ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 3.

УДК 51(09) DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-7-19

О жизни и творчестве Юрия Владимировича Линника

Ибрагимов Ильдар Абдуллович — Академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН.
e-mail: ibr32@pdmi.ras.ru
Мороз Борис Зеликович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры дискретной математики Московского Физико-Технического Института, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Россия; Universität Bonn, Германия.
e-mail: moroz@pdmi.ras.ru

Аннотация

Статья посвящена жизни и научной деятельности выдающегося советского математика, академика АН СССР, доктора физико-математических наук, профессора Юрия Владимировича Линника.

Ключевые слова: Юрий Владимирович Линник.

Библиография: 9 названий.

Для цитирования:
И. А. Ибрагимов, Б. З. Мороз. О жизни и творчестве Юрия Владимировича Линника // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 7–19.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 3.

UDC 51(09) DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-3-7-19

On the life and work of Yuri Vladimirovich Linnik

Ibragimov Il'dar Abdullovich — Member of the Russian Academy of Sciences, Doctor of physico-mathematical sciences, Professor, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences.
e-mail: ibr32@pdmi.ras.ru
Moroz Boris Zelikovich — Doctor of physico-mathematical sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Russia; Universität Bonn, Germany.
e-mail: moroz@pdmi.ras.ru

Abstract

The article is devoted to the life and scientific activity of the outstanding Soviet mathematician, academician of the USSR Academy of Sciences, doctor of physics and mathematics, Professor Yuri Vladimirovich Linnik.

Keywords: Yuri Vladimirovich Linnik.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
I. A. Ibragimov, B. Z. Moroz, 2018, "On the life and work of Yuri Vladimirovich Linnik", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 7–19.

1.

Блестящий математик и замечательный широко образованный человек, Юрий Владимирович Линник (1915–1972) был ярким представителем петербургской школы теории чисел. В юности на него оказали некоторое влияние петербургские математики Борис Алексеевич Венков (1900–1962) и Владимир Абрамович Тартаковский (1901–1973), но он рано нашёл свою дорогу, став доктором физико-математических наук уже в 1940-м году.

Остановимся на некоторых этапах его жизненного пути (ср. [3]). Ю. В. Линник родился 8 января 1915 г. в городе Белая Церковь. Его родители — Владимир Павлович и Мария Абрамовна Линник были учителями. В. П. Линник (1889–1984), отец Юрия Владимировича, стал впоследствии известным физиком ("телескоп Линника") и был избран академиком АН СССР.

В 1932 г., возможно, под влиянием своего отца, Юрий Владимирович поступил на физический факультет Ленинградского университета, но по окончании третьего курса, "чувствуя неодолимое влечение к высшей арифметике" (как он писал в своей автобиографии), перешёл на математико-механический факультет ЛГУ, который и закончил в 1938 г.

Военные годы не обошли Ю. В. Линника. В 1939 г. он был призван в Красную Армию и зимой 1939–1940 гг. принимал участие в войне с Финляндией в качестве командира артиллерийского взвода (Юрий Владимирович всегда называл эту войну несправедливой в своих разговорах с И. А.). В июле 1941 г. он заболел дистрофией, был демобилизован и эвакуирован в Казань, где тогда располагался МИАН (стоит ещё раз упомянуть, что между двумя войнами, в 1940 г., Юрий Владимирович защитил кандидатскую диссертацию по теории чисел, за которую ему сразу была присуждена степень доктора физико-математических наук).

Ю. В. Линник вернулся в Ленинград в 1945 г., где до конца своих дней работал в ЛОМИ (:= Ленинградское отделение МИАН) и в Ленинградском университете.

В ЛОМИ работал семинар по теории чисел под руководством Юрия Владимировича. Этот семинар посещали, в частности, А. Н. Андрианов, А. И. Виноградов, Е. П. Голубева, А. Ф. Иванов, А. В. Малышев, Б. З. Мороз, Б. Ф. Скубенко, О. М. Фоменко, В. М. Цветков и Н. Г. Чудаков. Николай Григорьевич Чудаков (1904–1986) приехал в Ленинград из Саратова по приглашению Ю. В. Линника и проработал в ЛОМИ около десяти лет.

Ю. В. Линник создал и возглавил лабораторию статистических методов в ЛОМИ и кафедру теории вероятностей и математической статистики на математико-механическом факультете ЛГУ (заведование последней он позднее передал В. В. Петрову). Мы точно не знаем, когда был организован вероятностный семинар Ю. В. Линника. Когда И. А. начал посещать этот семинар осенью 1953 г., среди его участников были Н. Н. Воробьёв, Н. А. Сапогов, О. В. Сарманов, В. П. Скитович (незадолго до этого доказавший знаменитую "теорему Скитовича — Дармуа").

