ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-123-141

О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел[1]

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственного университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Калинина Алина Олеговна — студентка механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: kalininaalina2008@rambler.ru
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Геофизического центр РАН.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе исследуется вопрос о числе простых элементов в моноиде $M_{q,1}$, состоящем из натуральных чисел сравнимых с 1 по модулю q. При $q > 2$ моноид $M_{q,1}$ не является моноидом с однозначным разложением на простые элементы, так как наряду с обычными простыми числами, которые сравнимы с 1 по модулю q, в число простых элементов попадают псевдопростые числа, которые являются составными числами. Случай $q = 3, 4, 6$ выделяется из числа других тем, что псевдопростые числа являются произведением двух простых чисел сравнимых с $q-1$ по модулю q. Таким образом, для множества простых элементов $P(M_{q,1})$ моноида $M_{q,1}$ в этом случае справедливо равенство $P(M_{q,1}) = \mathbb{P}_{q,1} \bigcup (\mathbb{P}_{q,q-1} \cdot \mathbb{P}_{q,q-1})$.

Так как моноид $M_{q,1}$ не имеет однозначности разложения на простые элементы, то дзета-функция

$$\zeta(M_{q,1}|\alpha) = \sum_{n \in M_{q,1}} \frac{1}{n^\alpha}$$

моноида $M_{q,1}$ не равна эйлерову произведению

$$P(M_{q,1}|\alpha) = \prod_{r \in P(M_{q,1})} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1}.$$

Поэтому, изучение распределения простых элементов в моноиде $M_{q,1}$ с помощью аналитических свойств логарифмической производной дзета-функции моноида не представляется возможным.

Для полноты изложения сначала в работе изучается вопрос о количестве составных чисел, равных произведению двух простых чисел, с помощью неравенств Чебышёва, так

[1] Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

как в этом году исполнилось 170 лет со дня выхода первого мемуара П. Л. Чебышёва о простых числах.

Затем с помощью неравенства Бруна-Титчмарша получена верхняя оценка количества составных чисел сравнимых с 1 по модулю q и равных произведению двух простых чисел.

Подход, применённый к общему случаю, затем переносится на случай простых элементов в моноидах $M_{q,1}$ при $q = 3, 4, 6$.

В заключение рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Н. Н. Добровольский, А. О. Калинина, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 123–141.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 2

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-123-141

On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate Professor of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry of Tula state pedagogical University. L. N. Tolstoy.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

In this paper we study the number of prime elements in the monoid $M_{q,1}$ consisting of natural numbers comparable to 1 modulo q. For $q > 2$, the monoid $M_{q,1}$ is not a monoid with a unique decomposition into prime elements, since along with ordinary primes that are comparable to 1 modulo q, pseudo-primes that are composite numbers fall into the number of prime elements. The case $q = 3, 4, 6$ is distinguished from the others by the fact that pseudo-primes are the product of two primes comparable to $q-1$ modulo q. Thus, in this case for the set of prime elements $P(M_{q,1})$ of monoid $M_{q,1}$ the equality $P(M_{q,1}) = \mathbb{P}_{q,1} \bigcup (\mathbb{P}_{q,q-1} \cdot \mathbb{P}_{q,q-1})$ is true.

Since the monoid $M_{q,1}$ does not have the uniqueness of decomposition into prime elements, then the Zeta-function

$$\zeta(M_{q,1}|\alpha) = \sum_{n \in M_{q,1}} \frac{1}{n^\alpha}$$

of the monoid $M_{q,1}$ is not equal to the Euler product

$$P(M_{q,1}|\alpha) = \prod_{r \in P(M_{q,1})} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1}.$$

Therefore, it is not possible to study the distribution of prime elements in the monoid $M_{q,1}$ using the analytical properties of the logarithmic derivative of the zeta function of the monoid.

For completeness, the paper first studies the question of the number of composite numbers equal to the product of two primes using Chebyshev's inequalities, since this year marks the 170th anniversary of the release of the first memoir of P. L. Chebyshev about primes.

Then, using the Brun-Titchmarsh inequality, we obtain an upper bound on the number of composite numbers comparable to 1 modulo q and equal to the product of two primes.

The approach applied to the general case is then transferred to the case of prime elements in monoids $M_{q,1}$ with $q = 3, 4, 6$.

In conclusion, topical problems with zeta-functions of monoids of natural numbers that require further investigation are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of monoid of natural numbers, Euler product.

Bibliography: 16 titles.

For citation:

N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.

1. Введение

В работах [6], [7] начато исследование дзета-функций мультипликативных моноидов натуральных чисел. При изучении моноидов натуральных чисел существенную роль играют простые элементы моноида. Если M — произвольный моноид натуральных чисел, то $P(M)$ — множество его простых элементов состоит из тех элементов моноида M отличных от единицы, которые нельзя представить в виде произведения других неединичных элементов моноида M. Таким образом, если простое число $p \in M$, то $p \in P(M)$, но, вообще говоря, не все элементы из $P(M)$ являются простыми числами. В $P(M)$ могут входить и псевдопростые числа. Элемент q из M, являющийся составным числом, будет псевдопростым числом в M, если ни один его собственный делитель не является элементом из M.

В работе [7] дано описание общего вида моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы. В случае произвольного моноида M натуральных чисел общий вид $P(M)$ множества его простых элементов очень просто описать. А именно, $P(M)$ является максимальным множеством элементов из M таким, что ни один элемент из $P(M)$ не делится ни на какой другой элемент из $P(M)$. Через $\pi_M(x)$ будем обозначать количество простых элементов в моноиде M, не превосходящих x.

Так как множество простых элементов $P(M)$ может содержать псевдопростые числа, то можно определить порядок простого элемента $q \in P(M)$ как величину $V(q)$ — общее число простых делителей числа q с учетом их кратности.

Таким образом, простые числа p из $P(M)$ выделяются среди всех простых элементов q, как те, у которых порядок равен 1.

Как указывает К. Холли в своей монографии [12]: "Современный метод решета разрабатывается в надежде на то, что он сможет привести к доказательству гипотезы Гольдбаха и других подобных важных гипотез в теории чисел ... метод оказался полезным при изучении проблем, в которых простые числа заменяются числами с ограниченным количеством простых делителей." Таким образом, случай псевдопростых чисел разумно изучать с помощью методов решета.

"Метод решета традиционно ассоциируется с Эратосфеном. Ему принадлежит способ определения простых чисел между $\sqrt{x}$ и x посредством вычеркивания из ряда натуральных чисел, не превосходящих x, всех тех, простые делители которых не превосходят $\sqrt{x}$. Способ Эратосфена обладает отличительной чертой метода решета, который связан с пересчетом числа элементов множества, не обладающих определенными предписанными свойствами. Метод решета прежде всего является процессом исключения." [2]

Естественно, что решето Эратосфена применимо для любого моноида M натуральных чисел. Действительно, если нам известно множество простых элементов $P(M,\sqrt{x})$, не превосходящих $\sqrt{x}$, то для нахождения $P(M,x)$ достаточно в множестве $A(M,\sqrt{x},x)$ всех чисел моноида M, больших $\sqrt{x}$ и не превосходящих x, вычеркнуть все числа кратные простым элементам из $P(M,\sqrt{x})$. Оставшиеся числа необходимо добавить к множеству $P(M,\sqrt{x})$ для получения множества $P(M,x)$.

