi^{-1}[Lu_0 \cdot a^{-1} \cdot \varphi(Lu_1 \cdot a^{-1}) \cdot \varphi^2(Lu_2)]. \end{gathered}$$

В результате получили выражение (27), в котором $\tau = \mathcal{R}_{ab}\,\varphi^{-1}$, $P = L$, $R = a^{-1}$.

Терема 2 полностью доказана.

4. Заключение

Введённое в работе новое достаточно естественное понятие (s, ϖ, t)-слабой обратимости для n-квазигрупп, определённых на конечном множестве X, означает, что из равенства $[\bar{a}\bar{y}\bar{b}] = [\bar{a}\bar{z}\bar{b}]$, $\bar{a} \in X^s$, $\bar{y}$, $\bar{z} \in X^{\varpi}$, $\bar{b} \in X^{n-s-\varpi}$, следует тождество $[\bar{u}\bar{y}\bar{v}] = [\bar{u}\bar{z}\bar{v}]$, выполненное для всех $\bar{u} \in X^t$, $\bar{v} \in X^{n-t-\varpi}$. Наиболее содержательным это понятие оказалось для $t = 0$,

$s = r < n/2$, $\varpi = n - r$, называемом тогда r-слабой обратимостью. Известный класс (i, j)-ассоциативных n-квазигрупп, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, содержится в классе r-слабо обратимых, $r = j - i$. (В тождестве ассоциативности внутренние скобки стоят на местах i и j.) Класс r-слабо обратимых n-квазигрупп гораздо шире и имеет более лаконичное задание, наследуемое от теоремы Поста–Глускина–Хоссу, без дополнительных условий, требуемых в случае ассоциативности и (i, j)-ассоциативности. Это не случайно. Понятие ассоциативности при $n \geqslant 3$ более искусственно, по сравнению с (s, ϖ, t)-слабой обратимостью, имеющей практическое происхождение.

Автор выражает благодарность А.В. Черёмушкину за внимательное прочтение статьи и высказанные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969 – 1970 учебного года. – М.: Изд-во “Наука”, 1974. 160 с.

2. Белоусов В. Д. n-арные квазигрупы. – Кишинёв: Изд-во “Штиница”, 1972. 225 с.

3. Гальмак А. М. n-арные группы. Часть 1. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. 196 с.

4. Post E. L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1940. Vol. 48 № 2. P. 208–350.

5. Глускин Л. М. Позиционные оперативы // Матем. сб. 1965. Том 68(110) № 3. С. 444–472.

6. Hosszu M. On the explicit form on n-group operations // Publ. Math. 1963. Vol. 10 № 1–4. P. 87–92.

7. Гальмак А. М., Воробьёв Г. Н. О теореме Поста – Глускина – Хоссу // Проблемы физики, математики и техники. 2013. № 1(14). С. 55–60.

8. Сохацкий Ф. Н. Об ассоциативности многоместных операций // Дискретная математика. 1992. Том 4 № 1. С. 67–84.

9. Сохацкий Ф. Н. Ассоциативы и разложения многоместных операций. Дисс. докт. физ.-мат. наук. – Киев, 2006. 334 с.

10. Гальмак А. М., Щучкин Н. А. Порождающие множества n-арных групп // Чебышевский сборник. 2014. Том 15 № 1. С. 89–109.

11. Ходабандех Х., Шахряри М. Простые полиадические группы // Сибирский математический журнал. 2014. Том 55 № 4. С. 898–911.

12. Щучкин Н. А. Строение конечных полуабелевых n-арных групп // Чебышевский сборник. 2016. Том 17 № 1. С. 254–269.

13. Малышев Ф. М. Теорема Поста – Глускина – Хоссу для конечных n-квазигрупп и самоинвариантные семейства подстановок // Математический сборник. 2016. Том 207 № 2. 81–92.

14. Гальмак А. М., Русаков А. Д. О полиадической операции специального вида // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. наук. 2017. № 2. С. 44–51.

15. Тютин В. И. К аксиоматике n-арных групп // Докл. АН БССР. 1985. Том 29 № 8. С. 691–693.

16. Соколов Е. И. О теореме Глускина – Хоссу // Сети и квазигруппы: Мат. исслед. – Кишинёв: Изд-во “Штиница”, 1976. № 39. С. 187–189.