Юрий Владимирович уделял большое внимание преподавательской деятельности, общению с молодыми математиками. В ЛГУ он читал лишь вероятностые курсы – теорию случайных процессов (позднее Юрий Владимирович поручил читать этот курс И. А.), курс теории вероятностей для механиков (почему-то он больше любил читать этот курс механикам, чем математикам), математическую статистику. Этот последний курс он особенно любил и читал его каждый год вплоть до своей кончины (Б. З. познакомился с Юрием Владимировичем после первого часа одной из лекций по математической статистике). В течение некоторого времени в ЛОМИ работал учебный семинар, организованный по инициативе (и с участием) Юрия Владимировича, целью которого было, разобраться в новейших работах по алгебраической геометрии. К сожалению, достичь этой цели участникам семинара не удалось. Начав с учебников по комбинаторной топологии, мы (Б. З. был одним из участников этого семинара) добрались до теории пучков, но не до схем Гротендика. Ю. В. Линник нашёл однако применение теории функций многих комплексных переменных и, в частности, теории пучков в математической статистике.

Когда в 60-х годах очередной административный приказ запретил сотрудникам Академии Наук совместительство в вузах, вплоть до отмены этого нелепого запрета, в течение 2-х лет, Юрий Владимирович преподавал бесплатно.

В середине 50-х годов начинают восстанавливаться связи советских математиков с зарубежными коллегами. К этому времени относится первый визит Ю. В. Линника за границу, в Индию. Юрий Владимирович всегда придавал большое значение личным контактам между учёными разных стран (позднее, в 60-е годы, на заседании семинара по теории чисел, он как-то, говоря о зарубежных математиках, между прочим, сказал: "Они не умнее нас, но у них — связь со всем миром"). Тесные, порою дружеские отношения установились у него со многими крупнейшими специалистами по теории чисел и теории вероятностей.

Ю. В. Линник был первым президентом Ленинградского математического общества (1959–1965).

Заслуги Ю. В. Линника были высоко оценены. Он был избран членом-корреспондентом АН СССР в 1954 г. и академиком в 1963 г. В 1947 г. ему была присуждена Государственная премия за работы по аналитической теории чисел, а в 1970 г. — Ленинская премия (совместно с И. А. Ибрагимовым, Ю. В. Прохоровым и Ю. А. Розановым) за работу по предельным теоремам теории вероятностей. В 1970 г. он был удостоен звания Героя Социалистического Труда. В 1962 г. Ю. В. Линник был приглашённым докладчиком на Международном Математическом Конгрессе в Стокгольме; в докладе на этом конгрессе Юрий Владимирович сформулировал свою знаменитую, до сих пор не доказанную гипотезу о суммах сумм Клоостермана. Многие университеты, академии, научные общества избрали Ю. В. Линника своим почётным членом.

Юрий Владимирович был очень ярким, разносторонне одарённом человеком. Он свободно владел многими языками и писал стихи на русском, французском и немецком языках. Имел обширнейшие познания в литературе и истории, особенно военной. Живо интересовался политическими событиями. Приведём одну из любимых шуток Юрия Владимировича.

Теорема. *Генеральная линия партии — прямая.*

Доказательство. Действительно, она вся состоит из точек перегиба.

Однако главным делом жизни Ю. В. Линника, которому он отдавался весь, отдавался страстно, темпераментно, было научное творчество. Трудолюбие его было необычайно, но труд этот был источником радости. Юрий Владимирович всегда любил ту работу, которой он был занят в данный момент и почти по-детски гордился, даже чуть-чуть хвастался своими достижениями данного момента. То, что уже было сделано, волновало его мало. При встрече Юрий Владимирович немедленно начинал рассказывать вам, какую замечательную вещь он сейчас придумал, лучшую в своей жизни. Иногда собеседник припоминал, что, кажется, лучшую в своей жизни вещь Юрий Владимирович сделал три дня назад. Юрий Владимирович искренне недоумевал: "О чём это Вы? Ах, это... Ну, это пустяки. Вот то, что я сейчас сделал, вот это да". К Ю. В. Линнику, как нельзя лучше, подходят слова Ф. Клейна: "И всё-таки тайна продвижения вперёд лежит в наивном творчестве, возникающем из чистой радости того дела, к которому толкает творцов их мысль". Читая работы Ю.В. Линника, видишь в них те "орудия первооткрывателей" , в которых Г. Вейль отказал Ф. Клейну — "изощрённую тонкость математической мысли, головоломные трюки, позволяющие доказывать результаты, ещё определённо не созревшие для того, чтобы можно было уяснить их исходные принципы" (Г. Вейль, Феликс Клейн и современная математика. Избранные труды, М., Наука, 1984).

Скончался Юрий Владимирович Линник 30 июня 1972 года от инфаркта миокарда. Более 46-и лет отделяют нас от того знойного июньского дня, когда он ушёл из жизни. Оглядываясь назад, мы видим, сколь многим обязаны Ю. В. Линнику математики Ленинграда, круг же тех, на кого повлияли его идеи, созданные им методы исследования, много шире непосредственного круга его учеников и сотрудников.

2.

Вот что пишет о нашем учителе Аскольд Иванович Виноградов (1929–2005), один из лучших учеников и коллег Юрия Владимировича [2]:

"Всё творчество Ю. В. Линника в области теории чисел можно разбить на несколько периодов, в каждом из которых он интересовался определённым кругом проблем.