Будем через $\mathbb{P}_{3,1}$ и $\mathbb{P}_{3,2}$ обозначать множество всех простых чисел вида $3n+1$ и $3n+2$, соответственно. Таким образом, мы имеем:

$$\mathbb{P}_{3,1}=\{7,13,19,31,37,43,61,67,73,79,97,\ldots\},$$
$$\mathbb{P}_{3,2}=\{2,5,11,17,23,29,41,47,53,59,71,83,89,\ldots\}$$

и согласно теореме Дирихле о простых в арифметической прогрессии множества простых $\mathbb{P}_{3,1}$ и $\mathbb{P}_{3,2}$ — бесконечные множества, объединение которых исчерпывает все множество простых за исключением числа 3.

Если через $\mathbb{P}_{6,1}$ и $\mathbb{P}_{6,5}$ обозначать множество всех простых чисел вида $6n+1$ и $6n+5$, соответственно, то:

$$\mathbb{P}_{6,1}=\{7,13,19,31,37,43,61,67,73,79,97,\ldots\}=\mathbb{P}_{3,1},$$
$$\mathbb{P}_{6,5}=\{5,11,17,23,29,41,47,53,59,71,83,89,\ldots\}=\mathbb{P}_{3,2}\setminus\{2\}$$

и объединение этих множеств исчерпывает все множество простых за исключением чисел 2 и 3.

Аналогично, рассмотрим множества $\mathbb{P}_{4,1}$ и $\mathbb{P}_{4,3}$ всех простых чисел вида $4n+1$ и $4n+3$, соответственно. Таким образом, мы имеем:

$$\mathbb{P}_{4,1}=\{5,13,17,29,37,41,53,61,73,89,97,\ldots\},$$
$$\mathbb{P}_{4,3}=\{3,7,11,19,23,31,43,47,59,67,71,79,83,\ldots\}$$

и объединение этих множеств исчерпывает все множество простых чисел за исключением числа 2.

Рассмотрим мультипликативные функции $\chi_{3,1}(n)$ и $\chi_{3,2}(n)$, заданные равенствами

$$\chi_{3,1}(n)=\begin{cases}1, & \text{при } n=p^\alpha,\ p=3m+1,\ \alpha\geqslant 0,\\ 0, & \text{при } n=p^\alpha,\ p=3,3m+2,\ \alpha\geqslant 1,\\ \prod_{p|n}\chi_{3,1}(p^{\alpha_p}), & \text{при } \ n=\prod_{p|n}p^{\alpha_p};\end{cases}$$

.

$$\chi_{3,2}(n)=\begin{cases}1, & \text{при } n=p^\alpha,\ p=3m+2,\ \alpha\geqslant 0,\\ 0, & \text{при } n=p^\alpha,\ p=3,3m+1,\ \alpha\geqslant 1,\\ \prod_{p|n}\chi_{3,2}(p^{\alpha_p}), & \text{при } \ n=\prod_{p|n}p^{\alpha_p}.\end{cases}$$

.

Основными объектами исследования в данной работе будут моноиды $M_{3,1}$, $M_{3,1,1}$, $M_{3,1,2}$, $M_{3,2}$ и множества $M_{3,1,2,0}$, $\mathbb{N}_{3,2}$ и $\mathbb{N}_{3,2,2}$, заданные равенствами

$$\mathbb{N}_{3,1}=M_{3,1}=\{n=3k+1|k\geqslant 0\},\quad M_{3,1,1}=\{n=3k+1|\chi_{3,1}(n)=1\}, \tag{1}$$

$$M_{3,1,2}=\{n=3k+1|\chi_{3,2}(n)=1\},\quad M_{3,1,2,0}=\{n\in M_{3,1,2}|n\neq p^\alpha\}, \tag{2}$$

$$M_{3,2}=\{n|\chi_{3,2}(n)=1\},\quad \mathbb{N}_{3,2}=\{n=3k+2|k\geqslant 0\},\quad \mathbb{N}_{3,2,2}=\{n=3k+2|k\geqslant 0,\chi_{3,2}(n)=1\}. \tag{3}$$

[2]См. [12], стр. 11.

Ясно, что имеются равенства моноидов: $M_{3,1} = M_{3,1,1} \cdot M_{3,1,2}$, $M_{3,2} = M_{3,1,2} \bigcup \mathbb{N}_{3,2,2}$. Кроме этого, справедливы тождества для множеств $\mathbb{N}_{3,2}$ и $\mathbb{N}_{3,2,2}$:

$$\mathbb{N}_{3,2} = M_{3,1} \cdot \mathbb{P}_{3,2} = M_{3,1,1} \cdot M_{3,1,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2}, \quad \mathbb{N}_{3,2,2} = M_{3,1,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2}. \tag{4}$$

Если через A^n обозначать произведение числовых множеств $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ из n сомножителей, которое состоит из всевозможных произведений $a_1 a_2 \ldots a_n$ чисел из A, то можно записать равенства:

$$M_{3,1,1} = \{1\} \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{3,1}^n, \quad M_{3,2} = \{1\} \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{3,2}^n, \quad M_{3,1,2} = \{1\} \bigcup \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{3,2}^{2n}, \quad \mathbb{N}_{3,2} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_{3,2}^{2n+1}.$$

Нетрудно описать $P(M)$ — множество простых элементов для этих моноидов.

$$P(M_{3,1,1}) = \mathbb{P}_{3,1}, \quad P(M_{3,2}) = \mathbb{P}_{3,2}.$$

$P(M_{3,1,2}) = \mathbb{P}_{3,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2}$ и состоит из псевдопростых чисел вида $p_1 p_2$, где p_1, p_2 — произвольные простые числа вида $3m + 2$. В частности, в это множество псевдопростых чисел входят квадраты простых.

Множество простых элементов $P(M_{3,1,2,0})$ состоит из псевдопростых чисел вида $p_1 p_2$, где p_1, p_2 — произвольные различные простые числа вида $3m + 2$.

Таким образом, $P(M_{3,1,2,0}) \subset P(M_{3,1,2})$ и в $P(M_{3,1,2,0})$ не входят квадраты простых.

Ясно, что $P(M_{3,1}) = \mathbb{P}_{3,1} \bigcup (\mathbb{P}_{3,2} \cdot \mathbb{P}_{3,2})$.

