ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 517.53 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-272-303

Интегралы и индикаторы субгармонических функций. I [1]

Малютин Константин Геннадьевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет.
e-mail: malyutinkg@gmail.com
Кабанко Михаил Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет.
e-mail: kabankom@mail.ru
Малютина Таисия Ивановна — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа и прикладной математики, Курский государственный университет.
e-mail: malyutinkg@gmail.com

Аннотация

В первой части нашего исследования рассматриваются общие вопросы теории функций плотности и ρ-полуаддитивных функций, которые часто используются в теории роста целых и субгармонических функций и в других разделах математики. В теории функций плотности важной и часто цитируемой является теорема Полиа о существовании максимальной и минимальной плотности. Утверждение 3 теоремы 6 или теорему 7 статьи можно рассматривать как распространение теоремы Полиа на более широкий класс функций. Функции плотности обладают некоторыми свойствами полуаддитивности. Некоторые вопросы теории функций плотности и ρ-полуаддитивных функций изложены в первой части нашего исследования. Центральной здесь является теорема 23, касающаяся условий существования в нуле производной ρ-полуаддитивной функции и оценка интегралов $\int\limits_a^b f(t)\,d\nu(t)$ через функции плотности для функции ν. Отметим, что функция ν у нас, вообще говоря, не является функцией распределения некоторой счетно-аддитивной меры и написанный интеграл нужно понимать как интеграл Римана-Стилтьеса, а не как интеграл Лебега по мере ν.

Ключевые слова: уточненный порядок, функция плотности, максимальная и минимальная плотность, теорема Полиа, полуаддитивная функция, интеграл Римана-Стилтьеса.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:
К. Г. Малютин, М. В. Кабанко, Т. И. Малютина. Интегралы и индикаторы субгармонических функций // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 272–303.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 517.53 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-272-303

Integrals and indicators of subharmonic functions. I

Malyutin Konstantin Gennadyevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematical Analysis and Applied Mathematics, Kursk State University.
e-mail: malyutinkg@gmail.com
Kabanko Mikhail Vladimirovich — Ph.D., Associate Professor, Docent of the Department of Mathematical Analysis and Applied Mathematics, Kursk State University.
e-mail: kabankom@mail.ru
Malyutina Taisia Ivanovna — Ph.D., Associate Professor, Docent of the Department of Mathematical Analysis and Applied Mathematics, Kursk State University.
e-mail: malyutinkg@gmail.com

Abstract

In the first part of our study, we consider general problems of the theory of density functions and ρ-semi-additive functions that are often used in the theory of growth of entire and subharmonic functions and in other branches of mathematics. In the theory of density functions, an important and often quoted theorem is the Polya theorem on the existence of a maximal and minimal density. The assertion 3 of the theorem 6 or the theorem 7 of the paper can be considered as the extension of the Polya theorem to a more general class of functions. The density functions have certain semi-additivity properties. Some problems of the theory of density functions and ρ-semi-additive functions are presented in the first part of our study. The central one here is the theorem 23, concerning the conditions for the existence at the zero of the derivative of ρ-semi-additivity function and estimation of integrals $\int\limits_a^b f(t)\,d\nu(t)$ through the density functions of the function ν. We note that the function ν, in general, is not a distribution function of some countably-additive measure, and the integral must be understood as the Riemann-Stieltjes integral, and not as a Lebesgue integral in measure ν.

Keywords: proximate order, density function, maximal and minimal density, Polya theorem, semi-additive function, Riemann-Stieltjes integral.

Bibliography: 24 titles.

For citation:
K. G. Malyutin, M. V. Kabanko, T. I. Malyutina, 2018, "Integrals and indicators of subharmonic functions.", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 272–303.

Посвящается 5-летию памяти
профессора Анатолия Филипповича Гришина

1. Введение

Изучение свойств специальных классов целых и субгармонических функций — важный аспект современных исследований. Большое применение находит пространство целых функций вполне регулярного роста в смысле Левина–Пфлюгера. Теория функций вполне регулярного роста создана в 30-е годы прошлого столетия независимо друг от друга в работах этих математиков [11, 21, 22]. Ее изложение приведено в книге [12]. А. Ф. Гришин [4] распространил эту теорию на субгармонические функции. Новый подход к этой теории получается в рамках , созданной В. С. Азариным [1] теории динамических систем субгармонических функций. Н. В. Говоров [2, 3] и независимо А. Ф. Гришин [5, 6] построили теорию функций вполне регулярного роста в полуплоскости. В то время как теория Говорова охватывает аналитические функции ненулевого конечного порядка в полуплоскости, теория Гришина относится к субгармоническим функциям и включает в себя функции нулевого порядка. После введения А. Ф. Гришиным [7, 8] понятия полной меры стало яснее сходство и различие между теорией аналитических и субгармонических функций для плоскости и для полуплоскости. Использование аналогии между такими теориями позволило [17] получить вариант второй основной теоремы Р. Неванлинны для полуплоскости, а также исследовать классы дельта-субгармонических функций в полуплоскости, рост которых измеряется некоторой произвольной неубывающей функцией на полуоси $[0, \infty)$ [13].

После введения Э. Борелем понятия порядка и типа целой функциии стало ясно, что шкала функций r^ρ, $\rho \in [0, \infty)$, является недостаточной для теории роста целых и субгармонических функций конечного порядка. Валирон ввел понятие уточненного порядка. Оказывается, что шкала функций $V(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ – уточненный порядок в смысле Валирона уже является достаточной для теории роста функций конечного порядка. В работе [9] показано, что можно выбирать уточненные порядки из специального класса. Эти результаты не вошли в нашу работу, но понятие уточненного порядка широко используется в статье. Близким к понятию уточненного порядка оказалось введенное Караматой понятие медленно меняющейся функции. Класс медленно меняющихся функций и различные его обобщения нашли многочисленные применения, в частности, в теории вероятностей. Теория таких классов изложена в монографиях: Л. де Хаан [18], Е. Сенета [14], Бингхем и соавторы [16].

В теории роста целых и субгармонических функций и в других разделах математики часто используются функции плотности. Важной и часто цитируемой является теорема Полиа о существовании максимальной и минимальной плотности, полученная им в работе [23]. Функции плотности обладают некоторыми свойствами полуаддитивности . Теория полуаддитивных функций достаточно широко изложена в книге Хилле и Филлипс "Функциональный анализ и полугруппы" [15]. Некоторые вопросы теории функций плотности и ρ-полуаддитивных функций изложены в первой части нашего исследования.

Поэтому естественно возникает вопрос о свойствах общих функций плотности и связанных с ними полуаддитивных функциях. Этим вопросам посвящена первая часть нашего исследования. Центральной здесь является теорема 23, касающаяся условий существования в нуле производной ρ-полуаддитивной функции и оценка интегралов

$$\int\limits_a^b f(t)\, d\nu(t)$$

через функции плотности для функции ν. Отметим, что функция ν у нас, вообще говоря, не является функцией распределения некоторой счетно-аддитивной меры и написанный интеграл нужно понимать как интеграл Римана-Стилтьеса, а не как интеграл Лебега по мере ν.

2. Полуаддитивные функции

Как известно, например из [12], абсолютно непрерывная функция $\rho(r)\,, r\in(0,+\infty)$, называется уточнённым порядком в смысле Валирона, если выполняются следующие два условия: 1) $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho\,,\rho\in(-\infty,+\infty)$, 2) существует множество E — нулевой меры такое, что

$$\lim_{r\bar{\in}E,r\to\infty}\rho'(r)\ln r=0.$$

В нашей работе ρ может быть произвольным вещественным числом. При изучении роста целых функций обычно ограничиваются условием $\rho\geq 0$. Мы будем обозначать $V(r)=r^{\rho(r)}$. Как следует из результатов Валирона, для любой функции $f\geq 0$ конечного порядка существует уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{f(r)}{V(r)}:=\sigma\in(0,\infty)\,. \tag{1}$$

Доказательство более сильного результата приведено в [12]. Новые результаты, связанные с уточненным порядком, приведены в [9]. Именно соотношение (1) имеется ввиду, когда говорят, что шкала функций вида $V(r)$ достаточна для теории роста функций конечного порядка. Величину σ называют типом функции относительно уточненного порядка $\rho(r)$ (относительно функции $V(r)$). Пусть $L(r)=r^{-\rho}V(r)$. Известно, например, из [12], что для любого $t\in(0,\infty)$ выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty}\frac{L(rt)}{L(r)}=1\,. \tag{2}$$

Если для некоторой функции L выполняется равенство (2), то функция L называется медленно меняющейся функцией в смысле Караматы. Теории медленно меняющихся функций посвящены книги [14, 16].

Зафиксируем некоторый уточненный порядок. Пусть $f(r)$ произвольная функция на луче $[0,\infty)$. Тогда для нее по формуле (1) можно определить тип σ. Конечно, для произвольной функции f можно только утверждать, что $\sigma\in[-\infty,\infty]$. Тип функции f – важная характеристика роста этой функции. Однако, значительно большую информацию о поведении f дают верхняя функция плотности $N(\alpha)$ и нижняя функция плотности $\underline{N}(\alpha)$, которые вычисляются по формулам

$$N(\alpha)=\limsup_{r\to\infty}\frac{f(r+\alpha r)-f(r)}{V(r)},\quad \alpha\geq 0\,, \tag{3}$$

$$\underline{N}(\alpha)=\liminf_{r\to\infty}\frac{f(r+\alpha r)-f(r)}{V(r)},\quad \alpha\geq 0\,. \tag{4}$$

Из свойств верхнего и нижнего пределов и равенства (2) следуют неравенства

$$N(\alpha+\beta)\leq N(\alpha)+(1+\alpha)^{\rho}N\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right)\,, \tag{5}$$

$$N(\alpha+\beta)\geq N(\alpha)+(1+\alpha)^{\rho}\underline{N}\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right)\,, \tag{6}$$

$$\underline{N}(\alpha+\beta)\geq \underline{N}(\alpha)+(1+\alpha)^{\rho}\underline{N}\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right)\,, \tag{7}$$

$$\underline{N}(\alpha+\beta) \le \underline{N}(\alpha) + (1+\alpha)^{\rho} N\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right). \tag{8}$$

Функции, удовлетворяющие неравенствам (5) или (7), мы будем называть ρ-полуаддитив – ными. Если $f(r)$ есть функция распределения некоторой меры μ на полуоси $[0,\infty)$, что означает выполнение равенства $\mu((r_1,r_2]) = f(r_2) - f(r_1)$, то функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ называются функциями плотности меры μ. Обычно предполагается, что выполняется неравенство $|f(r)| \le MV(r)$. В этом случае функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ ограничены на любом сегменте $[a,b] \subset [0,\infty)$. По различным причинам временами приходится отказываться от априорной оценки $|f(r)| \le MV(r)$. В этом случае необходимо считать, что функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ принимают значения из расширенной вещественной прямой $[-\infty,\infty]$. При действиях с величинами из расширенной вещественной прямой в нашей работе предполагается, что соотношения $x = \infty - \infty$, $x \le \infty - \infty$, $x \ge \infty - \infty$, справедливы для любого $x \in [-\infty,\infty]$. В статье под ρ-полуаддитивной функцией понимается функция, определенная на полуоси $(0,\infty)$ со значениями из расширенной вещественной прямой $[-\infty,\infty]$ и удовлетворяющая одному из неравенств (5) или (7). Неравенство (5) по своей структуре напоминает неравенство

$$\varphi(\alpha+\beta) \le \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \tag{9}$$

а при $\rho = 0$ прямо сводится к этому неравенству заменой переменной $\alpha = e^t - 1$. Функции, удовлетворяющие неравенству (9), называются полуаддитивными. Полуаддитивные функции часто встречаются в различных вопросах математики. Они активно изучались, и их теория изложена в [15], где приведены многочисленные ссылки. Наши результаты для функций плотности сравнимы с соответствующими результатами для полуаддитивных функций. Кроме того, некоторые наши рассуждения для функций плотности повторяют соотвествующие рассуждения для полуаддитивных функций. В книге [15] рассматриваются измеримые полуаддитивные функции. Это ограничение естественно и не столь обременительно, если полуаддитивные функции рассматривать как первичные объекты, исходя из которых вести дальнейшие построения. Однако, в рассматриваемом нами случае требование измеримости $N(\alpha)$ не столь безобидно. Дело в том, что мы рассматриваем функцию $N(\alpha)$ как функцию плотности. А из измеримости функции f (это в нашем случае безобидное требование) не следует, что ее функция плотности $N(\alpha)$ будет измеримой.