Самый первый юношеский интерес его связан с задачей представления целого числа тернарной квадратичной формой определённого типа. Здесь сказалось влияние проф. Б. А. Венкова, который читал тогда в ЛГУ курс теории чисел, и личные интересы которого лежали в этой области, восходящей ещё к Гауссу.

Затем его интересы начали смещаться в сторону кругового метода Харди — Литтльвуда и метода тригонометрических сумм И. М. Виноградова.

В 1940 г. он заинтересовался гипотезой И. М. Виноградова о наименьшем невычете, ставшей в дальнейшем одной из любимых его проблем, над которой он размышлял до конца жизни. В 1941 г. он публикует заметку в Докладах Академии наук СССР, где доказвает, что гипотеза И. М. Виноградова верна для всех модулей, кроме, быть может, ограниченного множества. Эта статья называлась большое решето, и её ждала блестящая судьба. Проблемы, которые были заключены в этой статье, породили целое научное направление, и к настоящему времени оно является ведущим в теории чисел, давшим сотни научных статей и десятки книг во всём мире. Идеи этой статьи позволили доказать в середине 60-х годов арифметический аналог расширенной гипотезы Римана (РГР), а так как с РГР связан почти необозримый круг проблем в теории чисел, то становится понятным, почему так необычна судьба этой маленькой заметки.

В военные годы Ю. В. Линник публикует ряд глубоких работ по методу И. М. Виноградова, где связывает этот метод с p-адической арифметикой локальных полей и получает оценку полиномиальной суммы Г. Вейля с понижающей степенью $1/n^2 \log n$, где n — степень полинома. Эти идеи получили дальнейшее развитие в работах А. А. Карацубы.

В эти же годы Юрий Владимирович изучает теорию L-рядов Дирихле и начинает сравнивать метод L-рядов с методом И. М. Виноградова. Он пытался в это время ответить на вопрос, можно ли получить оценку И. М. Виноградова для сумм по простым числам с помощью плотностных теорем для L-рядов. Такая постановка вопроса оказалась в высшей степени плодотворной. Она позволила ему создать новые методы как в мультипликативной, так и в аддитивной теории чисел. Эти поиски привели его в 1944 г. к ныне знаменитой теореме о наименьшем простом в арифметической прогрессии. В серии этих исследований он создал новый плотностной метод в d-аспекте, который потом усиленно развивался как у нас, так и за рубежом. Вышло в свет много работ, в которых авторы пытались снизить константу Линника (показатель степени модуля d, которого не превосходит минимальное простое).

Эта теорема Ю. В. Линника свидетельствует о благотворном влиянии метода И. М. Виноградова на мультипликативную теорию чисел. Но уже в 1946 г. Юрий Владимирович понял, что существует и обратная связь. К этому времени ему удалось доказать, что оценка И. М. Виноградова для простых чисел действительно может быть получена методом плотностных теорем. Это позволило ему дать новое доказательство знаменитой теоремы Виноградова — Гольдбаха о трёх простых. Тем самым он обогатил методы аддитивной теории чисел за счёт идей, заимствованных из мультипликативной теории чисел.

В этой серии работ Линник развил плотностной метод L-рядов в t-аспекте. Отметим, что t- и d-аспекты, развитые Ю. В. Линником в теории L-рядов, различны по своей природе. Первый аспект касается аналитической природы L-функций Дирихле, так как t — это мнимая часть аналитического параметра s. Второй аспект связан с арифметической природой L-рядов, так как d — это модуль характера Дирихле. Оба эти аспекты успешно развивались многими авторами, но шли параллельно друг другу, пока, наконец, в начале 70-х годов не объединились под шапкой "большого решета" в интерпретации Х. Монтгомери.

Надо отметить, что на военные годы (1943 г.) падает и его знаменитое элементарное решение проблемы Варинга, ставшее широко известным благодаря книге А. Я. Хинчина "Три жемчужины теории чисел".

В конце 40-х — начале 50-х годов Ю. В. Линник много размышлял над бинарной проблемой Гольдбаха. Он обнаружил, что круговой метод вместе с РГР не достаёт до этой проблемы. Не хватало совсем немного — последовательности логарифмической плотности. Эти размышления породили серию работ. Отметим две из них, которые являются итоговыми: "Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха" (1952 г.) и "Складывание простых чисел со степенями одного и того же числа" (1953 г.).

В середине 50-х годов Юрий Владимирович снова возвращается к своим юношеским увлечениям тернарными формами. Он продолжает и развивает свои довоенные идеи. Главным отличием этих исследований от довоенных является их эргодическийháратер. В это время его интересует не только общее количество целых точек на всей сфере, но и распределение их на отдельных кусках её. В этой серии работ ему удалось установить фундаментальный факт — равномерность распределения целых точек на сфере (совместно с А. В. Малышевым). Итоговым трудом этого цикла является его работа "Асимптотико-геометрические и эргодические свойства множества целых точек на сфере" (1957 г.).