Обозначим через $\zeta(M|\alpha)$ дзета-функцию моноида M:

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n \in M} \frac{1}{n^\alpha},$$

а через $P(M|\alpha)$ эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r \in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^\alpha}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

В частности,

$$\zeta(M_{3,1,1}|\alpha) = P(M_{3,1,1}|\alpha).$$

Будем называть каноническим разложением элемента x из мультипликативного моноида M натуральных чисел представление вида

$$x = r_1^{\alpha_1} \ldots r_k^{\alpha_k}, \quad 1 < r_1 < \ldots < r_k, \quad r_1, \ldots, r_k \in P(M).$$

Через $k(x)$ будем обозначать количество различных канонических представлений числа x, тогда эйлерово произведение $P(M|\alpha)$ будет раскладываться в следующий ряд Дирихле

$$P(M|\alpha) = \sum_{x \in M} \frac{k(x)}{x^\alpha}.$$

Таким образом, равенство эйлерова произведения и дзета-функции моноида M равносильно однозначности разложения на простые элементы в этом моноиде.

Так как в моноиде $M_{3,1,2}$ нет однозначности разложения на простые элементы, то

$$\zeta(M_{3,1,2}|\alpha) \neq P(M_{3,1,2}|\alpha).$$

Ясно, что аналогичные утверждения справедливы для моноидов $M_{6,1}$, $M_{6,1,1}$, $M_{4,1}$ и $M_{4,1,1}$.

Моноиды $M_{3,1}$, $M_{4,1}$ и $M_{6,1}$ выделяются из множества всевозможных моноидов $M_{q,1}$ тем, что только для этих моноидов множество простых элементов состоит из множества простых чисел $\mathbb{P}_{q,1}$ и множества псевдопростых чисел второго порядка $\mathbb{P}^2_{q,q-1}$.

Цель данной статьи — изучить свойства функции распределения простых элементов $\pi_{M_{q,1}}(x)$ для $q = 3, 4, 6$.

В данной работе для полноты изложения будут получены оценки для:

- количества натуральны чисел N таких что, $N < x$, $N = p_1p_2$, где p_1, p_2 — простые числа (для определенности $p_1 \leqslant p_2$). Обозначим количество таких натуральных чисел через $\pi_2(x)$.

- количества натуральны чисел N таких что,

$$N < x, \quad N \equiv 1 \pmod{q}, \quad N = p_1p_2,$$

  где p_1, p_2 — простые числа (для определенности $p_1 \leqslant p_2$). Обозначим количество таких натуральных чисел через $\pi_2(x, q)$.

- функции распределения $\pi_{M_{q,1}}(x)$ при $q = 3, 4, 6$.

2. Общие формулы для числа составных с двумя делителями

Прежде всего выразим $\pi_2(x)$ число натуральных N таких что,

$$N < x, \quad N = p_1p_2,$$

где p_1, p_2 — простые числа, через функцию $\pi(x)$.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\pi_2(x) = \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \pi(p) + \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant \frac{x}{2}} \pi\left(\frac{x}{p}\right).$$

Доказательство. Действительно, если $p_2 \leqslant x$, $N = p_1p_2 \leqslant x$ и $p_1 \leqslant p_2$, то $p_1 \leqslant \min\left(p_2, \frac{x}{p_2}\right)$ и $p_2 \leqslant \frac{x}{2}$.

Отсюда следует, что

$$\pi_2(x) = \sum_{p_2 \leqslant \sqrt{x}} \sum_{p_1 \leqslant p_2} 1 + \sum_{\sqrt{x} < p_2 \leqslant \frac{x}{2}} \sum_{p_1 \leqslant \frac{x}{p_2}} 1.$$

Первая внутренняя сумма равна $\pi(p_2)$, а вторая — $\pi\left(\frac{x}{p}\right)$. Поэтому, полагая $p = p_2$ и разбивая сумму по p на две суммы: $p \leqslant \sqrt{x}$ и $\sqrt{x} < p \leqslant \frac{x}{2}$, получим утверждение леммы. $\square$

Можно получить и другое выражение $\pi_2(x)$ через $\pi(x)$.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\pi_2(x)=\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\pi\left(\frac{x}{p}\right)-\pi(p-1)\right).$$

Доказательство. Действительно, $p_1 \leqslant \sqrt{x}$ и $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \frac{x}{p_1}$. Так как количество p_2, удовлетворяющих этим условиям, равно $\pi\left(\frac{x}{p_1}\right)-\pi(p_1-1)$, то лемма доказана. □

Замечание 1. *Фактически лемма 2 использует идею Дирихле, которая позволяет в проблеме делителей использовать короткую сумму длиной $\sqrt{x}$ вместо суммы длиной x. Эти же соображения используются в леммах 4 и 5.*

Количество натуральных чисел N таких что p_1, p_2 — различные простые числа будем обозначать через $\pi_{2,0}(x,q)$. Таким образом величины $\pi_2(x,q)$ и $\pi_{2,0}(x,q)$ отличаются не более чем на количество квадратов простых, не превосходящих x. Отсюда следует, что

$$\pi_2(x,q)\leqslant\pi_{2,0}(x,q)+\pi(\sqrt{x})=\pi_{2,0}(x,q)+O\left(\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\right). \tag{5}$$

Нетрудно найти выражение для $\pi_2(x,q)$. Для этого нам потребуются обозначение $\pi(x,a,q)$ — количество простых чисел p, не превосходящих x, для которых $p\equiv a \pmod q$. Кроме того, будем полагать a^* — обратное натуральное число по $\mod q$ к натуральному числу a. Таким образом, если $1\leqslant a\leqslant q-1$, $(a,q)=1$, то $1\leqslant a^*\leqslant q-1$ и $aa^*\equiv 1 \pmod q$.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\pi_2(x,q)=\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,\,(a,q)=1}\left(\sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv a \pmod q}\pi(p,a^*,q)+\sum_{\sqrt{x}<p\leqslant x,\,p\equiv a \pmod q}\pi\left(\frac{x}{p},a^*,q\right)\right).$$

Доказательство. Действительно, если

$$p_2\leqslant x,\quad p_2\equiv a \pmod q,\quad N=p_1p_2\equiv 1 \pmod q$$

и $p_1\leqslant p_2$, то $p_1\equiv a^* \pmod q$ и $p_1\leqslant\min\left(p_2,\frac{x}{p_2}\right)$.

Отсюда следует, что

$$\pi_2(x,q)=\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,\,(a,q)=1}\ \sum_{p_2\leqslant\sqrt{x},\,p_2\equiv a \pmod q}\ \sum_{p_1\leqslant\min\left(p_2,\frac{x}{p_2}\right),\,p_1\equiv a^* \pmod q}1.$$

Внутренняя сумма равна $\pi\left(\min\left(p_2,\frac{x}{p_2}\right),a^*,q\right)$, поэтому, полагая $p=p_2$ и разбивая сумму по p на две суммы: $p\leqslant\sqrt{x}$ и $\sqrt{x}<p\leqslant x$, получим утверждение леммы.
□

Докажем лемму аналогичную лемме 2 только для $\pi_2(x,q)$.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$\pi_2(x,q)=\sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,\,(a,q)=1}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,p\equiv a \pmod q}\left(\pi\left(\frac{x}{p},a^*,q\right)-\pi(p-1,a^*,q)\right).$$

Доказательство. Действительно, для $p_1 \equiv a \pmod q$ с $p_1 \leqslant \sqrt{x}$ имеем

$$p_2 \equiv a^* \pmod q \quad \text{и } p_1 \leqslant p_2 \leqslant \frac{x}{p_1}.$$

Так как количество p_2, удовлетворяющих этим условиям, равно $\pi\left(\frac{x}{p_1}, a^*, q\right) - \pi(p_1 - 1, a^*, q)$, то лемма доказана. □

Наконец, выразим $\pi_{M_{q,1}}(x)$ при $q = 3, 4, 6$ через $\pi(x, 1, q)$ и $\pi_2(x, q-1, q)$, где $\pi_2(x, q-1, q)$ количество натуральных N таких что,

$$N \equiv 1 \pmod q, \quad N < x, \quad N = p_1 p_2,$$

где $p_1, p_2 \equiv q - 1 \pmod q$ — простые числа.