Верхняя функция плотности $N(\alpha)$ удовлетворяет условиям $N(0) = 0$ и (5). Однако, далеко не всякая функция $N(\alpha)$, $\alpha \ge 0$, удовлетворяющая этим условиям будет функцией плотности. Дело в том, что равенством (3) функцию $N(\alpha)$ можно определить при $\alpha > -1$, причем неравенство (5) будет выполняться и при таких α. Таким образом, всякая функция плотности $N(\alpha)$ продолжается как ρ-полуаддитивная на полуось $(-1,\infty)$. Нетрудно подсчитать, что функция $N(\alpha)$ при отрицательных α определяется следующим образом

$$N(\alpha) = -(1+\alpha)^{\rho} \underline{N}\left(-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), \quad \alpha \in (-1,0).$$

Аналогично,

$$\underline{N}(\alpha) = -(1+\alpha)^{\rho} N\left(-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), \quad \alpha \in (-1,0).$$

Заметим еще, что $\underline{N}(\alpha) \le N(\alpha)$. Вопросы, связанные с продолжением полуаддитивных функций, обсуждаются в [15] (см., например, теорему 7.6.4).

Изучение свойств функций плотности — одна из тем нашей работы. Близкие понятия — функции концентрации изучаются в [19]. Кроме этого нас интересуют вопросы равномерности. Пусть $\psi(\alpha)$ – непрерывная функция на полуоси $[0,\infty)$, $\psi(0) = 0$, и пусть выполняется неравенство

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{f(r+\alpha r) - f(r)}{V(r)} \le \psi(\alpha).$$

Мы будем использовать обозначение $u^+(x) = \max(u(x), 0)$. Нас интересует, при каких условиях на функцию f функция

$$\varepsilon(r,\alpha) = \left(\frac{f(r+\alpha r) - f(r)}{V(r)} - \psi(\alpha)\right)^+ \tag{10}$$

равномерно относительно $\alpha \in [0, \alpha_0]$ стремится к нулю при $r \to \infty$. В теореме 2 мы показываем, что слабое условие измеримости f обеспечивает равномерное стремление к нулю функции ε. Оригинальной в этом направлении является работа [20], где впервые (в иной чем у нас ситуации) найдены методы получения равномерных оценок из условий измеримости. Более подробные ссылки можно найти в [14, 16]. Теорема 2 по форме и методам доказательства напоминает теорему 2.12 из [14]. Как можно убедиться из [14], вопросы равномерности играют важную роль в теории медленно растущих функций.

Наше изложение больше ориентировано на применения к теории роста субгармонических функций. Изложение теории субаддитивных функций в [15] ориентировано на применение в различных вопросах анализа, но более всего — в теории полугрупп операторов. Только в случае $\rho = 0$ ρ-полуаддитивные функции с точностью до замены переменной $\alpha = e^t - 1$ совпадают с полуаддитивными. Специалисты по теории роста целых и субгармонических функций знают, что случай $\rho = 0$ всегда требует отдельного исследования. Исключительность случая $\rho = 0$ будет видна и в нашей работе.

3. Теорема о равномерности

Для нас удобно начать этот раздел с простого критерия непрерывности функций $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$.

Теорема 1. *Пусть функции $N(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha)$, $\alpha \geq 0$, со значениями из расширенной вещественной прямой, удовлетворяют неравенствам (5) — (8) и равенствам $N(0) = \underline{N}(0) = 0$. Для того, чтобы обе функции были конечными непрерывными функциями на полуоси $[0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства $\lim\limits_{\alpha\to+0} N(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to+0} \underline{N}(\alpha) = 0$.*

Доказательство простое и мы его опускаем. Далее мы переходим к одному из важных результатов этого раздела.

Теорема 2. *Пусть $f(r)$ — конечная измеримая функция на полуоси $[0, \infty)$, $\psi(\alpha)$ — непрерывная функция на всей оси, причем $\psi(0) = 0$. Пусть для любого $\alpha \in [0, \infty)$ выполняется неравенство*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{f(r+\alpha r) - f(r)}{V(r)} \leq \psi(\alpha)\,. \tag{11}$$

Тогда это неравенство выполняется равномерно на любом сегменте $[a, b] \subset (0, \infty)$. Если для некоторого $\eta > 0$ неравенство (11) выполняется на полуоси $(-\eta, \infty)$, то оно выполняется равномерно на любом сегменте $[0, b]$.

Замечание 1. Равномерная выполнимость неравенства (11) на некотором сегменте по определению означает, что функция $\varepsilon(r, \alpha)$, определенная равенством (10), равномерно по α на этом сегменте стремится к нулю при $r \to \infty$.

Замечание 2. Пусть $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ – функции плотности измеримой функции f. Для того, чтобы обе эти функции были непрерывными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\substack{r\to\infty\\ \alpha\to+0}} \frac{f(r+\alpha r) - f(r)}{V(r)} = 0\,. \tag{12}$$

Доказательство замечания 2. Если выполняется равенство (12), то

$$\lim_{\alpha\to+0} N(\alpha) = \lim_{\alpha\to+0} \underline{N}(\alpha) = 0\,.$$

Теперь из теоремы 1 следует непрерывность функций $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$. Обратно, если функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ непрерывны (можно считать на полуоси $(-1,\infty)$), то из теоремы 2, примененной к функциям f и $-f$, следует существование функции $\varepsilon(r)\to 0$ при $r\to\infty$ такой, что будут справедливы неравенства

$$(\underline{N}(\alpha)-\varepsilon(r))V(r) \le f(r+\alpha r)-f(r) \le (N(\alpha)+\varepsilon(r))V(r), \quad \alpha\in[0,1]\,.$$

Из этих неравенств вытекает равенство (12).

Замечание 3. Если неравенство (11) выполняется на полуоси $[0,\infty)$, то из этого не следует, что оно выполняется равномерно на любом сегменте $[0,b]$.

Это можно увидеть, исследуя следующую функцию $f(r)$. Пусть $R_1 = 10$, $f(r) = 2V(r)$, $r\in[0,10]$. Далее функция $f(r)$ строится методом математической индукции. Пусть мы уже построили функцию $f(r)$ на сегменте $[0,R_{3n+1}]$, причем $f(R_{3n+1}) = 2V(R_{3n+1})$. Выбираем $R_{3n+2} = \Big(1+1/2^{n+1}\Big)R_{3n+1}$, $R_{3n+3} = \Big(1+2^{n+1}\Big)R_{3n+1}$. Полагаем $f(r) = V(R_{3n+1})$ при $r\in(R_{3n+1},R_{3n+3}]\setminus\{R_{3n+2}\}$, $f(R_{3n+2}) = 2V(R_{3n+1})$. Далее при $r\in(R_{3n+3},R_{3n+4}]$ полагаем $f(r) = f(R_{3n+3}) + 5(V(r)-V(R_{3n+3}))$, причем R_{3n+4} определяем из условия $f(R_{3n+4}) = 2V(R_{3n+4})$.

Доказательство теоремы 2. Обозначим $r = e^x$, $1+\alpha = e^\tau$, $\varphi(x) = f(e^x)$, $\Phi(x) = V(e^x)$, $a_1 = \ln(1+a)$, $b_1 = \ln(1+b)$, $\psi_1(\tau) = \psi(e^\tau-1)$. В новых обозначениях неравенство (11) будет иметь вид

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\varphi(x+\tau)-\varphi(x)}{\Phi(x)} \le \psi_1(\tau)\,. \tag{13}$$

Нам нужно доказать, что это соотношение выполняется равномерно на сегменте $[a_1,b_1]$. Если это не так, то существуют строго положительное число ε, последовательности $x_n\to\infty$, $\tau_n\in[a_1,b_1]$, такие, что

$$\varphi(x_n+\tau_n)-\varphi(x_n) \ge (\psi_1(\tau_n)+\varepsilon)\Phi(x_n)\,. \tag{14}$$

Пусть $\delta\in(0,a_1/2)$, $\varepsilon_1>0$, $\delta_1>0$, а в остальном – произвольные числа. Определим множество

$$U_n = \Big\{\alpha\in[0,\delta] : \varphi(x_m+\alpha)-\varphi(x_m) < (\psi_1(\alpha)+\varepsilon_1)\Phi(x_m), \quad \forall m\ge n\Big\}\,.$$

Имеем $U_{n+1}\supset U_n$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n = [0,\delta]$. Из измеримости функции φ следует измеримость множеств U_n. Далее определяем множество

$$V_n = \Big\{\beta\in[a_1-\delta,b_1] : \varphi(x_m+\tau_m)-\varphi(x_m+\tau_m-\beta) < (\psi_1(\beta)+\varepsilon_1)\Phi(x_m+\tau_m-\beta), \forall m\ge n\Big\}.$$

Множества V_n – измеримы, $V_n\subset V_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n = [a_1-\delta,b_1]$. Из свойств непрерывности меры следует, что для любого $\delta_1>0$ и всех достаточно больших p будут справедливы соотношения

$$\operatorname{mes} U_p > \delta-\delta_1, \quad \operatorname{mes} V_p > b_1-a_1+\delta-\delta_1\,.$$

Пусть $V'_p = \tau_p - V_p$, и пусть $\delta_1<\delta/2$. Легко проверяются соотношения

$$U_p\subset[0,\delta]\subset[\tau_p-b_1,\tau_p-a_1+\delta], \quad V'_p\subset[\tau_p-b_1,\tau_p-a_1+\delta]\,,$$

$$\operatorname{mes} U_p > \delta-\delta_1 > \frac{1}{2}\delta, \quad \operatorname{mes} V'_p > b_1-a_1+\delta-\delta_1 > b_1-a_1+\frac{1}{2}\delta\,.$$

Из этого следует, что $U_p \cap V_p' \neq \emptyset$. Пусть $\alpha \in U_p \bigcap V_p'$. Тогда $\alpha \in [0,\delta]$, $\alpha = \tau_p - \beta$, $\beta \in V_p$, $\varphi(x_p+\alpha) - \varphi(x_p) < (\psi_1(\alpha)+\varepsilon_1)\Phi(x_p)$, $\varphi(x_p+\tau_p) - \varphi(x_p+\alpha) < (\psi_1(\tau_p-\alpha)+\varepsilon_1)\Phi(x_p+\alpha)$.

Складывая два последних неравенства, получим

$$\varphi(x_p+\tau_p) - \varphi(x_p) < \psi_1(\tau_p)\Phi(x_p) + (\psi_1(\alpha)+\varepsilon_1)\Phi(x_p) +$$

$$+\varepsilon_1 \frac{\Phi(x_p+\alpha)}{\Phi(x_p)}\Phi(x_p) + \psi_1(\tau_p-\alpha)\left[\frac{\Phi(x_p+\alpha)}{\Phi(x_p)} - 1\right]\Phi(x_p) +$$

$$+[\psi_1(\tau_p-\alpha) - \psi_1(\tau_p)]\Phi(x_p)\,.$$

Напомним, что $\alpha \in [0,\delta]$. При достаточно малых ε_1 и δ и достаточно больших p это неравенство противоречит неравенству (14). Тем самым мы доказали, что соотношение (13) выполняется равномерно на сегменте $[a_1, b_1]$. Первое утверждение теоремы доказано. В случае если неравенство (11) выполняется на полуоси $(-\nu, \infty)$, мы можем повторить предыдущие рассуждения с $a = 0$.

Тем самым теорема 2 доказана.

4. Свойства ρ-полуаддитивных функций

Вначале мы ненадолго отвлечемся в сторону. Формулируемая ниже теорема, принадлежащая Штейнгаузу ([24], теорема 7), — один из способов использования условия измеримости функции в нашей работе.

Теорема 3. *Арифметическая сумма $A+B$ измеримых множеств положительной меры на вещественной оси содержит в себе некоторый сегмент $[\alpha,\beta]$, $\alpha<\beta$.*

Простейшие из ρ-полуаддитивных функций — это те, для которых в неравенствах (5) или (7) стоит знак равенства. Они называются ρ-аддитивными функциями. К этому классу принадлежат функции плотности регулярно растущих функций f, т.е. таких функций, для которых существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r+\alpha r) - f(r)}{V(r)}.$$

В последствии мы увидим, что нерегулярно растущие функции также могут иметь ρ-аддитивные функции плотности. В следующей теореме исследуется класс ρ-аддитивных функций.

Теорема 4. *Пусть функция $N(\alpha)$ на полуоси $(0,\infty)$, принимающая значения из расширенной вещественной прямой $[-\infty,\infty]$, удовлетворяет равенству*

$$N(\alpha+\beta) = N(\alpha) + (1+\alpha)^\rho N\left(\frac{\beta}{1+\alpha}\right), \quad \rho \in (-\infty,\infty)\,. \tag{15}$$

Пусть $\rho \neq 0$ и функция $N(\alpha)$ конечна на множестве положительной меры. Тогда

$$N(\alpha) = N\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}\,.$$

Пусть $\rho = 0$ и функция $N(\alpha)$ удовлетворяет хотя бы одному из двух условий:
1) *$N(\alpha)$ — измеримая функция, которая конечна на множестве положительной меры,*
2) *$N(\alpha)$ есть ограниченная функция на некотором множестве положительной меры.*

Тогда $N(\alpha) = N\ln(1+\alpha)$.