В это же время он обдумывал и проблему распределения целых точек на гиперболоидах. Эта задача тесно связана с арифметикой бинарных квадратичных форм. Если взять класс таких форм с фиксированным дискриминантом, а коэффициенты этих форм трактовать как свободные параметры, то мы получим гиперболоид. Если ограничиться только приведёнными формами, то гауссовские условия приведения вырежут на гиперболоиде некомпактную область приведения. Число целых точек в этой области будет совпадать с числом различных форм с одним и тем же дискриминантом. Естественно поставить вопрос о том, сколько будет целых точек в некоторой части области приведения. Это аналог вопроса о целых точках на кусках сферы. Но если там можно было рассматривать сферу в обычном евклидовом пространстве, то здесь евклидова геометрия уже не работает. Нужно погрузить гиперболоид в неевклидово пространство и воспользоваться метрикой Лобачевского. Сама идея перехода к неевклидовой метрике была высказана Б. А. Венковым в 1951 г. Ю. В. Линник существенно развил её и дополнил. Отметим, что в этом направлении существует принципиальная разница между случаями двуполостного и однополостного гиперболоидов.

Первый случай отвечает положительно определённым бинарным квадратичным формам, или, другими словами, мнимым квадратичным полям.

Второй — неопределённым формам, или вещественным квадратичным полям. Принципиальную разницу вносит имеющая бесконечный порядок единица вещественного поля, которой нет в мнимых полях. Сам Юрий Владимирович исследовал эргодические свойства двуполостного гиперболоида, а его ученик Б. Ф. Скубенко — однополостного. Отметим главную работу этой серии "Асимптотическое распределение приведённых бинарных квадратичных форм в связи с геометрией Лобачевского" (1955 г.).

В конце 50-х — начале 60-х годов Ю. В. Линник создаёт новый, дисперсионный метод в теории чисел. В 1960 г. он решил этим методом известную проблему Харди — Литтльвуда о представимости каждого целого числа суммой простого и двух квадратов. Суть этого метода кратко в следующем. Чаще всего мы не можем вычислить асимптотику арифметической функции в прогрессии с большим модулем. Но иногда возникает возможность вычислить дисперсию этой суммы по всем большим модулям. Юрий Владимирович заметил, что этого достаточно для многих проблем и, в частности, для проблемы Харди — Литтльвуда. Именно поэтому метод и был назван дисперсионным, хотя с вероятностными методами, по существу, нет никакой связи. Идеи этого метода были изложены им в серии работ конца 50-х — начала 60-х годов. Полное представление об этом методе можно получить, прочитав его монографию "Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах" (1961 г.). С этого времени и до конца жизни он несколько раз возвращался к этому методу, развивая и дополняя его.

В середине 60-х годов Ю. В. Линник в третий раз вернулся к проблематике тернарных форм. На этот раз толчком к этому послужила короткая заметка в Докладах Академии наук СССР "Гиперэллиптические кривые и наименьший простой квадратичный вычет" (1966 г.). В ней было показано, что этот вычет имеет порядок корня 4-й степени из модуля. Это существенно упрощало всю теорию тернарных форм, развитую Ю. В. Линником в двух предыдущих периодах. В то время сильно сказывалась "нехватка" малых простых вычетов. Тогда не удавалось показать, что они лежат ниже корня квадратного из модуля. Это обстоятельство усложнило метод и сделало его громоздким в техническом отношении, так как приходилось "обходить" большие вычеты. После заметки 1966 г. эти сложности обхода пропали. Теория стала прозрачной и красивой. Юрий Владимирович изложил её в монографии "Эргодические свойства алгебраических числовых полей" (1967 г.). В это же время он обнаружил эргодические свойства дисперсионного метода. Это сочетание геометрии с дисперсионным методом породило серию работ, выполненных совместно с Б. М. Бредихиным. Отметим главную из них "Асимптотика и эргодические свойства решений обобщённого уравнения Харди — Литтльвуда" (1967 г.), где эти идеи изложены наиболее подробно.

В конце жизни он понял, что с помощью дисперсионного метода можно получить элементарное доказательство теоремы Виноградова — Гольдбаха о трёх простых. Эта находка изложена в его последней работе по теории чисел "Новый метод в аналитической теории чисел" совместно с Б. М. Бредихиным, которая вышла после его смерти, в 1974 г., в сборнике "Актуальные проблемы аналитической теории чисел".

Сейчас ясно, что теоретико-числовые работы Ю. В. Линника во многом определили лицо современной теории чисел, особенно той её части, которая касается L-рядов и плотностных методов."

Эти строки были написаны 13 лет назад. Юрий Владимирович Линник по-прежнему остаётся одним из самых цитируемых ленинградских математиков.

3.

В 1947 г. вышла в свет первая работа Ю. В. Линника по теории вероятностей. С этого времени, не прекращая интенсивных и весьма плодоворных исследований по теории чисел, Юрий Владимирович не менее активно работал в теории вероятностей и статистике. Однажды И. А. спросил Юрия Владимировича, почему он начал работать в теории вероятностей. Отвечая, Ю. В. Линник сказал, что определённую роль тут сыграл А. Я. Хинчин, убеждавший его, что работать нужно по крайней мере в двух разных областях и что такой дополнительной областью могла бы быть теория вероятностей. Были, по-видимому, и другие причины. Ю. В. Линник был выдающимся аналитиком, которого привлекали трудные аналитические проблемы теории чисел и теории вероятностей.