17. Гальмак А. М. О приводимости n-арных групп // Вопросы алгебры. 1996. Вып. 10. С. 164–169.

18. Воробьев В. Н. Сопряжённые n-арные подгруппы и их обобщения // Весник ВДУ ім. П.М. Машэрава. 1997. № 2(4). С. 59–64.

19. Черёмушкин А. В. Аналоги теорем Глускина – Хоссу и Малышева для случая сильно зависимых n-арных операций // Дискретная математика. 2018. Том 30 № 2. С. 138–147.

20. Hosszu M. Algebrai rendszereken ertelmezett függvenyegyenletek, I, MTA III // Oszt. Közlemenyei. 1962. № 13. P. 303–315.

REFERENCES

1. Kurosh, A. G. 1974, "Obshchaya algebra. Lekcii 1969–1970 utchebnogo goda." [*Gentral algebra. Lectures 1969–1970 academic year.* Nauka, Moscow, 160 pp. (Russian)

2. Belousov, V. D. 1972 "n-arnii kvazigruppi" [*n-quasigroups.*] Shtinitsa, Kishinev, 225 pp. (Russian)

3. Galmak, A. M. 2003 "n-arnii gruppi. Tchast 1." [*n-groups. Part 1.*] State University F. Skorina, Gomel, 196 pp. (Russian)

4. Post, E. L. 1940, "Polyadic groups" , *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 48, no. 2. pp. 208–350.

5. Gluskin, L. M. 1965 "Positional Operatives" , *Mat. Sb.*, vol. 68 (110), no. 3. pp. 444–472.

6. Hosszu, M. 1963, "On the explicit form on n-group operations" , *Publ. Math.*, vol. 10, no. 1–4, pp. 87–92.

7. Galmak, A. M., Vorobjov G. N. 2013 "About the Post-Gluskin-Hoss theorem" , *Problems of physics, mathematics and engineering*, no. 1(14), pp. 55-60.

8. Sokhatsky, F. N., 1992 "On the associativity of multi-local operations" , *Diskret. Mat.*, 4:1, pp. 67-84.

9. Sohatsky, F. N. 2006 *"Associatives and expansions of multi-site operations."* Diss. Doct. fiz.-mat. sciences. Kiev, 334 pp.

10. Galmak, A. M., Shchuchkin, N.A. 2014 "Generating sets of n-groups" , *Chebyshevsky sb.*, 15:1, pp. 89 -109.

11. Khodabandeh, H., Shahryari, M. 2014 "Simple polyadic groups" , *SMRJ*, 55:4. pp. 898-911.

12. Shchuchkin, N. A. 2016 "The structure of finite semi-abelian n-ary groups" , *Chebyshevsky sb.*, 17:1. pp. 254-269.

13. Malyshev, F. M. 2016 "The Post–Gluskin–Hoss theorem for finite n-quasigroups and self-invariant families of permutations" , *Sb. Math.*, 207:2, pp. 226–237.

14. Galmak A, M., Rusakov, A. D. 2017 "On a polyadic operation of a special form" , *Ves. Nat. Acad. Sci. Belarusian. Ser. fiz.-math. sciences*, no.2, pp. 44-51.

15. Tyutin, V. I. 1985 "On the axiomatics of n-groups", *Dokl. AN BSSR*, 29:8. pp. 691-693.

16. Sokolov, E. I. 1976 "On the Gluskin-Hoss theorem", *Networks and quasigroups: Mat. Issled.*, Shtinitsa, Kishinev, no. 39, pp. 187-189.

17. Galmak, A. M. 1996 "On the reducibility of n-groups", *Problems of Algebra*, issue. 10, pp. 164–169.

18. Vorobjov, V. N. 1997 "Conjugate n-ary subgroups and their generalizations", *Vault P.M. Masherava VDU*, no. 2(4), pp. 59-64.

19. Cheryomushkin, A. V. 2018 "Analogues of Gluskin-Hoss and Malyshev theorems for the case of strongly dependent n-operations", *Discret. Mat.*, 30:2, pp. 138-147.

20. Hosszu, M. 1962, "Algebrai rendszereken ertelmezett függvenyegyenletek, I, MTA III", *Oszt. Közlemenyei.*, no. 13, pp. 303–315.

Получено 27.04.2018
Принято в печать 17.08.2018