Замечание. Все необходимые рассуждения для доказательства теоремы 4 можно извлечь из [14] (лемма 1.13 и теорема 2.9). Однако, для полноты изложения мы приведем доказательство теоремы 4.

Доказательство теоремы 4. Обозначим $\varphi(t) = N(e^t - 1)$. Для функции φ получается уравнение

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + e^{\rho u}\varphi(v), \quad u, v > 0\,. \tag{16}$$

В частности,

$$\varphi(2u) = (1 + e^{\rho u})\varphi(u)\,. \tag{17}$$

Пусть $A = \{x > 0 : |\varphi(x)| < \infty\}$. Из условия теоремы следует, что множество A содержит в себе множество положительной меры. Из равенства (16) следует, что $A+A \subset A$. Из теоремы 3 следует, что $\operatorname{Int} A \neq \emptyset$ ($\operatorname{Int} A$ — внутренность A). Из равенства (17) следует, что $\frac{1}{2}A \subset A$. Поэтому $\inf\{\operatorname{Int} A\} = 0$. Если теперь $\operatorname{Int} A \neq (a, \infty)$, то существует интервал $(\alpha, \beta) \subset \operatorname{Int} A$ такой, что $\beta \notin \operatorname{Int} A$. Пусть теперь $\gamma \in A$, $\gamma \in (0, \beta - \alpha)$. Так как $\gamma + A \subset A$, то интервал $(\alpha+\gamma, \beta+\gamma) \subset A$. Но тогда $\beta \in \operatorname{Int} A$. Мы получаем противоречие. Таким образом, $\operatorname{Int} A = (a, \infty)$. Из равенства $\inf\{\operatorname{Int} A\} = 0$ следует, что $a = 0$. Таким образом, функция $\varphi(t)$ конечна на всей полуоси $(0, \infty)$. Пусть $\rho \neq 0$. Тогда, меняя в равенстве (16) местами u и v, получим

$$\varphi(u+v) = \varphi(v) + e^{\rho v}\varphi(u), \quad \frac{\varphi(u)}{e^{\rho u} - 1} = \frac{\varphi(v)}{e^{\rho v} - 1} = \frac{N}{\rho}\,,$$

$$\varphi(u) = N\frac{e^{\rho u} - 1}{\rho}, \quad N(\alpha) = N\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}\,.$$

Пусть теперь $\rho = 0$. Имеем $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$, причем φ конечная на полуоси функция. Если φ — измеримая функция и $U_n = \{u \in [1,2] : |\varphi(u)| < n\}$, то U_n — возрастающая последовательность измеримых множеств, причем $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n = [1,2]$. Тогда для некоторого n $\operatorname{mes} U_n > 0$. Таким образом, из условия теоремы следует в случае $\rho = 0$, что существует множество B положительной меры, на котором функция $|\varphi|$ ограничена, скажем константой b. Тогда на множестве $B + B$ она ограничена константой $2b$. По теореме 3 множество $B + B$ содержит в себе сегмент $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$. Пусть $\varphi(1) = N$. Тогда из равенства $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ следует, что для положительных рациональных u выполняется равенство $\varphi(u) = Nu$. Рассмотрим функцию $\varphi_1(u) = \varphi(u) - Nu$. Эта функция удовлетворяет уравнению $\varphi_1(u+v) = \varphi_1(u) + \varphi_1(v)$, $u, v > 0$, ограничена на сегменте $[\alpha, \beta]$, равна нулю в положительных рациональных точках. Пусть теперь x произвольное число на полуоси $(0, \infty)$. Всегда существует рациональное число r такое, что $x + r = y$, где $y \in [\alpha, \beta]$. Тогда, используя равенство $x + r = y$, если $r > 0$, равенство $x = y - r$, если $r < 0$, функциональное уравнение для φ_1 и то, что φ_1 обращается в ноль в положительных рациональных точках, получим $\varphi_1(x) = \varphi_1(y)$. Из этого следует, что функция φ_1 ограничена на всей полуоси $(0, \infty)$. Если теперь для некоторого $x_0 > 0$ $\varphi_1(x_0) \neq 0$, то равенство $\varphi_1(nx_0) = n\varphi_1(x_0)$ приводит к противоречию. Таким образом, $\varphi_1(u) = 0$, $\varphi(u) = Nu$, $N(\alpha) = N\ln(1+\alpha)$.

Теорема 4 доказана.

Следующие две теоремы касаются свойств произвольных ρ-полуаддитивных функций.

Теорема 5. *Пусть $N(\alpha)$, $\alpha \in (0, \infty)$, является ρ-полуаддитивной функцией, которая удовлетворяет неравенству* (5). *Тогда либо $\liminf\limits_{\alpha\to+0} N(\alpha) = -\infty$, либо $\liminf\limits_{\alpha\to+0} N(\alpha) \geq 0$.*

Замечание. Такое же утверждение для полуаддитивных функций приведено в [15], теорема 7.4.3.

Доказательство теоремы 5. Обозначим $\lambda = \liminf_{\alpha\to+0} N(\alpha)$. Если $|\lambda| = \infty$, то доказывать нечего. Поэтому можно считать, что $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Пусть τ_n, $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$, такая последовательность, что $\lim_{n\to\infty} N(\tau_n) = \lambda$. Пусть ε — произвольное строго положительное число. Тогда для всех достаточно больших n выполняются неравенства

$$\lambda - \varepsilon < N(2\tau_n + \tau_n^2) \le (1 + (1+\tau_n)^\rho)N(\tau_n) < 2l + \varepsilon\,.$$

Отсюда следует $\lambda \le 2\lambda$, $\lambda \ge 0$.

Теорема доказана.

Для доказательства следующей теоремы мы предварительно сформулируем две леммы. В этих леммах $[x]$ означает целую часть x.

Lemma 1. *Пусть заданы сегмент $[t_1, t_2] \subset (0,\infty)$ и целое положительное число p такие, что $\left[t_1, \dfrac{p+1}{p}t_1\right] \subset [t_1, t_2]$. Тогда любое $x \ge pt_1$ представляется в виде $x = pt + kt_1$, где $k = \left[\dfrac{x - pt_1}{t_1}\right]$, $t \in [t_1, t_2]$.*

Доказательство очевидно.

Lemma 2. *Пусть заданы число $s > 0$, сегмент $[\tau_1, \tau_2] \subset (0,\infty)$ и целое число A такие, что $A(\tau_2 - \tau_1) > 2s$. Тогда любое число $x \ge \left(\left[\dfrac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)^2 s$ представляется в виде $x = n\tau + ms$, где $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, $n = A\left(\left[\dfrac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)$, $m = k\left(\left[\dfrac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)$, $k = \left[\dfrac{x - ([A\tau_1/s] + 1)^2 s}{s\,([A\tau_1/s] + 1)}\right]$.*

Доказательство. Неравенство $A(\tau_2 - \tau_1) > 2s$ гарантирует включение

$$\left[\left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)s, \left(\left[\frac{A\tau_1}{s}\right] + 2\right)s\right] \subset [A\tau_1, A\tau_2]\,. \tag{18}$$

Теперь применение леммы 1 с параметрами $t_1 = \left(\left[\dfrac{A\tau_1}{s}\right] + 1\right)s$, $p = \left[\dfrac{A\tau_1}{s}\right] + 1$ и соотношения (18) доказывают лемму 2.

Замечание. Если взять $A = \left[x^{1/3}\right]$, то для представления $x = n(x)\tau + m(x)s$ будут справедливы соотношения $n(x) \sim \tau_1 x^{2/3}/s$, $m(x) \sim x/s$. Варьируя величину A, можно добиться, чтобы выполнялось любое из соотношений

$$\lim_{x\to\infty} \frac{m(x)}{n(x)} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{n(x)}{m(x)} = 0$$

при выполнении условий $\lim_{x\to\infty} n(x) = \lim_{x\to\infty} m(x) = \infty$.

Далее формулируется основная теорема о свойствах ρ-полуаддитивных функций (мы считаем $\left.\dfrac{\rho}{(1+\alpha)^\rho - 1}\right|_{\rho=0} = \dfrac{1}{\ln(1+\alpha)}$).

Теорема 6. *Пусть $N(\alpha)$ — ρ-полуаддитивная функция, которая удовлетворяет неравенству (5) при некотором $\rho \in (-\infty, \infty)$.*

1. *Если выполняется хотя бы одно из условий:*

а) *функция $N(\alpha)$ измерима и удовлетворяет неравенству $N(\alpha) < \infty$ на множестве положительной меры,*

б) *функция $N(\alpha)$ ограничена сверху на множестве положительной меры,* *то существует предел*

$$H=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho-1}=\inf_{\alpha>0}\frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho-1}\,.$$

2. *Для любой точки $x>0$ справедливы неравенства*

$$\frac{\rho}{(1+x)^\rho-1}\liminf_{\alpha\to x+0}N(\alpha)\le\liminf_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)}{\alpha}\,,$$

$$\frac{\rho}{(1+x)^\rho-1}\liminf_{\alpha\to x-0}N(\alpha)\le\liminf_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)}{\alpha}\,.$$

3. *Если для каждого $\alpha>0$ функция $N(\alpha)$ либо полунепрерывна снизу слева в точке α, либо полунепрерывна снизу справа в этой точке, то существует предел*

$$N=\lim_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)}{\alpha}=\sup_{\alpha>0}\frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho-1}\,.$$

Замечание 1. Как уже отмечалось во введении теория ρ-полуаддитивных функций параллельна хорошо разработанной теории полуаддитивных функций, причем для случая $\rho=0$ функция $N(\alpha)$ с помощью замены $\alpha=e^t-1$ превращается в полуаддитивную функцию. Аналогом утверждения 1 теоремы является теорема 7.6.1 из [15]. Аналогом утверждения 3 является теорема 7.11.1 из этой же книги. Как следствие теоремы 6 легко получается такая теорема.

Теорема 7. *Пусть $N(\alpha)$ — ρ-полуаддитивная функция, удовлетворяющая неравенству* (5). *Если выполняется хотя бы одно из условий*

1) $\limsup\limits_{\alpha\to+0}N(\alpha)\le 0$,

2) $N(\alpha)$ — *монотонная функция,*

то существует предел

$$N:=\lim_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)}{\alpha}=\sup_{\alpha>0}\frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho-1}\,.$$

Доказательство теоремы 7. Пусть $\limsup\limits_{\alpha\to+0}N(\alpha)\le 0$. Тогда

$$N(x)\le N(x-h)+(1+x-h)^\rho N\left(\frac{h}{1+x-h}\right)\,.$$

Из этого следует, что

$$N(x)\le\liminf_{h\to+0}N(x-h)+(1+x)^\rho\limsup_{h\to+0}N\left(\frac{h}{1+x-h}\right)\le\liminf_{h\to+0}N(x-h)\,.$$

Это означает, что функция $N(\alpha)$ полунепрерывна снизу слева. Также полунепрерывна снизу слева любая убывающая функция. А любая возрастающая функция является полунепрерывной снизу справа. Теперь применение утверждения 3 теоремы 6 дает теорему 7.

Замечание 2. Пусть a_n — последовательность положительных чисел, а $f(r)=\sum\limits_{a_n\le r}1$ — считающая функция последовательности a_n. Пусть $N(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha)$ — функции плотности функции $f(r)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)\equiv 1$. Обе функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ — возрастающие. Тогда по теореме 7, если ее применять к функциям $N(\alpha)$ и $-\underline{N}(\alpha)$, получим, что существуют пределы

$$N=\lim_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)}{\alpha},\quad \underline{N}=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\underline{N}(\alpha)}{\alpha}\,.$$

Эти утверждения совпадают с теоремой Полиа [23] о существовании минимальной и максимальной плотностей. Правда, Полиа доказывал свою теорему при некотором дополнительном предположении о последовательности a_n. Затем А. А. Кондратюк [10] показал, что дополнительные предположения не нужны. Он также рассмотрел случай произвольного уточненного порядка. Таким образом, утверждение 3 теоремы 6 или теорему 7 можно рассматривать как распространение теоремы Полиа на более широкий класс функций.