Петербург—Петроград—Ленинград всегда был выдающимся центром исследований в области теории вероятностей. Достаточно заметить, что здесь работали, сменяя друг друга, П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, С. Н. Бернштейн. Однако в военные и послевоенные годы, хотя в Ленинграде и работали прекрасные специалисты, ученики С. Н. Бернштейна, Н. А. Сапогов и О. В. Сарманов, организованная деятельность в области теории вероятностей как научная, так и образовательная, практически прекратилась. Можно смело сказать, что Петербургская—Ленинградская школа теории вероятностей была заново воссоздана Ю. В. Линником. Как отмечалось выше, им была создана кафедра теории вероятностей и математической статистики в Ленинградском университете, лаборатория статистических методов в ЛОМИ, заработал постоянный городской семинар по теории вероятностей (работа его продолжается и по сей день), появились молодые учёные, сперва ученики Линника, а потом и ученики его учеников.

Перечислим вкратце основные циклы работ Юрия Владимировича по теории вероятностей и статистике, остановившись более подробно на работах по теории больших уклонений и арифметике законов распределения (здесь мы следуем [3]).

3.1. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.

Изучение предельного поведения распределений сумм

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$$

независимых случайных величин ξ_j при $n \to \infty$ есть классический сюжет теории вероятностей. Допустим, что все ξ_j имеют одинаковое распределение, конечное среднее $a = \mathbf{E}\xi_j$ и дисперсию $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi_j$. Пусть

$$Z_n = \frac{1}{\sigma n^{1/2}} \sum_{j=1}^{n} (\xi_j - a)$$

и

$$\Phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

В силу центральной предельной теоремы (в данном случае теоремы П. Леви)

$$\mathbf{P}(Z_n < x) \to \Phi(x) \ \text{ и } \ \mathbf{P}(Z_n \geq x) \to 1 - \Phi(x) \ \text{ при } \ n \to \infty. \tag{1}$$

Более того, если вдобавок $\mathbf{E}|\xi_j|^3 < \infty$, то (теорема Ессена !) разность между допредельным и предельным выражениями в (1) есть $O(n^{-1/2})$. Однако в целом ряде задач математической статистики и в ряде разделов современной теории вероятностей во многих случаях требуется знать поведение левых частей в (1) при бóльших x (т.е. при $x \to \infty$ вместе с n). Такие задачи называют задачами о вероятностях больших уклонений. Классические предельные теоремы (1) практически не дают никакой полезной информации, поскольку с ростом x функция $1-\Phi(x)$ убывает, как e^{-x^2}. Определённый выход из этого положения приносит теорема Г. Крамера, опубликованная в 1938 г. По воспоминаниям И. А. первый интерес Ю. В. Линника к задачам о вероятностях больших уклонений был связан с желанием понять, насколько необходимо в теореме Крамера весьма ограничительное условие

$$\mathbf{E}\exp(a|\xi_j|) < \infty \ \text{ для какого-нибудь положительного числа а.} \tag{C}$$

В определённом смысле до работ Ю. В. Линника в том, что касается поведения вероятностей больших уклонений для сумм независимых случайных величин, практически ничего, кроме теоремы Крамера не было (т.е. были, разумеется, различные обобщения теоремы Крамера, распространение этой теоремы на неодинаково распределённые слагаемые и т.д., но все они имели ту же структуру и существенно использовали условие (C)). Ю. В. Линник получил ряд новых предельных теорем. Мы приведём две самые простые по формулировке и очень красивые теоремы.

Теорема 1. *Пусть для любого* $\alpha < 1/2$

$$\frac{\mathbf{P}(Z_n > x)}{1-\Phi(x)} \to 1 \ \text{ и } \ \frac{\mathbf{P}(Z_n < -x)}{\Phi(-x)} \to 1 \ \text{ при } \ n \to \infty \tag{2}$$

равномерно в интервале $0 \le x \le n^{\alpha}$. *Тогда случайные величины* ξ_j *нормальны.*

Теорема 2. *Пусть монотонно возрастающая функция* $\rho(n) \to \infty$. *Если* $\alpha < 1/6$ *и соотношение* (2) *выполняется равномерно в интервале* $0 \le x \le n^{\alpha}\rho(n)$, *то*

$$\mathbf{E}|\xi_j|^{4\alpha(2\alpha+1)^{-1}} < \infty. \tag{3}$$

Более того, условие (3) *достаточно для выполнения* (2) *равномерно в интервале* $0 \le x \le$ $\le n^{\alpha}\rho(n)^{-1}$. *Если* $1/6 \le \alpha < 1/2$, *рассмотрим последовательность*

$$\{\frac{s+1}{2(s+3)} \mid s \in \mathbb{N}\}.$$

Пусть

$$\frac{s+1}{2(s+3)} \le \alpha < \frac{s+2}{2(s+4)}.$$

Если соотношение (2) *выполняется равномерно в интервале* $0 \le x \le n^{\alpha}\rho(n)$, *то выполнено* (3) , *и все моменты* $\mathbf{E}|\xi_j|^k$ *при* $k \le s+3$ *совпадают с моментами закона Гаусса.*

В последующих работах (С. В. Нагаев, Л. В. Осипов) удалось заменить $\rho(n)$ на 1.