Лемма 5. *При $q = 3, 4, 6$ справедливо равенство*

$$\pi_{M_{q,1}}(x) = \pi(x, 1, q) + \sum_{p \leqslant \sqrt{x},\, p \equiv q-1 \pmod q} \left(\pi\left(\frac{x}{p}, q-1, q\right) - \pi(p-1, q-1, q)\right).$$

Доказательство. Действительно, при $q = 3, 4, 6$ имеем $P(M_{q,1}) = \mathbb{P}_{q,1} \bigcup \mathbb{P}_{q,q-1} \cdot \mathbb{P}_{q,q-1}$. Отсюда и из леммы 4 следует утверждение доказываемой леммы, так как слагаемое, соответствующее $a = 1$, отсутствует и $(q-1)^* = q - 1$. □

3. Исторические замечания

24 мая 1848 г. П. Л. Чебышёв представил в Санкт-Петербургскую Академию наук мемуар "Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины" (Полн. собр. соч., т. I, с. 173–190). Таким образом, в этом году исполнилось 170 лет со дня выхода этой принципиальной работы, с которой началась современная теория распределения простых чисел.

Во втором мемуаре он доказал оценки

$$(0,92\ldots)\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant (1,105\ldots)\frac{x}{\ln x}.$$

Обозначим через $c_1 = 0,92\ldots$ и $c_2 = 1,105\ldots$ константы из неравенств Чебышёва для функции $\pi(x)$. Заметим, что конечная разность $\Delta\pi(n) = \pi(n) - \pi(n-1)$ является на множестве натуральных чисел характеристической функцией множества простых чисел.

Положим $x_1 = [\sqrt{x}]$, $x_2 = \left[\frac{x}{2}\right]$ и

$$S_1(x) = \sum_{n=2}^{x_1} \frac{n}{\ln n}\Delta\pi(n), \quad S_2(x) = \sum_{n=x_1+1}^{x_2} \frac{\frac{x}{n}}{\ln\frac{x}{n}}\Delta\pi(n).$$

Лемма 6. *Для $\pi_2(x)$ справедливы неравенства:*

$$c_1(S_1(x) + S_2(x)) \leqslant \pi_2(x) \leqslant c_2(S_1(x) + S_2(x)). \tag{6}$$

Доказательство. Пользуясь леммой 1 и неравенствами Чебышёва, получим

$$\pi_2(x) \leqslant c_2 \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \frac{p}{\ln p} + c_2 \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant \frac{x}{2}} \frac{\frac{x}{p}}{\ln\frac{x}{p}} = c_2 \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{n}{\ln n}\Delta\pi(n) + c_2 \sum_{\sqrt{x} < n \leqslant \frac{x}{2}} \frac{\frac{x}{n}}{\ln\frac{x}{n}}\Delta\pi(n);$$

$$\pi_2(x) \geqslant c_1 \sum_{p \leqslant \sqrt{x}} \frac{p}{\ln p} + c_1 \sum_{\sqrt{x} < p \leqslant \frac{x}{2}} \frac{\frac{x}{p}}{\ln\frac{x}{p}} = c_1 \sum_{n \leqslant \sqrt{x}} \frac{n}{\ln n}\Delta\pi(n) + c_1 \sum_{\sqrt{x} < n \leqslant \frac{x}{2}} \frac{\frac{x}{n}}{\ln\frac{x}{n}}\Delta\pi(n),$$

что доказывает утверждение леммы. □

Лемма 7. *Справедливо неравенство*

$$S_1(x) < c_2\frac{4x}{\ln^2 x} + 1.$$

Доказательство. Действительно, имеем:

$$S_1(x) = \sum_{n=2}^{x_1}\frac{n}{\ln n}\Delta\pi(n) = \sum_{n=2}^{x_1}\frac{n}{\ln n}(\pi(n) - \pi(n-1)) =$$

$$= \frac{x_1}{\ln x_1}\pi(x_1) + \sum_{n=2}^{x_1-1}\frac{n}{\ln n}\pi(n) - \sum_{n=1}^{x_1-1}\frac{n+1}{\ln(n+1)}\pi(n) =$$

$$= \frac{x_1}{\ln x_1}\pi(x_1) - \sum_{n=2}^{x_1-1}\pi(n)\left(\frac{n+1}{\ln(n+1)} - \frac{n}{\ln n}\right) =$$

$$= \frac{x_1}{\ln x_1}\pi(x_1) - \sum_{n=3}^{x_1-1}\pi(n)\left(\frac{n+1}{\ln(n+1)} - \frac{n}{\ln n}\right) + \frac{\ln 1,125}{\ln 2\cdot\ln 3}.$$

Так как $\frac{\ln 1,125}{\ln 2\cdot\ln 3} = 0,155\ldots$ и

$$\frac{n+1}{\ln(n+1)} - \frac{n}{\ln n} > 0$$

при $n > 2$, то по неравенству Чебышёва

$$S_1(x) < c_2\left(\frac{x_1}{\ln x_1}\right)^2 + 1 \leqslant c_2\frac{4x}{\ln^2 x} + 1.$$

□

Перейдём к оценке величины $S_2(x)$. Положим

$$S_3(x) = \sum_{n=x_1+1}^{x_2-1}\frac{\pi(n)\left(\ln x - (n+1)\ln(n+1) + n\ln n\right)}{n(\ln x - \ln n)(n+1)(\ln x - \ln(n+1))}.$$

Лемма 8. *Справедливо соотношение*

$$S_2(x) = S_3(x) + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) - O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right).$$

Доказательство. Имеем:

$$S_2(x) = \sum_{n=x_1+1}^{x_2}\frac{\frac{x}{n}}{\ln\frac{x}{n}}\Delta\pi(n) = x\sum_{n=x_1+1}^{x_2}\frac{1}{n(\ln x - \ln n)}(\pi(n) - \pi(n-1)) =$$

$$= x\left(\sum_{n=x_1+1}^{x_2}\frac{1}{n(\ln x - \ln n)}\pi(n) - \sum_{n=x_1}^{x_2-1}\frac{1}{(n+1)(\ln x - \ln(n+1))}\pi(n)\right) =$$

$$= x\left(\frac{\pi(x_2)}{x_2(\ln x - \ln x_2)} + \sum_{n=x_1+1}^{x_2-1}\frac{\pi(n)\left(\ln x - (n+1)\ln(n+1) + n\ln n\right)}{n(\ln x - \ln n)(n+1)(\ln x - \ln(n+1))} - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi(x_1)}{(x_1+1)(\ln x - \ln(x_1+1))}\right)$$