Доказательство теоремы 6. Обозначим $\varphi(t) = N(e^t - 1)$. Тогда неравенство (5) преобразуется в неравенство

$$\varphi(u+v) \le \varphi(u) + e^{\rho u}\varphi(v)\,. \tag{19}$$

Используя метод математической индукции, можно доказать неравенства

$$\frac{\rho\varphi(nu)}{e^{\rho nu}-1} \le \frac{\rho\varphi(u)}{e^{\rho u}-1}\,, \tag{20}$$

$$\varphi(nu+mv) \le \frac{e^{\rho nu}-1}{e^{\rho u}-1}\varphi(u) + e^{\rho nu}\frac{e^{\rho mv}-1}{e^{\rho v}-1}\varphi(v), \quad \rho \ne 0\,, \tag{21}$$

$$\varphi(nu+mv) \le n\varphi(u) + m\varphi(v), \quad \rho = 0\,. \tag{22}$$

Пусть выполняется условие а) теоремы. Так как при отображении $t = \ln(1+\alpha)$ измеримость сохраняется и множество положительной меры переходит в множество положительной меры, то при принятом предположении функция φ будет измеримой и конечной на некотором множестве E положительной меры. Обозначим $E_n = \{t \in E : \varphi(t) \le n\}$. Тогда E_n — возрастающая последовательность измеримых множеств, причем $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Для некоторого n множество E_n имеет положительную меру. На множестве E_n функция φ ограничена сверху. Заметим, что условие б) прямо гарантирует существование такого множества. Вдобавок, мы, без ограничения общности, можем считать, что множество E_n ограничено. Теперь из (19) следует, что функция φ ограничена сверху на множестве $E_n + E_n$. По теореме 3 это множество содержит некоторый сегмент $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, \infty)$. Таким образом, как из условия а) так и из условия б) вытекает существование сегмента $[\tau_1, \tau_2] \subset (0, \infty)$, на котором функция φ ограничена сверху. Пусть

$$H = \inf_{t>0} \frac{\rho\varphi(t)}{e^{\rho t}-1}\,.$$

По условию теоремы $H < \infty$. Пусть H_1 — произвольное вещественное число строго большее чем H. Тогда существует число $\alpha_0 > 0$, что

$$\frac{\rho\varphi(\alpha_0)}{e^{\rho\alpha_0}-1} < H_1.$$

Пусть вначале $\rho < 0$. Применим лемму 2 с $s = \alpha_0$ и сегментом $[\tau_1, \tau_2]$. Тогда для любого достаточно большого x справедливо представление $x = n(x)\tau + m(x)\alpha_0$. Положим в неравенстве (21) $n = m(x)$, $u = \alpha_0$, $m = n(x)$, $v = \tau$. Мы получим

$$\frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x}-1} \le \frac{e^{\rho m(x)\alpha_0}-1}{e^{\rho x}-1}\frac{\rho\varphi(\alpha_0)}{e^{\rho\alpha_0}-1} + e^{\rho m(x)\alpha_0}\frac{e^{\rho n(x)\tau}-1}{e^{\rho x}-1}\frac{\rho\varphi(\tau)}{e^{\rho\tau}-1}\,.$$

Так как $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, то функция $\varphi(\tau) = \varphi(\tau(x))$ является ограниченной сверху. Переходя в полученном неравенстве к пределу при $x \to \infty$, находим, что

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x}-1} \le \frac{\rho\varphi(\alpha_0)}{e^{\rho\alpha_0}-1} < H_1\,.$$

Отсюда следует, что
$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x}-1}\le H\,.$$
Используя определение H, легко получить, что
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x}-1}=H\,. \tag{23}$$
Таким образом, утверждение 1 теоремы при $\rho<0$ доказано.

Пусть теперь $\rho>0$. Применим неравенство (21) с $n=n(x)$, $u=\tau$, $m=m(x)$, $v=\alpha_0$. Мы получим
$$\frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x}-1}\le\frac{e^{\rho n(x)\tau}-1}{e^{\rho x}-1}\frac{\rho\varphi(\tau)}{e^{\rho\tau}-1}+\frac{e^{\rho x}-e^{\rho n(x)\tau}}{e^{\rho x}-1}\frac{\rho\varphi(\alpha_0)}{e^{\rho\alpha_0}-1}\,.$$
Так как $\rho x-\rho n(x)\tau=\rho m(x)\alpha_0$, и так как по замечанию к лемме 2 можно считать, что $\lim\limits_{x\to\infty}m(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{\rho n(x)\tau}-1)/(e^{\rho x}-1)=0$. Мы вновь получаем, что
$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\rho\varphi(x)}{e^{\rho x}-1}\le H.$$
Из этого неравенства следует (23) уже при $\rho>0$.

Пусть теперь $\rho=0$. Подставляя в неравенство (22) $n=n(x)$, $u=\tau$, $m=m(x)$, $v=\alpha_0$, получим
$$\frac{\varphi(x)}{x}\le\frac{n(x)}{x}\varphi(\tau)+\frac{m(x)}{x}\varphi\alpha_0)=\frac{n(x)}{x}\left(\varphi(\tau)-\frac{\tau}{\alpha_0}\varphi(\alpha_0)\right)+\frac{\varphi(\alpha_0)}{\alpha_0}\,. \tag{24}$$
Мы можем считать, согласно замечания к лемме 2, что $\lim\limits_{x\to\infty}n(x)/m(x)=0$. Тогда из (24) следует, что
$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\le\frac{\varphi(\alpha_0)}{\alpha_0}<H_1\,.$$
Отсюда следует (23) и при $\rho=0$. Утверждение 1 теоремы доказано.

Далее будем доказывать утверждение 2. Обозначим
$$N_1=\liminf_{\alpha\to+0}\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}.$$
Пусть τ_k, $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k=0$, — такая последовательность, что
$$N_1=\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(\tau_k)}{\tau_k}\,.$$
Обозначим $t_{n,k}=n\tau_k$. Тогда из неравенства (20) следует, что
$$\frac{\rho\varphi(t_{n,k})}{e^{\rho t_{n,k}}-1}\le\frac{\rho\varphi(\tau_k)}{e^{\rho\tau_k}-1}\,. \tag{25}$$
Пусть t — произвольное строго положительное число. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k=0$, то существует функция $n=n(k)$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty}t_{n(k),k}=t$. Причем функцию $n=n(k)$ мы можем выбирать таким образом, чтобы гарантировать выполнение любого из неравенств $t_{n(k),k}<t$, $t_{n(k),k}>t$. Выберем $n=n(k)$ одним из указанных способов и подставим в (25) вместо n величину $n(k)$. Переходя к пределу при $k\to\infty$, получим
$$\frac{\rho}{e^{\rho t}-1}\limsup_{k\to\infty}\varphi(t_{n(k),k})\le N_1\,. \tag{26}$$

Если теперь $n(k)$ выбрано так, что выполняется неравенство $t_{n(k),k} > t$, то из (26) следует, что

$$\frac{\rho}{e^{\rho t}-1}\liminf_{u\to t+0}\varphi(u) \le \frac{\rho}{e^{\rho t}-1}\limsup_{k\to\infty}\varphi(t_{n(k),k}) \le N_1\,. \tag{27}$$

Аналогично, получаем

$$\frac{\rho}{e^{\rho t}-1}\liminf_{u\to t-0}\varphi(u) \le N_1\,.$$

Из этого следует утверждение 2 теоремы.

Осталось доказать утверждение 3 теоремы. Предыдущие рассуждения показывают, что достаточно установить аналогичный результат для функции φ. Пусть φ полунепрерывная снизу справа в точке t. Это означает, что выполняется неравенство

$$\varphi(t) \le \liminf_{u\to t+0}\varphi(u).$$

Теперь из (27) следует, что

$$\frac{\rho\varphi(t)}{e^{\rho t}-1} \le N_1\,. \tag{28}$$

Аналогично доказывается неравенство (28) и в случае, если φ полунепрерывна снизу слева в точке t. Из неравенства (28) легко следует утверждение 3 теоремы. Отметим еще, что измеримость $N(\alpha)$ не гарантирует справедливость утверждения пункта 3 теоремы.

Теорема полностью доказана.

В пункте 3 теоремы 6 и в теореме 7 приведены достаточные условия существования предела

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)}{\alpha} \tag{29}$$

для ρ-полуаддитивных функций. Эти условия выражены в терминах свойств функции $N(\alpha)$. Можно привести условия существования предела и в других терминах. Обозначим

$$N_1 = \liminf_{\alpha\to+0}\frac{N(\alpha)}{\alpha}\,. \tag{30}$$

Тогда существует множество $E\subset(0,\infty)$, для которого ноль является предельной точкой, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \alpha\in E}}\frac{N(\alpha)}{\alpha} = N_1\,. \tag{31}$$

Если существует предел (29), то тогда в качестве E можно взять всю полуось $(0,\infty)$. Мы покажем, что если в равенстве (31) множество E достаточно "массивное", то существует предел (29). Нам нужно несколько новых определений. Мы будем пользоваться терминологией из [15]. Множество E в абелевой полугруппе называется модулем, если из соотношений $x\in E$, $y\in E$, следует, что $x+y\in E$. Всюду в дальнейшем в качестве абелевой полугруппы у нас будет выступать вещественная полуось $(0,\infty)$ со сложением в качестве полугрупповой операции. Множество $E\subset(0,\infty)$ называется L-модулем, если из соотношений $x\in E$, $y\in E$, следует, что $x+y+xy\in E$. Легко видеть, что если E — модуль, $\alpha(t)=e^t-1$, то $\alpha(E)$ есть L-модуль и, обратно, если E есть L-модуль и $t(\alpha)=\ln(1+\alpha)$, то $t(E)$ есть модуль. Пусть E — произвольное множество на полуоси $(0,\infty)$. Через $S(E)$ мы будем обозначать наименьший модуль, содержащий множество E. Легко видеть, что $x\in S(E)$, тогда и только тогда, когда $x=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$, где $u_k\in E$. Число n и слагаемые u_k изменяются с изменением x. Аналогично, через $\hat S(E)$ обозначается наименьший L-модуль, содержащий E.

Теорема 8. *Пусть функция* $\varphi(t)$, $t \in (0,\infty)$, *удовлетворяет неравенству* (19),

$$N_1 = \liminf_{t\to+0} \frac{\varphi(t)}{t}\,.$$

Пусть $E \subset (0,\infty)$ *есть множество, для которого ноль является предельной точкой, причем*

$$\lim_{\substack{t\to+0\\ t\in E}} \frac{\varphi(t)}{t} = N_1\,.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{t\to+0\\ t\in S(E)}} \frac{\varphi(t)}{t} = N_1\,.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta_0 \in (0,1)$ — суть произвольные числа. По условию теоремы существует $\delta \in (0,\delta_0)$ такое, что для любого $t \in (0,\delta)\cap E$, будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{\varphi(t)}{t} - N_1\right| < \varepsilon,$$

и, в частности, неравенство $\varphi(t) < (N_1+\varepsilon)t$. Пусть теперь $t \in (0,\delta)\cap S(E)$. Тогда $t = u_1+u_2+\cdots+u_n$, где $u_k \in E$. Очевидно также, что $u_k \in (0,\delta)$. Поэтому $\varphi(u_k) < (N_1+\varepsilon)u_k$. Тогда, используя неравенство (19), получим

$$\varphi(t) = \varphi(u_1+u_2+\cdots+u_n) \le \varphi(u_1) + e^{\rho u_1}\varphi(u_2) + \cdots + e^{\rho(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})}\varphi(u_n) <$$

$$< (N_1+\varepsilon)(u_1 + e^{\rho u_1}u_2 + \cdots + e^{\rho(u_1+u_2+\cdots+u_{n-1})}u_n\,. \tag{32}$$

Из неравенства (32) следует, что

$$\varphi(t) < (N_1+\varepsilon)(1 + \operatorname{sign}(N_1+\varepsilon)\sup_{x\in[0,\delta]}|e^{\rho x}-1|)t\,.$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{\substack{t\to+0\\ t\in S(E)}} \frac{\varphi(t)}{t} \le N_1\,.$$

Из этого следует утверждение теоремы в случае $N_1 \in (-\infty,\infty)$.

Случай $N_1 = -\infty$ исследуется аналогично. В случае $N_1 = +\infty$ теорема тривиальна.

Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть функция* $\varphi(t)$, $t \in (0,\infty)$, *удовлетворяет неравенству* (19) *и*

$$\liminf_{t\to+0} \frac{\varphi(t)}{t} = N_1\,.$$

Пусть $E \subset (0,\infty)$ *— множество, для которого* 0 *является предельной точкой, и такое, что*

$$\lim_{\substack{t\to+0\\ t\in E}} \frac{\varphi(t)}{t} = N_1\,.$$

Тогда, если для любого $\delta > 0$ *множество* $(0,\delta)\bigcap S(E)$ *содержит в себе множество положительной меры, то существует*

$$\lim_{t\to+0} \frac{\varphi(t)}{t}\,.$$

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что для любого $\delta > 0$ множество $(0, \delta) \cap S(E)$ содержит в себе интервал. Поэтому существует открытое множество E_1, для которого ноль является предельной точкой, такое, что $E_1 \subset S(E)$. Тогда $S(E_1) \subset S(S(E)) = S(E)$. По теореме 8 из [15] $S(E_1) = (0, \infty)$. Таким образом, $S(E) = (0, \infty)$. Теперь применение теоремы 8 заканчивает доказательство теоремы.

Сформулируем теперь соответствующие результаты для ρ-полуаддитивных функций.

Теорема 10. *Пусть $N(\alpha)$, $\alpha \in (0, \infty)$, есть ρ-полуаддитивная функция и пусть*

$$N_1 = \liminf_{\alpha \to +0} \frac{N(\alpha)}{\alpha}\,.$$

Пусть $E \subset (0, \infty)$ есть множество, для которого 0 есть предельная точка, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ \alpha \in E}} \frac{N(\alpha)}{\alpha} = N_1\,.$$

Тогда

$$\lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ \alpha \in \hat{S}(E)}} \frac{N(\alpha)}{\alpha} = N_1\,.$$

Теорема 11. *Пусть $N(\alpha)$, $\alpha \in (0, \infty)$, есть полуаддитивная функция и пусть*

$$N_1 = \liminf_{\alpha \to +0} \frac{N(\alpha)}{\alpha}\,.$$

Пусть $E \subset (0, \infty)$ есть множество, для которого 0 есть предельная точка, и такое, что

$$\lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ \alpha \in E}} \frac{N(\alpha)}{\alpha} = N_1.$$

Тогда, если для любого $\delta > 0$ множество $(0, \delta) \cap \hat{S}(E)$ содержит внутри себя множество положительной меры, то существует предел

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{N(\alpha)}{\alpha}\,.$$

5. Свойства функций плотности

Пусть $\rho(r)$, $\lim\limits_{r \to \infty} \rho(r) = \rho \in (-\infty, \infty)$, есть произвольный уточненный порядок, $V(r) = r^{\rho(r)}$. Как показывает опыт исследований по теории роста функций, наряду с функцией $V(r)$ часто приходится рассматривать функцию

$$V_1(r) = \int\limits_1^r \frac{V(t)}{t}\,dt\,.$$

Если $\lim\limits_{r \to \infty} V(r) = \lim\limits_{r \to \infty} V_1(r) = \infty$, то из правила Лопиталя следует, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{V(r)}{V_1(r)} = \rho.$$

В случае $\rho > 0$ функции $V(r)$ и $V_1(r)$ имеют одинаковый рост. В случае $\rho = 0$ функция $V_1(r)$ растет быстрее. Если функция $V_1(r)$ ограничена, то удобнее рассматривать функцию

$$V_2(r) = \int_r^\infty \frac{V(t)}{t}\,dt\,.$$

В этом случае $\lim\limits_{r\to\infty} V_2(r) = 0$. Применение правила Лопиталя дает

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(r)}{V_2(r)} = -\rho.$$

Ниже мы увидим как появляются в теории роста функции $V_1(r)$ и $V_2(r)$.

Для произвольной функции $f(r)$, определенной на полуоси $(0,\infty)$, можно ввести тип и нижний тип, которые мы в этом разделе будем обозначать B и A.

$$B = \limsup_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V(r)}, \quad A = \liminf_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V(r)}\,.$$

По формулам (3) и (4) определяются плотность и нижняя плотность функции $f(r)$. Мы намерены изучать связи между этими величинами и получать оценки для функции $f(r)$. Простые априорные ограничения на функцию $f(r)$, такие как измеримость или ограниченность на конечных сегментах, дают важную информацию о поведении введенных величин.

Теорема 12. *Пусть существует число r_0 такое, что функция $f(r)$ ограничена сверху на любом сегменте $[a,b]$, $a \ge r_0$, и пусть $\lim\limits_{r\to\infty} V_1(r) = \infty$. Тогда*

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V_1(r)} \le \inf_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,.$$

(*Мы считаем, что* $\left.\dfrac{\rho}{(1+\alpha)^\rho - 1}\right|_{\rho=0} = \dfrac{1}{\ln(1+\alpha)}$.)

Замечание. Некоторые близкие результаты содержатся в леммах 1.12, П2 из [14].

Доказательство. Если $N(\alpha) \equiv \infty$ при $\alpha > 0$, то и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что для некоторых $\alpha > 0$ $N(\alpha) < \infty$. В дальнейшем мы зафиксируем одно такое α. Пусть ε — произвольное строго положительное число и пусть $R \ge r_0$ такое число, что

$$\frac{f(r+\alpha r) - f(r)}{V(r)} \le N(\alpha) + \varepsilon$$

при $r \ge R$. (Выражение $N(\alpha) + \varepsilon$ нужно заменить на произвольное вещественное число, если $N(\alpha) = -\infty$.) Пусть теперь $r \ge R$, а число n определяется из условия $R(1+\alpha)^n \le r < R(1+\alpha)^{n+1}$. Тогда $\overline{r} := (1+\alpha)^{-n} r \in [R, (1+\alpha)R)$. В дальнейшем $1+\alpha$ мы будем обозначать через q. Пусть $M = \sup\{f(t) : t \in [R, qR)\}$. По условию теоремы $M < +\infty$. Мы имеем

$$f(r) = f(\overline{r}) + \sum_{k=1}^n (f(q^k\overline{r}) - f(q^{k-1}\overline{r})) \le M + (N(\alpha)+\varepsilon)\sum_{k=1}^n V(q^{k-1}\overline{r})\,. \tag{33}$$

Пусть $L(x) = x^{-\rho}V(x)$. Как известно [12], функция $L(xt)/L(x)$ равномерно относительно $t \in [1,q]$ стремится к 1 при $x \to \infty$. Поэтому

$$\int_{q^{k-1}\overline{r}}^{q^k\overline{r}} \frac{V(x)}{x}\,dx = \int_{q^{k-1}\overline{r}}^{q^k\overline{r}} \frac{L(x)}{x^{1-\rho}}\,dx = \frac{L(q^{k-1}\overline{r})}{1+\varepsilon_k} \int_{q^{k-1}\overline{r}}^{q^k\overline{r}} x^{\rho-1}\,dx = \frac{V(q^{k-1}\overline{r})}{1+\varepsilon_k}\frac{q^\rho - 1}{\rho}\,, \tag{34}$$

где $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Теперь из условия $\lim\limits_{k\to\infty} V_1(r) = \infty$, неравенства (33) и равенства (34) следует, что

$$f(r) \le M + (1+\varepsilon(r))\frac{\rho(N(\alpha)+\varepsilon)}{(1+\alpha)^\rho - 1}V_1(r)\,,$$

где $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$.

Тем самым теорема доказана.

Случай, когда функция $V_1(r)$ ограничена, исследуется в следующей теореме.

Теорема 13. *Пусть $V_1(r) \le M$ и $\lim\limits_{r\to\infty} f(r) = 0$. Тогда*

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{f(r)}{V_2(r)} \le -\inf_{\alpha>0}\frac{\rho\underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,.$$

Доказательство. Из условия $\lim\limits_{r\to\infty} f(r) = 0$ следует, что

$$f(r) = -\sum_{k=1}^{\infty}(f(q^k r) - f(q^{k-1}r)), \quad q > 1\,.$$

Если $\underline{N}(\alpha) = -\infty$ при любом $\alpha > 0$, то и доказывать нечего. Поэтому можно считать, что для некоторых $\alpha > 0$ справедливо неравенство $\underline{N}(\alpha) > -\infty$. Зафиксируем одно из таких α и обозначим $q = 1+\alpha$. Пусть ε — произвольное строго положительное число. Существует такое R, что при $r \ge R$ будет выполняться неравенство

$$f(q^k r) - f(q^{k-1}r) \ge (\underline{N}(\alpha) - \varepsilon)V(q^{k-1}r)\,.$$

(Если $\underline{N}(\alpha) = \infty$, то выражение $\underline{N}(\alpha) - \varepsilon$ нужно заменить на произвольное вещественное число.) Из этого неравенства и равенства (34) следует, что

$$f(r) \le -(\underline{N}(\alpha) - \varepsilon)\frac{\rho}{q^\rho - 1}\sum_{k=1}^{\infty}(1+\varepsilon_k(r))\int\limits_{q^{k-1}r}^{q^k r}\frac{V(x)}{x}\,dx =$$

$$-(\underline{N}(\alpha) - \varepsilon)\frac{\rho}{q^\rho - 1}(1+\varepsilon(r))V_2(r)\,,$$

где функции $\varepsilon_k(r)$ равномерно относительно k стремятся к нулю при $r \to \infty$ и функция $\varepsilon(r)$ также сходится к нулю при $r \to \infty$. Из полученного неравенства следует утверждение теоремы.

Суммируя итоги проделанной работы, сформулируем теорему о связи между введенными нами величинами.

Теорема 14. *Пусть $\rho > 0$ и пусть существует такое число r_0, что функция $f(r)$ ограничена сверху на любом сегменте $[a,b]$, $a \ge r_0$. Тогда*

$$B\rho \le \inf_{\alpha>0}\frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,. \tag{35}$$

Если функция $-f$ ограничена сверху на указанных выше сегментах, то

$$\sup_{\alpha>0}\frac{\rho\underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} \le A\rho\,. \tag{36}$$

Пусть $\rho < 0$ *и пусть* $\lim\limits_{r\to\infty} f(r) = 0$. *Тогда*

$$A\rho \le \inf_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,, \tag{37}$$

$$\sup_{\alpha>0} \frac{\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} \le B\rho\,. \tag{38}$$

Если дополнительно предположить, что $A > -\infty$, *то неравенства* (35), (38) *превращаются в равенства. А если предположить, что* $B < +\infty$, *то неравенства* (36), (37) *превращаются в равенства.*

Замечание. Если функция f удовлетворяет условиям теоремы 14, а именно: $f(r)$ ограниченна на достаточно удаленных от нуля сегментах если $\rho > 0$, и $\lim\limits_{r\to\infty} f(r) = 0$, если $\rho < 0$, и если, кроме того, $N(\alpha) \ne +\infty$, $\underline{N}(\alpha) \ne -\infty$ хотя бы при некотором α, то величины A и B конечны и все неравенства теоремы 14 превращаются в равенства.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 12. Второе утверждение теоремы — это есть первое утверждение, примененное к функции $-f$. Четвертое утверждение теоремы следует из теоремы 13. Третье утверждение теоремы — это есть четвертое утверждение, примененное к функции $-f$. Далее исследуем случаи равенства. Остановимся на неравенстве (35). Пусть $A > -\infty$. Если $A = +\infty$, то очевидно, что неравенство (35) превращается в равенство $+\infty = +\infty$. Поэтому можно считать, что $A \in (-\infty, \infty)$. Далее имеем

$$B\rho = \rho \limsup_{r\to\infty} \frac{f(r+\alpha r)}{V(r+\alpha r)} \ge \rho \limsup_{r\to\infty} \frac{f(r+\alpha r) - f(r)}{V(r+\alpha r)} +$$

$$+\rho \liminf_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V(r+\alpha r)} = \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho} + \frac{\rho A}{(1+\alpha)^\rho}\,.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha \to \infty$ и используя теорему 6, получим

$$B\rho \ge \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho} = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} = \inf_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,.$$

Это неравенство говорит о том, что в рассматриваемом случае неравенство (35) есть равенство. Применяя это рассуждение к функции $-f$, получим что из условия $B < +\infty$ следует, что неравенство (36) есть равенство, Оставшиеся случаи исследуются аналогично.

Рассмотрим теперь частный случай, когда выполняется равенство $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha)$.

Теорема 15. *Пусть* $f(r)$ — *функция, определенная на луче* $[0, \infty)$, *и пусть существует число* r_0 *такое, что функция ограничена на каждом сегменте* $[a, b]$, $a \ge r_0$. *Пусть* $\rho(r)$ *такой уточненный порядок, что* $\lim\limits_{r\to\infty} V_1(r) = \infty$. *Пусть* $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha)$ *и функция* $N(\alpha)$ *конечна при некотором* $\alpha > 0$. *Тогда*

$$N(\alpha = N\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}\,, \tag{39}$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V(r)} = \rho N\,, (\rho \ne 0), \quad \lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V_1(r)} = N\,, (\rho = 0)\,.$$

Замечание. Равенство $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha)$ гарантирует для $N(\alpha)$ выполнение равенства (15). В теореме 4 переход от равенства (15) к равенству (39) осуществляется при гораздо более жестких ограничениях на функцию $N(\alpha)$. В теореме 15 требуется только конечность $N(\alpha)$ хотя бы в одной точке. Это происходит потому, что в теореме 15 $N(\alpha)$ не произвольная ρ-аддитивная функция, а функция плотности специальной функции f.