3.2. Предельные теоремы для неоднородной цепи Маркова.

Проблема, заинтересовавшая Ю. В. Линника, восходит к исследованиям А. А. Маркова начала двадцатого века. В работе 1910 г. Марков рассматривает последовательность случайных величин $\{X_j\}$, связанных в неоднородную цепь Маркова с вероятностями перехода $p_{ij}^{(n)}$ и конечным числом состояний. Марков доказал, что если

$$\alpha(n) = \inf_{ij} p_{ij}^{(n)} \ge \alpha_0 > 0,$$

а число состояний равно двум, то к последовательности $\{X_j\}$ применима центральная предельная теорема (ЦПТ). Трудную задачу о применимости ЦПТ при нарушении его условий Марков оставил будущим исследователям.

Задача Маркова чрезвычайно заинтересовала С. Н. Бернштейна, который посвятил ей серию работ 20-30-х годов. Основной вопрос, рассмотренный в этих работах, сводится к следующему: может ли $\alpha(n)$ стремиться к нулю и если да, то как быстро? Пусть, например, $\alpha(n) \ge n^{-\beta}$. При каких показателях β выполняется ЦПТ? С. Н. Бернштейн показал, что условие $\beta \le 1/3$ необходимо. В серии работ 20-х годов С. Н. Бернштейн постепенно увеличивал показатель β: 1/7, 1/5,..., доведя его в итоге до $\beta \le 1/3$.

В перечисленных исследованиях всё время предполагалось, что число состояний равно двум, и это предположение было существенным. Проблема заключалась в том, что для цепей с бо́льшим числом состояний не удавалось доказать, что дисперсия сумм

$$\sum_{j=1}^{n} X_j$$

с ростом n растёт достаточно быстро. Вообще при изучении предельных распределений для сумм зависимых величин анализ роста дисперсии и по сю пору — один из труднейших и важнейших аспектов проблемы. Лишь в 1936 г. С. Н. Бернштейн, создав новый метод исследования цепей Маркова ("метод сечений"), установил точные нижние границы дисперсии

$$B_n^2 = \mathbf{D} \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

В 1949 г. Ю. В. Линник после глубокого обобщения метода сечений Бернштейна смог для цепей с произвольным конечным множеством состояний доказать достаточность условия $\beta \leq 1/3$. Тем самым 40-летняя история исследования задачи Маркова в определённом смысле завершилась.

3.3. Арифметика законов распределения.

Пусть X — случайная величина с функцией распределения F. Зададимся вопросом, когда X можно представить в виде суммы двух нетривиальных независимых случайных величин: $X = X_1 + X_2$. Так как функция распределения F есть свертка функций распределения F_1 и F_2 слагаемых X_1 и X_2, задаче можно придать следующую форму. Когда функцию распределения F можно представить в виде "произведения"$F = F_1 * F_2$ и каковы свойства множителей F_1, F_2? Так как свертке F_1 и F_2 соответствует произведение их характеристических функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то исходный вопрос эквивалентен следующему. Когда характеристическую функцию $f(t)$ распределения F можно представить в виде произведения$f(t) = f_1(t)f_2(t)$ и каковы свойства компонент $f_1(t), f_2(t)$?

В 1936-м Г. Крамер доказал, что компоненты разложения F_1 и F_2 закона Гаусса F необходимо являются законами Гаусса, а годом позже Д. А. Райков доказал сходную теорему о распределениях Пуассона: компоненты разложения F_1 и F_2 закона Пуассона F необходимо являются законами Пуассона. Множество I всех вероятностных распределений на прямой образуют полугруппу относительно операции свертки. Пусть $F \in I$; естественно назвать F простым элементом полугруппы I, если его нельзя представить в виде $F = F_1 * F_2$ с нетривиальными F_1, F_2 из I. Обозначим через I_0 подмножество вероятностных распределений, не имеющих простых делителей. Из теорем Г. Крамера и Д. А. Райкова следует, что множество I_0 не пусто. По теореме А. Я. Хинчина (1937 г.), любой элемент F полугруппы I представим в виде

$$F = F_0 * F_1 * F_2 * ...,$$

где $F_0 \in I_0$, а $F_1, F_2, ...$ суть простые множители. Более того, А. Я. Хинчин доказал, что элементы множества I_0 безграничны делимы. В частности, если $F \in I_0$, то характеристическая функция $f(t)$ распределения F представима в виде

$$f(t) = \exp[i\alpha t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}) dG(u)], \tag{4}$$