По неравенствам Чебышёва имеем:

$$c_1\frac{1}{\ln x_2(\ln x-\ln x_2)}\leqslant\frac{\pi(x_2)}{x_2(\ln x-\ln x_2)}\leqslant c_2\frac{1}{\ln x_2(\ln x-\ln x_2)},$$
$$\frac{c_1x_1}{(\ln x_1)(x_1+1)(\ln x-\ln(x_1+1))}\leqslant\frac{\pi(x_1)}{(x_1+1)(\ln x-\ln(x_1+1))}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{c_2x_1}{(\ln x_1)(x_1+1)(\ln x-\ln(x_1+1))}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\pi(x_2)}{x_2(\ln x-\ln x_2)}=O\left(\frac{1}{\ln x}\right),\quad\frac{\pi(x_1)}{(x_1+1)(\ln x-\ln(x_1+1))}=O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Так как выражение

$$f(n)=\ln x-(n+1)\ln(n+1)+n\ln n$$

меняет знак на промежутке от x_1 до x_2, то применить неравенство Чебышёва и получить

$$c_1S_4(x)\leqslant S_3(x)\leqslant c_2S_4(x),$$

где

$$S_4(x)=\sum_{n=x_1+1}^{x_2-1}\frac{(\ln x-(n+1)\ln(n+1)+n\ln n)}{(\ln n)(\ln x-\ln n)(n+1)(\ln x-\ln(n+1))}=$$
$$=\sum_{n=x_1+1}^{x_2-1}\frac{\left(\ln x-\ln(n+1)-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{(\ln n)(\ln x-\ln n)(n+1)(\ln x-\ln(n+1))}.$$

нельзя. □

3.1. Другой путь оценки

Лемма 2 открывает другой путь оценки величины $\pi_2(x)$. Положим

$$S_1^*(x)=\sum_{n=2}^{x_1}\frac{x}{n(\ln x-\ln n)}\Delta\pi(n)$$

Лемма 9. *Справедливы неравенства*

$$c_1S_1^*(x)-c_2S_1(x)+c_1\frac{2\sqrt{x}}{\ln x}\leqslant\pi_2(x)\leqslant c_2S_1^*(x)-c_1S_1(x)+c_2\frac{2\sqrt{x}}{\ln x}.$$

Доказательство. Так как $\pi(p-1)=\pi(p)-1$, то из леммы вытекает

$$\pi_2(x)=\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\left(\pi\left(\frac{x}{p}\right)-\pi(p-1)\right)=\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\pi\left(\frac{x}{p}\right)-\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\pi(p)+\pi(\sqrt{x}).$$

Применяя неравенство Чебышева и доказательство леммы 7, получим

$$c_1\frac{2\sqrt{x}}{\ln x}\leqslant\pi(\sqrt{x})\leqslant c_2\frac{2\sqrt{x}}{\ln x},$$
$$c_1S_1(x)\leqslant\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\pi(p)\leqslant c_2S_1(x),$$
$$c_1S_1^*(x)\leqslant\sum_{p\leqslant\sqrt{x}}\pi\left(\frac{x}{p}\right)\leqslant c_2S_1^*(x).$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Лемма 10. *При $x \geqslant 9$ справедливы соотношение*

$$S_1^*(x) = O\left(\frac{x \ln\ln x}{\ln x}\right).$$

Доказательство. Из определения величины $S_1^*(x)$ вытекает

$$S_1^*(x) = \sum_{n=2}^{x_1} \frac{x}{n(\ln x - \ln n)} \Delta\pi(n) =$$

$$= \sum_{n=2}^{x_1} \frac{x}{n(\ln x - \ln n)} \pi(n) - \sum_{n=1}^{x_1 - 1} \frac{x}{(n+1)(\ln x - \ln(n+1))} \pi(n) =$$

$$= \frac{x\pi(x_1)}{x_1(\ln x - \ln x_1)} + x \sum_{n=2}^{x_1 - 1} \pi(n) \left(\frac{1}{n(\ln x - \ln n)} - \frac{1}{(n+1)(\ln x - \ln(n+1))}\right)$$

Рассмотрим функцию $f(n) = (n+1)(\ln x - \ln(n+1)) - n(\ln x - \ln n)$. Для неё имеем: $f(n) = \ln x - \ln(n+1) - n\ln(1+\frac{1}{n})$, $f'(n) = \ln x - \ln(n+1) - 1 - \ln x + \ln n + 1 = -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$. Так как $f(x_1 - 1) = \ln x - \ln x_1 - (x_1 - 1)\ln(1 + \frac{1}{x_1 - 1})$ и $f(x_1 - 1) > \frac{1}{2}\ln x - 1 > 0$ при $x \geqslant 9$, то $f(n) > 0$ при $2 \leqslant n \leqslant x_1$ и можно применить неравенство Чебышёва, получим для

$$S_2^*(x) = x\left(\frac{1}{(\ln x_1)(\ln x - \ln x_1)} + \sum_{n=2}^{x_1 - 1}\left(\frac{\ln x - \ln(n+1) - n\ln(1+\frac{1}{n})}{(\ln n)(\ln x - \ln n)(n+1)(\ln x - \ln(n+1))}\right)\right),$$

$$c_1 S_2^*(x) \leqslant S_1^*(x) \leqslant c_2 S_2^*(x).$$

Из предыдущего следует, что при $x \geqslant 9$ найдется некоторая константа $c_0 > 0$, такая, что выполнены неравенства

$$c_0(\ln x - \ln(n+1)) \leqslant \ln x - \ln(n+1) - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \ln x - \ln(n+1).$$

Численные расчёты показывают, что в качестве значения c_0 можно взять $\frac{1}{4}$.

Отсюда вытекает, что для величины

$$S_3^*(x) = \sum_{n=2}^{x_1 - 1}\left(\frac{1}{(\ln n)(\ln x - \ln n)(n+1)}\right)$$

справедливы неравенства

$$c_1 x\left(\frac{1}{(\ln x_1)(\ln x - \ln x_1)} + \frac{1}{4}S_3^*(x)\right) \leqslant S_2^*(x) \leqslant c_2 x\left(\frac{1}{(\ln x_1)(\ln x - \ln x_1)} + S_3^*(x)\right).$$

Рассмотрим величину

$$S_4^*(x) = \sum_{n=2}^{x_1 - 1}\left(\frac{1}{(\ln n)(\ln x - \ln n)n}\right),$$

для которой выполнены соотношения

$$S_3^*(x) < S_4^*(x),$$

$$S_4^*(x) - S_3^*(x) = \sum_{n=2}^{x_1 - 1}\left(\frac{1}{(\ln n)(\ln x - \ln n)n(n+1)}\right) \leqslant \sum_{n=2}^{x_1 - 1}\left(\frac{1}{(n(n+1)}\right) < \frac{1}{2}.$$