Доказательство. Из теоремы 12, примененной к функциям f и $-f$ следует, что каждая из величин

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{f(r)}{V_1(r)},\quad \limsup_{r\to\infty}\frac{f(r)}{V_1(r)}$$

конечна. Далее из этой же теоремы следует, что величина $N(\alpha)$ ограничена на любом сегменте $[a,b]$, $a>0$. Теперь из теоремы 4 следует, что выполняется равенство (39) со стандартной оговоркой для $\rho=0$. Теперь из теоремы 12, примененной к функциям f и $-f$, следуют остальные утверждения теоремы.

Заключение теоремы 15 справедливо и при других ограничениях на функции $f(r)$ и $N(\alpha)$.

Теорема 16. *Пусть $\rho(r)$ такой уточненный порядок, что $\lim\limits_{r\to\infty}V_1(r)=\infty$. Пусть $f(r)$, $r\in[0,\infty)$, есть конечная измеримая функция с равными функциями плотности $N(\alpha)=\underline{N}(\alpha)$. Если функция $N(\alpha)$ конечна на множестве положительной меры, то*

$$N(\alpha)=N\frac{(1+\alpha)^\rho-1}{\rho}\,, \tag{40}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{V(r)}=\rho N\,,(\rho>0),\quad \lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{V_1(r)}=N\,,(\rho=0)\,.$$

Доказательство. Поскольку $N(\alpha)=\underline{N}(\alpha)$, то справедливо равенство (15). Мы также имеем

$$\lim_{r\to\infty}\frac{f(r+\alpha r)-f(r)}{V(r)}=N(\alpha)\,. \tag{41}$$

Поскольку предел измеримых функций есть измеримая функция, то $N(\alpha)$ — измеримая функция. Теперь из теоремы 4 следует равенство (40). Пусть $[a,b]\subset[0,\infty)$. Из теоремы 2 следует, что соотношение (41) выполняется равномерно относительно $\alpha\in[a,b]$. Из этого следует ограниченность функции f на сегментах достаточно удаленных от нуля. Теперь теорема 16 следует из теоремы 15.

Рассмотрим еще случай, когда функция $V_1(r)$ является ограниченной.

Теорема 17. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, причем функция $V_1(r)$ является ограниченной. Пусть $f(r)$, $r\in[0,\infty)$, есть бесконечно малая функция при $r\to\infty$. Пусть функции плотности функции f относительно $V(r)$ совпадают, $N(\alpha)=\underline{N}(\alpha)$, и функция $N(\alpha)$ конечна при некотором $\alpha>0$. Тогда*

$$N(\alpha)=N\frac{(1+\alpha)^\rho-1}{\rho},\quad \lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{V_2(r)}=-N\,.$$

Доказательство. Теорема 17 доказывается также как и теорема 15, только ссылку на теорему 12 нужно заменить ссылкой на теорему 13.

Теорема 18. *Пусть функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$, $\alpha\in(0,\infty)$, удовлетворяют неравенствам (5) — (8) и неравенству $\underline{N}(\alpha)\le N(\alpha)$. Пусть величины N и $\underline{N}$ существуют (существуют соответствующие пределы для величин из замечания 2 к теореме 7), причем $N=\underline{N}$, и пусть хотя бы одна из функций $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ не есть тождественная плюс или минус бесконечность. Тогда N — конечная величина и*

$$N(\alpha)=\underline{N}(\alpha)=N\frac{(1+\alpha)^\rho-1}{\rho}\,.$$

Доказательство. Предположим вначале, что $N = \underline{N} = -\infty$. Тогда $\limsup_{\alpha\to+0} N(\alpha) \le 0$. По теореме 7 справедливо равенство

$$N = \sup_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,. \tag{42}$$

Откуда следует, что $\underline{N}(\alpha) = N(\alpha) = -\infty$. Если $N = \underline{N} = +\infty$, то заменяя в предыдущем рассуждении функцию $N(\alpha)$ на функцию $-N(\alpha)$, получим, что $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha) = \infty$. Таким образом, из условий теоремы следует, что N есть вещественное число, а не символ $\pm\infty$. Теперь из равенства (42) и аналогичного равенства для функции $-\underline{N}(\alpha)$ следует, что

$$N(\alpha) = \underline{N}(\alpha) = N\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}\,.$$

Теорема доказана.

Мы приведем еще некоторые условия, обеспечивающие равенство $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha)$.

Теорема 19. *Пусть функции $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha) \le N(\alpha)$, удовлетворяют неравенствам* (5) — (8) *и каждая из функций $N(\alpha)$, $-\underline{N}(\alpha)$, удовлетворяет условиям пункта* 1 *теоремы* 6. *Пусть, кроме того,*

$$\liminf_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha) - \underline{N}(\alpha)}{\alpha} = 0\,. \tag{43}$$

Тогда выполняются равенства

$$H := \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} = \inf_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,,$$

и при этом

$$H = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} = \sup_{\alpha>0} \frac{\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,.$$

Если дополнительно известно, что $\rho > 0$, а $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ есть функции плотности функции $f(r)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, $\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, причем функция f является ограниченной на всех сегментах достаточно удаленных от нуля, или что $\rho < 0$, а $N(\alpha)$ и $\underline{N}(\alpha)$ функции плотности функции $f(r)$, $\lim_{r\to\infty} f(r) = 0$, то

$$\underline{N}(\alpha) = N(\alpha) = H\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}\,.$$

Доказательство. Согласно теореме 6, существуют пределы

$$H = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} = \inf_{\alpha>0} \frac{\rho N(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,,$$

$$\underline{H} = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1} = \sup_{\alpha>0} \frac{\rho \underline{N}(\alpha)}{(1+\alpha)^\rho - 1}\,.$$

Так как $\underline{N}(\alpha) \le N(\alpha)$, то $\underline{H} \le H$. Имеем

$$N(\alpha) \ge H\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}, \quad \underline{N}(\alpha) \le \underline{H}\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}\,,$$

$$N(\alpha) - \underline{N}(\alpha) \ge (H - \underline{H})\frac{(1+\alpha)^\rho - 1}{\rho}\,.$$

Теперь из (43) следует, что $0 \geq H - \underline{H}$, $\underline{H} \geq H$, $\underline{H} = H$.

Пусть теперь выполняются дополнительные условия теоремы. Тогда из полученных оценок и замечания к теореме 14 следует, что существует

$$\lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{V(r)}$$

и значит $\underline{N}(\alpha) = N(\alpha)$. Из этого легко следует утверждение теоремы.

Теорема 20. *Пусть конечные функции* $N(\alpha)$ *и* $\underline{N}(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha) \leq N(\alpha)$, *удовлетворяют неравенствам* (5) — (8) *и пусть*

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha) - \underline{N}(\alpha)}{\alpha} = 0\,.$$

Тогда $N(\alpha) = \underline{N}(\alpha)$.

Доказательство. Пусть $N_1(\alpha) = N(\alpha) - \underline{N}(\alpha)$. Тогда функция $N_1(\alpha)$ удовлетворяет неравенству (5), положительна и, кроме того,

$$\lim_{\alpha\to+0} \frac{N_1(\alpha)}{\alpha} = 0\,.$$

По теореме 7 $N_1(\alpha) \leq 0$. Поэтому $N_1(\alpha) = 0$.

Теорема доказана.

6. Примеры функций $f(r)$ и их функций плотности

Рассмотрим теперь несколько примеров.

Пусть $u(r)$ — периодическая непрерывная функция.

1. В качестве первого примера рассмотрим функцию $f(r) = r^\rho u(\ln\ln r)$. Для этой функции

$$B = \limsup_{r\to\infty} \frac{u(r)}{r^\rho} = \max_x u(x), \quad A = \liminf_{r\to\infty} \frac{u(r)}{r^\rho} = \min_x u(x)\,,$$

$$N(\alpha) = B((1+\alpha)^\rho - 1), \quad \underline{N}(\alpha) = A((1+\alpha)^\rho - 1)\,.$$

2. Пусть $f(r) = r^\rho u(\ln^\sigma r)$, $\sigma \in (0,1)$. Для этой функции величины B, A, $N(\alpha)$, $\underline{N}(\alpha)$ такие же как и в первом примере.

3. Пусть $f(r) = r^\rho u(\ln r)$. Тогда

$$N(\alpha) = \max_x((1+\alpha)^\rho u(x + \ln(1+\alpha)) - u(x))\,,$$

$$\underline{N}(\alpha) = \min_x((1+\alpha)^\rho u(x + \ln(1+\alpha)) - u(x))\,.$$

4. Пусть функция $f(r)$ такая как в примере 3, однако, мы будем дополнительно предполагать, что функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема. Тогда

$$N = \lim_{\alpha\to+0} \frac{N(\alpha)}{\alpha} = \max_x(\rho u(x) + u'(x))\,,$$

$$\underline{N} = \lim_{\alpha\to+0} \frac{\underline{N}(\alpha)}{\alpha} = \min_x(\rho u(x) + u'(x))\,.$$

5. Пусть теперь функция $f(r)$ такая же как в примерах 3 и 4. Однако, относительно u мы теперь будем предполагать, что существует точка x_0 такая, что $u(x_0+\Delta x)-u(x_0)\geq\beta(\Delta x)^\sigma$ при $\Delta x\in(0,\delta)$, где β — некоторое положительное число, $\sigma\in(0,1)$. Тогда

$$N(\alpha)\geq b(1+\alpha)^\rho\ln^\sigma(1+\alpha)+u(x_0)((1+\alpha)^\rho-1)\,,$$

если $\ln(1+\alpha)\in(0,\delta)$.

6. Пусть $f(r)=r^\rho u(\ln^\sigma r)$, $\sigma>1$. Тогда

$$N(\alpha)=\max_{x,y}((1+\alpha)^\rho u(x)-u(y))\,,$$

$$\underline{N}(\alpha)=\min_{x,y}((1+\alpha)^\rho u(x)-u(y))\,.$$

7. Оценки интегралов Стилтьеса специального вида

В этом параграфе речь пойдёт об оценках величины

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{rV(r)}\int\limits_{\alpha r}^{\beta r}f\left(\frac{t}{r}\right)\,d\nu(t)$$

при различных ограничениях на функции $f(t)$ и ν. Мы рассматриваем интеграл в смысле Стилтьеса и ν — не обязательно мера (функция ν определяет конечную аддитивную меру на полуоси. Имеется в виду, что эта мера не обязательно счётно-аддитивна).

Мы начнем с простейшего случая. Результаты, сформулированные в следующей теореме, изложены в [14], раздел 2.3.