где $\{\alpha, \sigma\} \subseteq \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$, а G — монотонно не убывающая непрерывная в нуле функция ограниченной вариации. Гауссовскому распределению соответствует в разложении (4) тождественно равная нулю функция G; у распределения Пуассона $\sigma = 0$, а мера сосредочена в одной точке (отличной от нуля). Примерно таким было состояние арифметики законов распределения к 1940-му году, и вплоть до середины 1940-х годов, до работ Ю. В. Линника, ничего существенно нового здесь не прибавилось. В частности, были известны лишь два подмножества множества I_0 — множество распределений Гаусса и множество распределений Пуассона. Ю. В. Линник доказал, что всякая композиция законов Гаусса и Пуассона имеет своими делителями лишь композиции законов Гаусса и Пуассона. Доказательство этой теоремы в отличие от теорем Крамера и Райкова очень сложно. Впоследствии И. В. Островский нашёл более простые варианты доказательства, но и они достаточно сложны. Ю. В. Линник доложил об этом результате на семинаре В. И. Смирнова; во время его доклада кто-то сказал: "Я не понимаю, как Вы вообще могли до этого додуматься". Совершенно серьёзно и с некоторой гордостью Юрий Владимирович ответил: "Трое суток думал". Он действительно имел в виду трое суток, а не три дня. После результата о разложении законов Гаусса и Пуассона Ю. В. Линник занялся собственно арифметикой законов распределения, попытавшись разобраться в структуре множества I_0. В 1958 — 1959 гг. он публикует три большие работы под заглавием "Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов" , посвящённые исследованию структуры этого множества. В частности, он получает следующий замечательный результат, теорему о принадлежности классу I_0 законов с ненулевой гауссовой компонентой (т.е. с $\sigma > 0$). Назовём множеством Линника множество вида

$$\{\mu_k, \lambda_k \mid k \in \mathbb{Z}, \{\mu_{k+1}\mu_k^{-1}, \lambda_{k+1}\lambda_k^{-1}\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$$

при некоторых вещественных $\mu_0 > 0$ и $\lambda_0 < 0$.

Теорема 3. *Для того чтобы распределение с характеристической функцией, задаваемой равенством* (4) *с* $\sigma > 0$, *принадлежало множеству* I_0, *необходимо, чтобы носитель функции* G *был подмножеством некоторого множества Линника.*

Класс безгранично делимых законов с характеристической функцией, задаваемой равенством (4), у которых носитель функции G есть множество Линника называется классом Линника и обозначается через $\mathcal{L}$. Доказательство этой теоремы сложно и даже сейчас занимает около 50-ти страниц. Полное обращение этой теоремы невозможно. Ю. В. Линник привёл примеры законов класса $\mathcal{L}$, не принадлежащих I_0. В то же время он показал, что если в представлении (4) закона класса $\mathcal{L}$ функция $G(u)$ убывает достаточно быстро с ростом $|u|$, то этот закон принадлежит множеству I_0; в частности, если у какого-либо распределения F класса $\mathcal{L}$ носитель функции G ограничен, то $F \in I_0$. Активную работу над теорией разложений вероятностных законов Ю. В. Линник прекратил в 1960 г. Его работы, безусловно, знаменовали начало нового этапа в развитии этой теории, явились мощным импульсом её развития, не ослабевающим до сих пор. В этом легко убедиться, хотя бы вкратце просмотрев обзоры результатов, полученных в этой области за последующие годы. Мы процитируем лишь один результат, касающийся принадлежности распределений класса $\mathcal{L}$ множеству I_0. Ю. В. Линник высказал гипотезу, что законы класса $\mathcal{L}$, характеристические функции которых суть целые аналитические функции, принадлежат I_0. В 1986 г. в очень трудной работе Г. П. Чистяков доказал эту гипотезу. Объединив теорему Линника с теоремой Чистякова, мы приходим к следующему поразительному результату.

Теорема 4. *Для того чтобы безгранично делимое распределение с целой характеристической функцией, имеющее ненулевую гауссову компоненту, не имело простых делителей, необходимо и достаточно, чтобы оно принадлежало классу* $\mathcal{L}$.

3.4. Математическая статистика.

До работ Ю. В. Линника исследования по математическая статистике в городе на Неве практически не велись. Именно с именем Юрия Владимировича связано создание ленинградской школы математической статистики. Очень скоро вокруг него образовалась группа молодых учёных, его учеников и сотрудников (А. А. Зингер, А. М. Каган, О. В. Шалаевский, И. Р. Судаков, И. В. Романовский, А. Л. Рухин и др.). Остановимся совсем вкратце на одном цикле работ, выполненных Ю. В. Линником в последнее десятилетие его жизни, на работах, посвящённых статистическим задачам с параметрами, а именно проблеме Беренса — Фишера. Проблема заключается в следующем. Наблюдаются две выборки

$$X_1, ..., X_{n^{(1)}}; Y_1, ..., Y_{n^{(2)}}$$

из нормальных распределений с параметрами $(a_1, \sigma_1), (a_2, \sigma_2)$ соответственно. По этим выборкам надлежит проверить гипотезу

$$H : a_1 = a_2.$$

При этом о параметрах σ_1, σ_2 ничего не известно и ничего не предполагается (это мешающие параметры). Вся выборочная информация о четырёх параметрах содержится в четырёх статистиках (статистика:=функция наблюдений):

$$\bar{X} = \sum_{1 \le i \le n^{(1)}} X_i, \bar{Y} = \sum_{1 \le i \le n^{(2)}} Y_i, s_1^2 = \sum_{1 \le i \le n^{(1)}} (\bar{X} - X_i)^2, s_2^2 = \sum_{1 \le i \le n^{(2)}} (\bar{Y} - Y_i)^2,$$