Применим формулу суммирования Эйлера

$$\sum_{n=a}^{b-1} g(n) = \int_a^b g(x)dx - \frac{1}{2}(g(b)-g(a)) + \int_a^b \left(\{x\}-\frac{1}{2}\right) g'(x)dx,$$

получим

$$S_4^*(x) = \int_2^{x_1} \frac{dy}{(\ln y)(\ln x - \ln y)y} -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{(\ln x_1)(\ln x - \ln x_1)x_1}\right) - \left(\frac{1}{(\ln 2)(\ln x - \ln 2)2}\right)\right) +$$
$$+\int_2^{x_1} \left(\{x\}-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(\ln y)(\ln y - \ln x)y^2}\left(1+\frac{1}{\ln y - \ln x}+\frac{1}{\ln y}\right)dy.$$

Вычисляя первый интеграл, получим

$$\int_2^{x_1} \frac{dy}{(\ln y)(\ln x - \ln y)y} = \int_{\ln 2}^{\ln x_1} \frac{dt}{t(\ln x - t)} = \frac{1}{\ln x}\int_{\ln 2}^{\ln x_1} \left(\frac{1}{t}+\frac{1}{\ln x - t}\right)dt =$$
$$= \frac{\ln\ln x_1 - \ln\ln 2 + \ln(\ln x - \ln 2) - \ln(\ln x - \ln x_1)}{\ln x}.$$

Нетрудно видеть, что первый интеграл по порядку есть величина $O(\frac{\ln\ln x}{\ln x})$, второй член в формуле суммирования имеет порядок $O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$, а третий — $O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$. Объединяя эти оценки, получим утверждение леммы. □

Теорема 1. *Для количества составных чисел, равных произведению двух простых, справедливо соотношение*

$$\pi_2(x) = O\left(\frac{x\ln\ln x}{\ln x}\right).$$

Доказательство. Действительно, применяя последовательно леммы 3, 7 и 10, получим утверждение теоремы. □

Замечание 2. *Из доказательства леммы 10 видно, что можно выписать константы сверху и снизу в знаке $O()$, но мы не стали этого делать в силу громоздкости необходимых вычислений.*

4. Вспомогательные утверждения

Нам потребуются следующие результаты, которые уже стали классическими.

Теорема 2. *(Теорема Бруна-Титчмарша) Для $(a,k)=1$ и $k \leqslant x$ имеем*

$$\pi(x,a,k) < \frac{(2+\eta)x}{\varphi(k)\ln(2x/k)} \quad (x > x_0(\eta)),$$

где $\pi(x,a,k)$ — количество простых чисел p, не превосходящих x, для которых $p \equiv a \pmod k$, $\varphi(x)$ — функция Эйлера.

Доказательство. См. [12], стр. 19–20. □

В монографии К. Прахара [10], стр. 53 имеется другой вариант этой теоремы:

Теорема 3. *Пусть* $1 \leqslant k < x$, $0 \leqslant l < k$, $(k,l) = 1$ *и*

$$\pi(x,k,l) = N(p \leqslant x,\, p \equiv l \pmod{k}). \tag{7}$$

Тогда

$$\pi(x,k,l) < c\frac{x}{\varphi(k)\ln(x/k)}, \tag{8}$$

причем константа c *не зависит от* x *и* k.

Доказательство. См. [10], стр. 53. □

Доказательства теорем 2 и 3 проводится методами решета. С помощью L-функций Дирихле удается получить асимптотическое равенство.

Теорема 4. *Равенство*

$$\pi(x,k,l) = \frac{1}{\varphi(k)}\operatorname{li} x + O\left(\frac{x_1^{\beta}}{\varphi(k)} + xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right) \tag{9}$$

выполняется равномерно при $k \leqslant \exp(c_{10}\sqrt{\ln x})$.

Доказательство. См. [10], стр. 157. □

Теорема 5. *При постоянном* k

$$\pi(x,k,l) = \frac{1}{\varphi(k)}\operatorname{li} x + O\left(xe^{-c_9\sqrt{\ln x}}\right), \tag{10}$$

в частности,

$$\pi(x,k,l) \sim \frac{x}{\varphi(k)\ln x}, \quad x \to \infty. \tag{11}$$

Доказательство. См. [10], стр. 157. □

Теорема 6. *При* $x \to \infty$ *имеют место соотношения*

$$\sum_{p \leqslant x}\frac{1}{p} = \ln\ln x + a + O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \tag{12}$$

$$\prod_{p \leqslant x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = B\ln x + O\left(1\right). \tag{13}$$

Здесь a *и* B *— некоторые константы, причём* $B > 0$.

Доказательство. См. [10], стр. 28–30. На стр. 92 дается вариант теоремы с более точным остаточным членом чем в формуле (12):

$$\sum_{p \leqslant x}\frac{1}{p} = \ln\ln x + \gamma - \sum_{p}\sum_{m \geqslant 2}\frac{1}{mp^m} + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right).$$

На стр. 94 дается более точное выражение формулы (13) в виде

$$\prod_{p \leqslant x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma}}{\ln x}\left(1 + O\left(e^{-c\sqrt{\ln x}}\right)\right).$$

Здесь γ — константа Эйлера,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} - \ln n\right) = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}du - \int_1^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du.$$

□

5. Количество составных с двумя делителями в прогрессии

Проведем аналогичные рассуждения, но вместо неравенства Чебышёва будем использовать оценку Бруна-Титчмарша.

Теперь приступим к оценке $\pi_2(x,q)$.

Теорема 7. *Для количества составных чисел, сравнимых с 1 по модулю q и равных произведению двух простых, при $x > \frac{q^4}{64}$ справедливо соотношение*

$$\pi_2(x,q) \leqslant \frac{3(2+\eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln\ln x + 2a)}{\ln x - \ln q} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Доказательство. По лемме 4 (стр. 129) имеем:

$$\pi_2(x,q) = \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv a \pmod q} \pi\left(\frac{x}{p}, a^*, q\right) -$$
$$- \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv a \pmod q} \pi(p-1, a^*, q).$$

Так как $x > q^2$, то при $p \leqslant \sqrt{x}$ будем иметь $\frac{x}{p} \geqslant \sqrt{x} > q$. Поэтому равенство для $\pi_2(x,q)$ можно переписать следующим образом:

$$\pi_2(x,q) = \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv a \pmod q} \pi\left(\frac{x}{p}, a^*, q\right) -$$
$$- \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{p\leqslant q,\, p\equiv a \pmod q} \pi(p-1, a^*, q) - \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{q<p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv a \pmod q} \pi(p-1, a^*, q) =$$
$$= S_1(x,q) - S_2(x,q) - S_3(x,q).$$

Вторую сумму оценим тривиально с помощью неравенства Чебышева, аналогично лемме 7, получим

$$0 \leqslant S_2(x,q) \leqslant \sum_{p\leqslant q}\pi(p) \leqslant c_2\sum_{n=2}^{q}\frac{n}{\ln n}\Delta\pi(n) = c_2\left(\frac{q}{\ln q}\pi(q) -\right.$$
$$\left. -\sum_{n=3}^{q-1}\pi(n)\left(\frac{n+1}{\ln(n+1)} - \frac{n}{\ln n}\right) + \frac{\ln 1,125}{\ln 2\cdot\ln 3}\right) \leqslant c_2^2\frac{q^2}{\ln^2 q} + c_2.$$