Теорема 21. *Пусть $0<a<b<\infty$, $f(t)\in L_1\Big([a,b]\Big)$. Тогда*

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\frac{V(tr)}{V(r)}\,dt=\int\limits_a^b f(t)t^\rho\,dt\,.$$

Если для некоторого $\varepsilon>0$ функция $f(t)t^{\rho-\varepsilon}\in L_1\Big([0,b]\Big)$, то в качестве a можно брать ноль. Если для некоторого $\varepsilon>0$ функция $f(t)t^{\rho-\varepsilon}\in L_1\Big([a,\infty)\Big)$, то в качестве b можно брать ∞.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 22. *Пусть $f(t)$ — непрерывно-дифференцируемая функция на сегменте $[\alpha,\beta]$, $\rho(r)$ — уточнённый порядок, $\rho=\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)$, $\rho>-1$, ν — локально интегрируемая по Риману функция на полуоси $[0,\infty)$. Пусть*

$$\lim_{\substack{b\to+0\\ r\to\infty}}\frac{\nu(r+br)-\nu(r)}{rV(r)}=0\,,\tag{44}$$

$$N(b)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\nu(r+br)-\nu(r)}{rV(r)}\,.$$

Тогда существует предел

$$N=\lim_{b\to+0}\frac{N(b)}{b}\tag{45}$$

и выполняется неравенство

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{rV(r)}\int\limits_{\alpha r}^{\beta r}f\left(\frac{t}{r}\right)\,d\nu(t)\leq N\int\limits_\alpha^\beta t^\rho f(t)\,dt\,.$$

Доказательство. Из условий теоремы и замечания 2 к теореме 2 следует, что $N(b)$ (так же как и $\underline{N}(b)$) непрерывная функция при $b \in (0, \infty)$. Тогда из теоремы 6 следует существование предела (45) и неравенство $N > -\infty$. Если

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\nu(r)}{rV(r)} = 0\,,$$

то интегрированием по частям легко доказать, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{rV(r)} \int\limits_{\alpha r}^{\beta r} f\left(\frac{t}{r}\right)\, d\nu(t) = 0\,.$$

Можно считать, что ν определена на всей оси, причем $\nu(x) = 0$ при $x < 2$. Пусть ν_1 – функция, определяемая условиями: $d\nu_1(x) = u_1(x)\,dx$, $\nu_1(0) = 0$, где

$$u_1(x) = 2\left(\nu\left(x + 1/4\right) - \nu\left(x - 1/4\right)\right)\,.$$

Тогда

$$\nu_1(r) = \int\limits_0^r 2\left(\nu\left(x+1/4\right) - \nu\left(x-1/4\right)\right)\,dx = 2\int\limits_0^{r+1/4} \nu(t)\,dt - 2\int\limits_0^{r-1/4} \nu(t)\,dt = 2\int\limits_{r-1/4}^{r+1/4} \nu(t)\,dt\,,$$

$$\nu_1(r) - \nu(r) = 2\int\limits_{r-1/4}^{r+1/4} \left(\nu(t) - \nu(r)\right)dt\,.$$

Теперь из равенства (44) следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\nu_1(r) - \nu(r)}{rV(r)}) = 0\,.$$

По доказанному выполняется равенство

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{rV(r)} \int\limits_{\alpha r}^{\beta r} f\left(\frac{t}{r}\right)\, d\nu(t) = \limsup_{r\to\infty} \frac{1}{rV(r)} \int\limits_{\alpha r}^{\beta r} f\left(\frac{t}{r}\right)\, d\nu_1(t)\,.$$

Кроме того, функции $N(b)$, построенные для функций ν и ν_1, совпадают. Поэтому достаточно доказывать теорему для функции ν_1. Эта функция непрерывна. В свою очередь функцию ν_1 можно заменить на функцию ν_2, определяемую условиями

$$d\nu_2(x) = 2\left(\nu_1\left(x+1/4\right) - \nu_1\left(x-1/4\right)\right)\,dx, \quad \nu_2(0) = 0\,.$$

Таким образом, при доказательстве теоремы можно считать, что $d\nu(t) = u(t)\,dt$, где $u(t)$ – непрерывная функция. Далее из свойств функции $f(t)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $Q(t)$, который обладает свойствами: $f(b) = Q(b)$, $Q(t) \geq 0$ при $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\int\limits_\alpha^\beta |f'(t) - Q'(t)|\,dt < \varepsilon\,.$$

Тогда

$$\frac{1}{rV(r)}\left|\int\limits_{\alpha r}^{\beta r}\left(f\left(\frac{t}{r}\right)-Q\left(\frac{t}{r}\right)\right)\,d\nu(t)\right|=\frac{1}{r^2V(r)}\left|\int\limits_{\alpha r}^{\beta r}\left(f'\left(\frac{t}{r}\right)-Q'\left(\frac{t}{r}\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\nu(t)-\nu(ar)\right)dt\right|\le 2M_1\frac{V(\beta r)}{rV(r)}\int\limits_{\alpha r}^{\beta r}\left|f'\left(\frac{t}{r}\right)-Q'\left(\frac{t}{r}\right)\right|\,dt=$$

$$=2M_1\frac{V(\beta r)}{V(r)}\int\limits_{\alpha}^{\beta}|f'(\tau)-Q'(\tau)|\,d\tau<2\varepsilon M_1\frac{V(\beta r)}{V(r)}\,.$$

Наши рассуждения показывают, что теорему достаточно доказать при дополнительном предположении: $f(t)$ — многочлен. Многочлен является кусочно-монотонной функцией. Поэтому теорему достаточно доказывать при дополнительном предположении, что $f(t)$ — кусочно-монотонная функция. Разбивая сегмент $[\alpha,\beta]$ на более мелкие сегменты, получим, что теорему достаточно доказывать при дополнительном предположении: $f(t)$ — монотонная функция. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $f(t)$ — положительная, монотонная, непрерывно-дифференцируемая функция на сегменте $[\alpha,\beta]$, и выполняется соотношение $d\nu(t)=u(t)\,dt$, где $u(t)$ — непрерывная функция.

Из непрерывности функций $N(b)$ и $\underline{N}(b)$ и теоремы 2 следует, что существует функция $\varepsilon(r)\downarrow 0$ при $r\to\infty$ такая, что при $b\in[0,1/2]$ выполняется неравенство

$$\nu(r+br)-\nu(r)\le (N(b)+\varepsilon(r))rV(r)\,. \tag{46}$$

Пусть n — произвольное натуральное число, $q=\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\tau_0=\alpha$, $\tau_1=q\tau_0,\ldots,\tau_n=q^n\tau_0=\beta$. Тогда по второй теореме о среднем значении для интегралов существуют точки $\xi_k\in[\tau_k,\tau_{k+1}]$ такие, что выполняются равенства:

$$I(r)=\int\limits_{\alpha r}^{\beta r}f\left(\frac{t}{r}\right)\,d\nu(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_k r}^{\tau_{k+1}r}f\left(\frac{t}{r}\right)u(t)\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(\tau_k)\int\limits_{\tau_k r}^{\xi_k r}u(t)\,dt+f(\tau_{k+1})\int\limits_{\xi_k r}^{\tau_{k+1}r}u(t)\,dt\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}f(\tau_k)\int\limits_{\tau_k r}^{\tau_{k+1}r}u(t)\,dt+\sum_{k=0}^{n-1}(f(\tau_{k+1})-f(\tau_k))\int\limits_{\xi_k r}^{\tau_{k+1}r}u(t)\,dt=$$

$$=I_1(q,r)+I_2(q,r)\,.$$

Пусть теперь $q=q(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty}q(r)=1$. Тогда из равенства (44) следует, что существует функция $\varepsilon_1(r)\downarrow 0$ при $r\to\infty$ такая, что выполняется неравенство:

$$\left|\int\limits_{\xi_k r}^{\tau_{k+1}r}u(t)\,dt\right|=|\nu(\tau_{k+1}r)-\nu(\xi_k r)|\le\varepsilon_1(r)rV(r),\quad k\in\overline{0,n-1}\,.$$

Тогда, учитывая монотонность функции $f(t)$, получаем неравенство:

$$|I_2(q(r),r)| \le \varepsilon_1(r)rV(r)|f(\beta)-f(\alpha)|\,.$$

Из этого следует, что $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{1}{rV(r)}I_2(q(r),r)=0$. Далее производим оценку $I_1(q,r)$. Используя неравенство (46), получим

$$I_1(q,r)=\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(\nu(\tau_{k+1}r)-\nu(\tau_k r))\le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)N\left(\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k}\right)\tau_k rV(\tau_k r)+\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\varepsilon(\tau_k r)\tau_k rV(\tau_k r)=$$
$$=I_3(q,r)+I_4(q,r)\,.$$

Выберем $q=q(r)$ так чтобы выполнялось неравенство $q(r)\ge 1+\sqrt{\varepsilon(\alpha r)}$. Пусть $M_2=\max(f(\alpha),f(\beta))$. Тогда для I_4 справедлива оценка

$$I_4(q(r),r)\le M_2\varepsilon(\alpha r)\beta rV(\beta r)n=M_2\beta\ln\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\varepsilon(\alpha r)}{\ln q(r)}rV(\beta r)\,.$$

Из полученной оценки следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{rV(r)}I_4(q(r),r)=0\,.$$

Утверждение теоремы очевидно, когда $N=+\infty$. Так как $N>-\infty$, то можно считать, что $N\in(-\infty,\infty)$. Пусть ε — произвольное строго положительное число. Тогда существует число $R=R(\varepsilon)$ такое, что при $r>R$ будет выполняться неравенство

$$N\left(\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k}\right)<(N+\varepsilon)\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k}\,.$$

Для таких r справедлива оценка:

$$I_3(q,r)\le r(N+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)V(\tau_k r)(\tau_{k+1}-\tau_k)=$$

$$=r(N+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k){\tau_k}^{\rho}(\tau_{k+1}-\tau_k)V(r)+$$

$$+r(N+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(V(\tau_k r)-{\tau_k}^{\rho}V(r))(\tau_{k+1}-\tau_k)=$$
$$=I_5(q,r)+I_6(q,r)\,.$$

Тогда

$$|I_6(q,r)\le(|N|+\varepsilon)r\max_k|V(\tau_k r)-\tau_k^{\rho}V(r)|\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(\tau_{k+1}-\tau_k)\,.$$

Так как

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)(\tau_{k+1}-\tau_k)=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\tau)\,d\tau\,,$$

$$\lim_{r\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k)\tau_k^{\rho}(\tau_{k+1}-\tau_k)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\tau^{\rho}f(\tau)\,d\tau\,,$$

$$\lim_{r\to\infty}\max_{k\in\overline{0,n-1}}\left|\frac{V(\tau_k r)}{V(r)}-\tau_k^{\rho}\right|=0\,,$$

то

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{rV(r)}I_6(q(r),r)=0\,,$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{rV(r)}I_5(q(r),r)=(N+\varepsilon)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\tau^{\rho}f(\tau)\,d\tau\,.$$

Из полученных оценок следует неравенство:

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{rV(r)}\int\limits_{\alpha r}^{\beta r} f\left(\frac{t}{r}\right)\,d\nu(t)\le N\int\limits_{\alpha}^{\beta}t^{\rho}f(t)\,dt\,.$$

Теорема доказана.

В следующей теореме мы получаем такое же неравенство при иных ограничениях на функцию $f(t)$ и меру ν. Однако, предварительно мы докажем одну лемму. Ее использование освобождает от необходимости накладывать дополнительные ограничения на функцию f, связанные с равномерностью некоторых пределов.

Lemma 3. *Пусть $\varphi(\alpha,r)$ — функция, определённая на множестве $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\times[1,\infty)$. Пусть для любого $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(\alpha,r)=0$. Пусть заданы последовательности $r_n\uparrow\infty$, $\alpha_n\downarrow 0$, $\alpha_n\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$, $\beta_n\downarrow 0$ $(n\to\infty)$ и число $q\in(0,1)$. Тогда существуют последовательность R_n, являющаяся подпоследовательностью последовательности r_n и функция $\alpha(r)$ такие, что*

1) $\lim\limits_{r\to\infty}\alpha(r)=0$,

2) $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(\alpha(r),r)=0$,

3) *функция $\alpha(r)$ постоянна на сегменте $[qR_n,R_n/q]$ и равна α_n, $|\varphi(\alpha(r),r)|\le\beta_n$ на этом сегменте.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует такое число t_n, что при $r\ge t_n$ будет выполняться неравенство $|\varphi(\alpha_n,r)|\le\beta_n$. Мы можем считать, что последовательность t_n строго возрастающая. Далее по индукции строим последовательности R_k, τ_k так, чтобы выполнялись соотношения:

1) R_k — есть одно из чисел r_n,

2) $\tau_k\ge t_k$,

3) $\left[qR_k,\dfrac{1}{q}R_k\right]\subset(\tau_k,\tau_{k+1})$.

Мы можем считать, что $r_1>t_1/q$. Возьмём $R_1=r_1$, $\tau_1=t_1$, $\tau_2=\max(t_2,2R_1/q)$. Тогда для этих элементов соотношения 1), 2), 3) выполняются. Пусть мы уже построили элементы R_1, R_2, …, R_n, τ_1, τ_2, …, τ_{n+1} так, чтобы для них выполнялись соотношения 1), 2), 3). Возьмём теперь m такое, чтобы выполнялось неравенство $qr_m>\tau_{n+1}$ и выберем $R_{n+1}=r_m$, $\tau_{n+2}{=}\max(t_{n+2},2R_{n+1}/q)$. Тогда для элементов R_1, R_2, …, R_{n+1}, τ_1, τ_2, …, τ_{n+2} соотношения 1), 2), 3) выполняются. Тем самым существование последовательностей R_k, τ_k со свойствами 1), 2), 3) доказано. Определим теперь на полуоси $[\tau_1,\infty)$ функцию $\alpha(r)$ соотношением $\alpha(r)=\alpha_n$ при $r\in[\tau_n,\tau_{n+1})$. Функция $\alpha(r)$ обладает всеми нужными свойствами.

Лемма доказана.