и потому все критерии имеют вид

$$G(\bar{X}, \bar{Y}, s_1^2, s_2^2) \ge 0.$$

При некоторых дополнительных естественных предположениях эти критерии принимают вид

$$G(\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_2}, \frac{s_1}{s_2}) \ge 0.$$

В работах Ю. В. Линника и его сотрудников было доказано, что такие критерии существуют, но обязательно имеют плохие аналитические свойства границы критической зоны. Приведём, например, замечательный результат Юрия Владимировича относительно проблемы А. Вальда. Знаменитый американский статистик А. Вальд установил, что удовлетворяющие некоторым естественным статистическим требованиям критерии должны представляться в виде

$$\frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{s_2} \ge \varphi(\frac{s_1}{s_2}),$$

и поставил задачу построить такие критерии с аналитической функцией φ. Юрий Владимирович доказал, что не существует критериев Вальда не только с аналитической, но даже с дифференцируемой функцией φ !

Для исследования указанных выше задач Ю. В. Линник привлёк совершенно новые для статистики аналитические методы, в частности, теорию аналитических функций многих переменных, которые в статистике раньше никогда не применялись.

"Выдающийся талант Ю. В. Линника и совершенное владение аналитическими средствами современной математики позволили ему создать новое направление — направление, которое можно назвать "аналитической статистикой" "(акад. Ю. В. Прохоров).

Исследования Ю. В. Линника по аналитической статистике изложены им в двух монографиях [8], [9] .

4.

Эти заметки не претендуют на полноту. Полный список и подробный обзор работ Ю. В. Линника можно найти в посвящённом его памяти томе журнала Acta Arithmetica [1] и в его собрании сочинений [4] — [7].

То, что сделал Юрий Владимирович для своих учеников и, в частности, для авторов этих строк, трудно переоценить. Нам хотелось бы закончить нашу статью цитатой из известного стихотворения Н. А. Некрасова:

Учитель! перед именем твоим позволь смиренно преклонить колени!

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Acta Arithmetica, Том 27, 1975 г.

2. Виноградов А. И. Краткий очерк научной, педагогической и общественной деятельности Ю. В. Линника // Записки научных семинаров ПОМИ, Том 322, 2005 г. , стр. 5–9.

3. Ибрагимов И. А. Ю. В. Линник. Некоторые работы 50-х годов // Алгебра и Анализ, 3 (1991), 206-215.

4. Линник Ю. В. Избранные труды, Теория чисел (эргодический метод и L-функции) / Наука, М., 1979.

5. Линник Ю. В. Избранные труды, Теория чисел (L-функции и дисперсионный метод), / Наука, М., 1980.

6. Линник Ю. В. Избранные труды, Теория вероятностей / Наука, М.,1981.

7. Линник Ю. В. Избранные труды, Математическая статистика / Наука, М., 1982.

8. Линник Ю. В. Статистические задачи с мешающими параметрами / Наука, М., 1966.

9. Линник Ю. В. Лекции о задачах аналитической статистики / Физматлит, Наука, 1994.

REFERENCES

1. Acta Arithmetica, 1975, Vol 27.

2. Vinogradov A. I., 2005, "Kratkij ocherk nauchnoj, pedagogicheskoj i obshchestvennoj deyatel’nosti YU. V. Linnika" , *Zapiski nauchnyh seminarov POMI* Tom 322, pp. 5–9.

3. Ibragimov I. A., 1991, "YU.V.Linnik. Nekotorye raboty 50-h godov" , *Algebra i Analiz*, 3, 206-215.

4. Linnik YU. V., 1979, *Izbrannye trudy, Teoriya chisel (ehrgodicheskij metod i L-funkcii)*, Nauka, M.

5. Linnik YU. V., 1980, *Izbrannye trudy, Teoriya chisel (L-funkcii i dispersionnyj metod),* Nauka, M.

6. Linnik YU. V., 1981, *Izbrannye trudy, Teoriya veroyatnostej,* Nauka, M.

7. Linnik YU. V., 1982, *Izbrannye trudy, Matematicheskaya statistika,* Nauka, M.

8. Linnik YU. V., 1966, *Statisticheskie zadachi s meshayushchimi parametrami,* Nauka, M.

9. Linnik YU. V., 1994, *Lekcii o zadachah analiticheskoj statistiki,* Fizmatlit, Nauka.

Получено 05.07.2018
Принято к печати 10.10.2018