Для первой и третьей сумм можно применить оценку из теоремы Бруна-Титчмарша (стр. 134), получим:

$$0 \leqslant S_3(x,q) = \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{q<p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv a \pmod q} \pi(p-1, a^*, q) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{q<p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv a \pmod q} \frac{(2+\eta)(p-1)}{\varphi(q)\ln(2(p-1)/q)}.$$

Так как выражение, стоящее под знаком суммы не зависит от a и a^*, то суммирование по a исчезнет, а останется только суммирование по $q < p \leqslant \sqrt{x}$. Таким образом, получим

$$S_3(x,q) \leqslant \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1}\ \sum_{q<p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv a \pmod q} \frac{(2+\eta)(p-1)}{\varphi(q)\ln(2(p-1)/q)} = \sum_{q<p\leqslant\sqrt{x}} \frac{(2+\eta)(p-1)}{\varphi(q)\ln(2(p-1)/q)}.$$

Положим

$$S_3^*(x,q) = \sum_{q<n\leqslant\sqrt{x}} \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\Delta\pi(n) = \sum_{n=q+1}^{x_1} \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\Delta\pi(n),$$

тогда

$$S_3(x,q) \leqslant \frac{2+\eta}{\varphi(q)} S_3^*(x,q).$$

Аналогично, для $S_1(x,q)$ имеем:

$$S_1(x,q) = \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1} \ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv a \pmod q} \pi\left(\frac{x}{p}, a^*, q\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2+\eta}{\varphi(q)} \sum_{1\leqslant a\leqslant q-1,(a,q)=1} \ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv a \pmod q} \frac{x}{p\ln(2x/(qp))} = \frac{2+\eta}{\varphi(q)} \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,(p,q)=1} \frac{x}{p\ln(2x/(qp))}.$$

Сначала оценим $S_3^*(x,q)$, действуя аналогично доказательству леммы 7, получим:

$$S_3^*(x,q) = \sum_{n=q+1}^{x_1} \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\Delta\pi(n) = \sum_{n=q+1}^{x_1} \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}(\pi(n)-\pi(n-1)) =$$

$$= \frac{x_1-1}{\ln(2(x_1-1)/q)}\pi(x_1) + \sum_{n=q+1}^{x_1-1} \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\pi(n) - \sum_{n=q}^{x_1-1} \frac{n}{\ln(2n/q)}\pi(n) =$$

$$= \frac{x_1-1}{\ln(2(x_1-1)/q)}\pi(x_1) - \sum_{n=q+1}^{x_1-1} \pi(n)\left(\frac{n}{\ln(2n/q)} - \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\right) - \frac{q}{\ln 2}\pi(q).$$

Так как при $n > \frac{eq}{2}$ коэффициенты

$$\left(\frac{n}{\ln(2n/q)} - \frac{n-1}{\ln(2(n-1)/q)}\right) > 0,$$

а при $q < n < \frac{eq}{2}$ эти коэффициенты отрицательные, то для $S_3^*(x,q)$ выполняется оценка $S_3^*(x,q) = O\left(\frac{x}{\ln\sqrt{x}\ln\frac{2\sqrt{x}}{q}}\right) = O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$.

Перейдём к оценке $S_1^*(x,q)$. Прежде всего, заметим, что при $x > \frac{q^4}{64}$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{3}(\ln x - \ln q) < \ln 2 + \frac{1}{2}\ln x - \ln q.$$

Поэтому при $2 \leqslant p \leqslant \sqrt{x}$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{3}(\ln x - \ln q) < \ln 2 + \frac{1}{2}\ln x - \ln q \leqslant \ln\frac{2x}{pq} \leqslant \ln x - \ln q.$$

Отсюда следует, что

$$S_1^*(x,q) \leqslant \frac{2+\eta}{\varphi(q)} \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\,(p,q)=1} \frac{x}{p\ln(2x/(qp))} \leqslant \frac{3(2+\eta)x}{\varphi(q)(\ln x - \ln q)} \sum_{p\leqslant\sqrt{x}} \frac{1}{p}$$

К сумме по p применим теорему 6, получим:

$$S_1^*(x,q) \leqslant \frac{3(2+\eta)x}{\varphi(q)(\ln x - \ln q)}(\ln\ln\sqrt{x} + 2a) \leqslant \frac{3(2+\eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln\ln x + 2a)}{\ln x - \ln q}.$$

Объединяя эту оценку с оценками величин $S_2(x,q)$, $S_3(x,q)$ и $S_3^*(x,q)$, получим

$$\pi_2(x,q) \leqslant \frac{3(2+\eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln\ln x + 2a)}{\ln x - \ln q} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right)$$

и теорема доказана. □

6. Количество простых элементов в трех моноидах

Согласно лемме 5 при $q = 3, 4, 6$ справедливо равенство

$$\pi_{M_{q,1}}(x) = \pi(x,1,q) + \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv q-1 \pmod q} \left(\pi\left(\frac{x}{p}, q-1, q\right) - \pi(p-1, q-1, q)\right).$$

Так как $\varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2$, то неравенство Бруна-Титчмарша запишется наиболее просто:

$$\pi(x,1,q) \leqslant \frac{(2+\eta)x}{2\ln(2x/q)}, \quad \pi\left(\frac{x}{p}, q-1, q\right) \leqslant \frac{(2+\eta)x}{2p\ln(2x/(pq))},$$
$$\pi(p-1, q-1, q) \leqslant \frac{(2+\eta)(p-1)}{2\ln(2(p-1)/q)}.$$

Согласно лемме 4 при $q = 3, 4, 6$ справедливо равенство

$$\pi_2(x,q) = \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv 1 \pmod q} \left(\pi\left(\frac{x}{p}, 1, q\right) - \pi(p-1, 1, q)\right) +$$
$$+ \sum_{p\leqslant\sqrt{x},\, p\equiv q-1 \pmod q} \left(\pi\left(\frac{x}{p}, q-1, q\right) - \pi(p-1, q-1, q)\right).$$

Отсюда следует, что

$$\pi_{M_{q,1}}(x) \leqslant \pi(x,1,q) + \pi_2(x,q)$$

и справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *При $q = 3, 4, 6$ для количества простых элементов в моноиде $M_{q,1}$ при $x > \frac{q^4}{64}$ справедливо соотношение*

$$\pi_{M_{q,1}}(x) \leqslant \frac{(2+\eta)x}{2\ln(2x/q)} + \frac{3(2+\eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln\ln x + 2a)}{\ln x - \ln q} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