Теорема 23. *Пусть $f(t)$ — положительная непрерывная функция на сегменте $[\alpha,\beta]$, $0<\alpha<\beta<\infty$, $\rho(r)$ — уточнённый порядок, ν — мера на полуоси $[0,\infty)$, $\nu(r)=\nu([0,r])$, $|\nu(r)|\le M_3V(r)$. Пусть одна из жордановых компонент ν_+, ν_- меры ν абсолютно непрерывна и её плотность не превышает $M_4V(r)$. Пусть*

$$N(b)=\limsup_{r\to\infty}\frac{\nu(r+br)-\nu(r)}{)}rV(r)\,.$$

Тогда существует предел

$$N=\lim_{b\to+0}\frac{N(b)}{b}\,, \tag{47}$$

и выполняется неравенство

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{rV(r)}\int\limits_{\alpha r}^{\beta r}f\left(\frac{t}{r}\right)\,d\nu(t)\le N\int\limits_{\alpha}^{\beta}t^{\rho}f(t)\,dt\,.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует такая константа A, что мера $d\nu_1(t)=d\nu(t)+AV(t)\,dt$ будет знакопостоянной. Теперь из теоремы 21 следует, что достаточно доказывать теорему в предположении, что мера ν знакопостоянная. В дальнейшем будем считать, что это предположение выполнено. В этом случае функция $N(b)$ будет монотонной и по теореме 7 существует предел (47). Так как $N(b)$ конечная величина, то из той же теоремы следует, что $N>-\infty$. Если $N=+\infty$, то утверждение теоремы очевидно. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $N\in(-\infty,\infty)$. Обозначим

$$\varphi(b,r)=\frac{1}{b}\left(\frac{\nu(r+br)-\nu(r)}{rV(r)}-N(b)\right)^{+}\,.$$

Тогда из определения $N(b)$ следует, что для каждого $b\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(b,r)=0$, причем

$$\nu(r+br)-\nu(r)\le(N(b)+b\,\varphi(b,r))rV(r).$$

Пусть r_n, $\lim\limits_{n\to i}r_n=\infty$, такая последовательность, что

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{1}{rV(r)}\int\limits_{\alpha r}^{\beta r}f\left(\frac{t}{r}\right)\,d\nu(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_nV(r_n)}\int\limits_{\alpha r_n}^{\beta r_n}f\left(\frac{t}{r_n}\right)\,d\nu(t)\,.$$

Пусть

$$s\in\left(0,\min\left(\alpha,\frac{1}{\beta}\right)\right),\quad \alpha_n=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/n}-1,\quad \beta_n=\frac{1}{n}\,.$$

По лемме 3 существуют функция $b(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty}b(r)=0$, и последовательность R_n, являющаяся подпоследовательностью последовательности r_n, такие, что на сегменте $\left[sR_n,\dfrac{R_n}{s}\right]$ выполняются соотношения $b(r)=\alpha_n$, $\varphi(b(r),r)<1/n$.

Пусть $q=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/n}$, $\tau_0=\alpha$, $\tau_1=q\alpha$, $\dots$, $\tau_n=q^n\alpha=\beta$. Мы имеем

$$\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k}=\alpha_n\,,$$

$$\nu(\tau_{k+1}R_n) - \nu(\tau_k R_n) = \nu(\tau_k R_n + \alpha_n \tau_k R_n) - \nu(\tau_k R_n) \le$$
$$\le \left(N\left(\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k}\right) + \frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k}\varphi(\alpha_n, \tau_k R_n)\right)\tau_k R_n V(\tau_k R_n)\,,$$
$$\varphi(\alpha_n, \tau_k R_n) = \varphi(b(\tau_k R_n), \tau_k R_n) < 1/n\,.$$

Далее
$$I(R_n) = \int\limits_{(\alpha R_n, \beta R_n]} f\left(\frac{t}{R_n}\right)\, d\nu(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \int\limits_{(\tau_k R_n, \tau_{k+1} R_n]} f\left(\frac{t}{R_n}\right)\, d\nu(t)\,.$$

По первой теореме о среднем значении существуют точки $\xi_k \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ такие, что выполняется равенство
$$I(R_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(\nu(\tau_{k+1}R_n) - \nu(\tau_k R_n))\,.$$

Поэтому
$$I(R_n) \le \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) N\left(\frac{\tau_{k+1}-\tau_k}{\tau_k}\right)\tau_k R_n V(\tau_k R_n) +$$
$$+\frac{R_n}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(\tau_{k+1}-\tau_k)V(bR_n) = I_1(R_n) + I_2(R_n)\,.$$

Для величины $I_2(R_n)$ справедливо соотношение
$$\lim_{n\to i}\frac{1}{R_n V(R_n)} I_2(R_n) = 0\,.$$

Далее нужно повторить соответствующие рассуждения из теоремы 22.

Теорема доказана.

8. Заключение

Важными характеристиками функции конечного порядка является её порядок и тип. Более тонкой характеристикой является функция плотности. Условия равномерности в предельных соотношениях есть важное свойство, которое часто бывает необходимым при использовании функций плотности. Оказывается, что условия равномерности обеспечиваются не очень ограничительным условием измеримости функции f. В работе [20] впервые условия равномерности в предельных соотношениях были выведены из условия измеримости. Теорема 2 является новой теоремой такого типа. В теоремах 12 — 17 мы используем функции плотности функции f для получения различных оценок самой функции f. У нас функции плотности являются ρ-полуаддитивными функциями. В данной статье мы развиваем общую теорию ρ-поллуаддитивных функций, которая во многом параллельна теории аддитивных функций, которая достаточно полно представлена в [15]. Важнейшей характеристикой полуаддитивной функции является её производная в нуле. Важным результатом этой статьи является предъяление в теореме 6 условий, обеспечивающих существование такой производной. Эта теорема является новой и для случая полуаддитивных функций. В статье находятся и другие условия обеспечивающие существование такой производной. Однако, в отличие от условий теоремы 6, они пока не нашли применений. Если данная поллуаддитивная функция является функцией плотности некоторой функции $f(r)$, то незначительные ограничения на f, такие, как измеримость и ограниченность на сегментах, ведут к важным свойствам функций плотности, которых нет у общих полуаддитивных функций. В конце статьи полученные результаты используются для доказательства оценок интегралов

$$\int_a^b f(t)\,d\nu(tr)$$

при различных ограничениях на функции f и ν. Важно отметить что не всегда требуется, чтобы функция ν была ограниченной вариации, а в этом случае написанный интеграл нельзя трактовать как интеграл Лебега. Эти теоремы интересны сами по себе и находят применения во второй части нашего исследования.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азарин В. С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций // Матем. сб. 1979. Т. 108, № 2. С. 147–167.

2. Говоров Н. В. Об индикаторе функций нецелого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 3. С. 495–498.

3. Говоров Н. В. Об индикаторе функций целого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости // Докл. АН СССР. 1967. Т. 172, № 4. С. 763–766.

4. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций. I // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". 1968. Вып. 6. С. 3–29.

5. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций. II // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". 1968. Вып. 7. С. 59–84.

6. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций. III // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". 1969. Вып. 8. С. 126–135.

7. Гришин А. Ф. Непрерывность и асимтотическая непрерывность субгармонических функций. I // Матем. физика, анализ, геом. 1994. Т. 1, № 2. С. 193–215.

8. Гришин А. Ф. Непрерывность и асимтотическая непрерывность субгармонических функций. II // Матем. физика, анализ, геом. 1995. Т. 2, № 2. С. 177–193.

9. Гришин А. Ф., Малютина Т. И. Об уточнённом порядке // Комплексный анализ и математическая физика. Красноярск: "Издательский центр Красноярского госуниверситета". 1998. С. 10–24.

10. Кондратюк А. А. Целые функции с положительными нулями, имеющими конечную максимальную плотность // Респ. сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения". 1968. Вып. 7. С. 37–52.

11. Левин Б. Я. О росте целой функции по лучу и о распределении ее нулей по аргументам // Матем. сб. 1937. Т. 2(44), № 6. С. 1097–1142.

12. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.

13. Малютин К. Г. Ряды Фурье и δ-субгармонические функции конечного γ-типа в полуплоскости // Матем. сб. 2001, Т. 192, № 6. С. 51–70.

14. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 142 с.

15. Хилле Е., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд. иностр. литер., 1962. 830 с.

16. Bingham N. H., Goldie C. M., Tengels J. L. Regular Variation. Cambridge University Press, 1985. 224 p.

17. Fedorov M. A., Grishin A. F. Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 1998. Vol 1, No 3. P. 1–49.

18. de Haan L. On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes. Amsterdam: Math.Centre Tracts,1970, No. 32.

19. Hengartner W., Theodorescu R. Concentration functions. London: Academic Press, 1973. 374 p.

20. Korevaar H., van Aardenne-Ehrenfest T., de Breijn N. G. A note on slowly oscillating functions // Niew. Arch. Wisk. 1949. No 23. P. 77–86.

21. Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen. I // Comm. Math. Helv. 1938. Vol. 11. P. 180–213.

22. Pfluger A. Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen. II // Comm. Math. Helv. 1939. Vol. 12. P. 25–69.

23. Polya G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // Math. Zeit. 1929. Vol. 29. P. 549–640.

24. Steinhaus H. Sur les distances des points de mesure positive // Fund. Math. 1949. No 1. P. 93–104.

REFERENCES

1. Azarin, V. S. 1980, "On the asymptotic behavior of subharmonic functions of finite order", *Math. USSR-Sb.*, vol. 36, no. 2, pp. 135–154.

2. Govorov, N. V. 1965, "On the indicator of functions of non-integer order, analytic and completely regular growth in the half-plane", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 162, no. 3, pp. 495–498.

3. Govorov, N. V. 1967, "On the indicator of functions of integer order, analytic and completely regular growth in the half-plane", *Doklady Akademii nauk SSSR*, vol. 172, no. 4, pp. 763–766.

4. Grishin, A. F. 1968, "On regularity of the growth of subharmonic functions. I", *Teor. funktsii, funkts. analiz i ih pril.*, vol. 6, pp. 3–29.

5. Grishin A. F. 1968., "On regularity of the growth of subharmonic functions. II", *Teor. funktsii, funkts. analiz i ih pril.*, vol. 7, pp. 59–84.

6. Grishin, A. F. 1969, "On regularity of the growth of subharmonic functions. III", *Teor. funktsii, funkts. analiz i ih pril.*, vol. 8, pp. 126–135.

7. Grishin, A. F. 1994, "Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions. I", *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, vol. 1, no 2, pp. 193–215.

8. Grishin, A. F. 1995, "Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions. II", *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, vol. 2, no 2, pp. 177–193.

9. Grishin, A. F. & Malyutina, T. I. 1998, "On the proximate order", *Complex analysis and mathematical physics. Krasnoyarsk: "The Publishing Center of the Krasnoyarsk State University"*, pp. 10–24.

10. Kondratyuk A. A. 1968, "Entire functions with positive zeros having a finite maximum density", *Teor. funktsii, funkts. analiz i ih pril.*, vol. 7, pp. 37–52.

11. Levin, B. Ya. 1937, "On the growth of an entire function along a ray, and the distribution of its zeros with respect to their arguments", *Math. USSR-Sb.*, vol. 2(44), no. 6, pp. 1097–1142.

12. Levin, B. Ya. 1980, *Distribution of zeros of entire functions.* Providence, RI: Amer. Math. Soc.

13. Malyutin, K. G. 2001, "Fourier series and δ-subharmonic functions of finite γ-type in a half-plane", *Sb. Math.*, vol. 192, no 6, pp. 843–861.

14. Seneta, E. 1976, *Regularly Varying Functions.* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York.

15. Hille, E. & Phillips, R. S. 1957, *Functional Analysis and Semi-groups.* Providence, RI: Amer. Math. Soc.

16. Bingham, N. H., Goldie, C. M. & Tengels J. L. 1985, *Regular Variation.* Cambridge University Press.

17. Fedorov, M. A. & Grishin, A. F. 1998, "Some Questions of the Nevanlinna Theory for the Complex Half-Plane", *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*, vol. 1, no. 3, pp. 1–49.

18. de Haan, L. 1970, *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes.* Math.Centre Tracts, No. 32, Amsterdam.

19. Hengartner, W. & Theodorescu, R. 1973, *Concentration functions.* Academic Press, London.

20. Korevaar, H., van Aardenne-Ehrenfest, T. &de Breijn N. G. 1949, "A note on slowly oscillating functions", *Niew. Arch. Wisk.*, no 23, pp. 77–86.

21. Pfluger, A. 1938, "Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen I", *Comm. Math. Helv.*, vol. 11, pp. 180–213.

22. Pfluger, A. 1939, "Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Functionen II", *Comm. Math. Helv.*, vol. 12, pp. 25–69.

23. Polya, G. 1929, "Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen", *Math. Zeit.*, vol. 29, pp. 549–640.

24. Steinhaus, H. 1949, "Sur les distances des points de mesure positive", *Fund. Math.*, no 1, pp. 93–104.

Получено 05.05.2018
Принято в печать 17.08.2018