Так как моноид $M_{q,1} = M_{q,1,1} \cdot M_{q,1,q-1}$, где моноиды $M_{q,1,1}$ и $M_{q,1,q-1}$ заданы равенствами

$$\mathbb{N}_{q,1} = M_{q,1} = \{n = qk+1 | k \geqslant 0\}, \quad M_{q,1,1} = \{n = qk+1 | \chi_{q,1}(n) = 1\}, \tag{14}$$
$$M_{q,1,q-1} = \{n = qk+1 | \chi_{q,q-1}(n) = 1\}, \quad M_{q,1,q-1,0} = \{n \in M_{q,1,q-1} | n \neq p^\alpha\}, \tag{15}$$
$$M_{q,q-1} = \{n | \chi_{q,q-1}(n) = 1\}, \quad \mathbb{N}_{q,q-1} = \{n = qk+q-1 | k \geqslant 0\},$$
$$\mathbb{N}_{q,q-1,q-1} = \{n = qk+q-1 | k \geqslant 0, \chi_{q,q-1}(n) = 1\}. \tag{16}$$

где мультипликативные функции $\chi_{q,1}(n)$ и $\chi_{q,q-1}(n)$ заданы равенствами

$$\chi_{q,1}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^\alpha,\ p = qm+1,\ \alpha \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } n = p^\alpha,\ p|q, p = qm+q-1,\ \alpha \geqslant 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{q,1}(p^{\alpha_p}), & \text{при } n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}; \end{cases}$$

.

$$\chi_{q,q-1}(n) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = p^\alpha,\ p = qm+q-1,\ \alpha \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } n = p^\alpha,\ p|3,\ p = qm+1,\ \alpha \geqslant 1, \\ \prod_{p|n} \chi_{q,q-1}(p^{\alpha_p}), & \text{при } n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p}, \end{cases}$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *При $q = 3, 4, 6$ для количества простых элементов в моноиде $M_{q,1,q-1}$ при $x > \frac{q^4}{64}$ справедливо соотношение*

$$\pi_{M_{q,1,q-1}}(x) \leqslant \frac{3(2+\eta)}{\varphi(q)} \cdot \frac{x(\ln\ln x + 2a)}{\ln x - \ln q} + O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right).$$

С теоремами 8 и 9 связаны следующие замечания.

Во-первых, дзета-функция $\zeta(M_{q,1}|\alpha)$ моноида $M_{q,1}$ выражается через дзета-функцию Гурвица $\zeta\left(\alpha, \frac{1}{q}\right)$ по формуле

$$\zeta(M_{q,1}|\alpha) = \frac{1}{q^\alpha}\zeta\left(\alpha, \frac{1}{q}\right).$$

Отсюда следует, что дзета-функция $\zeta(M_{q,1}|\alpha)$ моноида $M_{q,1}$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, кроме точки $\alpha = 1$, где у неё полюс первого порядка с вычетом

$$\operatorname*{Res}_{1}\zeta(M_{q,1}|\alpha) = \frac{1}{q}.$$

Так как моноиды $M_{q,1,1}$ и $M_{q,1,q-1}$ взаимно просты, то имеет место равенство для дзета-функций

$$\zeta(M_{q,1}|\alpha) = \zeta(M_{q,1,1}|\alpha)\zeta(M_{q,1,q-1}|\alpha) \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > 1. \tag{17}$$

Возникает вопрос об аналитическом продолжении сомножителей в правой части равенства (17) на всю комплексную плоскость кроме точки $\alpha = 1$, где оба сомножителя имеют полюса.

Во-вторых, как известно, дзета-функция Гурвица имеет нули как справа от прямой $\sigma = 1$, так и в полосе $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ (см. [1, 2, 3, 15]). Отсюда следует, что дзета-функция $\zeta(M_{q,1,q-1}|\alpha)$ имеет нули справа от прямой $\sigma = 1$. Вопрос о нулях в полосе $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ будет следующим, после того как удастся получить аналитическое продолжение для этой дзета-функции.

7. Заключение

1. Из анализа оценки теоремы из введения видно, что формула из леммы 3 более удобная для оценок, чем формула из леммы 2. Это объясняется тем, что она содержит только один интервал суммирования длины $\sqrt{x}$ и возникающие на нём функции знакопостоянные.

2. Переход к изучению величины составных, равных произведению двух простых, в классе вычетов требует применения неравенства Бруна-Титчмарша вместо более точного неравенства Чебышева. Поэтому таким способом можно получить только оценки сверху.

3. Результат для класса вычетов сравнимых с единицей должен быть справедлив для любого класса вычетов, взаимно простого с модулем.

4. Вопросы о распределении простых элементов в моноидах $M_{q,1}$ при $q \neq 2, 3, 4, 6$ являются более сложными, так как требуют подсчета псевдопростых чисел порядка больше 2.

5. На наш взгляд очень интересным является вопрос об аналогах теоремы Дэвенпорта–Хейльбронна для разбиения произвольных моноидов натуральных чисел на классы вычетов по модулю произвольного $q > 2$.

В заключении авторы выражают свою благодарность за полезные обсуждения и внимание к работе профессору В. Н. Чубарикову.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.
2. С. М. Воронин Избранные труды: Математика / Под ред. А. А. Карацубы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. — 480 с.
3. С. М. Воронин, А. А. Карацуба Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.
4. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Доклады академии наук 2007. Т. 412, № 3. С. 302–304.
5. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.
6. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.
7. Н. Н. Добровольский О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.
8. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. 142–150.
9. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 106–123.
10. К. Прахар Распределение простых чисел. — М.: МИР. 1967, 511 с.
11. И. Ю. Реброва, А. В. Кирилина Н. М. Коробов и теория гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 2. С. **??**–**??**.
12. К. Хооли Применение методов решета в теории чисел. — М.: Наука, 1987, 20 с.
13. Чебышёв П. Л. Полное собрание сочинений, т. I–V. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1944–1951.
14. Чебышёв П. Л. Избранные труды. — М.: Изд-во АН СССР, 1955, 926 с.
15. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.
16. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

REFERENCES

1. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, "Around the Davenport–Heilbronn function", *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.
2. Voronin S. M., 2006, *Izbrannye trudy: Matematika. Pod red. A. A. Karacuby*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moskva, 480 p.

3. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

4. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok" , *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.

5. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 17, № 3 pp. 72–105.

6. Dobrovolsky N. N., 2017, *The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, № 4. P. 187–207.

7. Dobrovolsky N. N., 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, № 1. P. 79–105.

8. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 142–150.

9. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 106–123.

10. Prahar K., 1967, *Raspredelenie prostyh chisel, per. s nem*, Izd-vo Mir, Moskva, 511 p.

11. I. Yu. Rebrova, A. V. Kirilina 2018, "N. M. Korobov and the theory of the hyperbolic zeta function of lattices" , //*Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2. P. **??**–**??**.

12. C. Hooley 1987, "Applications of seive methods to the theory of numbers " ,*M.: Nauka*, 20 p.

13. Chebyshev P. L. 1944–1951 "Complete works, v. I–V. " , *M.-L.: Izd-vo AN SSSR*.

14. Chebyshev P. L. 1955, "Selected works." , *M.: Izd-vo AN SSSR*, 926 p.

15. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series" , *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

16. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.