ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-183-198

Идентификация неоднородных характеристик преднапряженных пироматериалов[1]

Ватульян Александр Ованесович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. Воровича И.И. Южного федерального университета..
e-mail: vatulyan@math.rsu.ru
Нестеров Сергей Анатольевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Южного математического института – филиала ВНЦ РАН.
e-mail: 1079@list.ru

Аннотация

Функционально-градиентные пироматериалы находят широкое применение при создании различных диагностических приборов. Для правильного расчета устройств, использующих пироэффект, необходимо знание материальных характеристик. В случае неоднородных предварительно-напряженных тел прямые измерения материальных характеристик невозможны, поскольку они представляют собой некоторые функции координат. Нахождение характеристик неоднородных пироматериалов возможно только на основе аппарата коэффициентных обратных задач термоэлектроупругости (КОЗТ), который практически не разработан. В работе приведена постановка обратной задачи термоэлектроупругости для предварительно-напряженного функционально-градиентного стержня. Для этого на основе подхода, предложенного Гузем А.Н. для упругих тел, были получены уравнения термоэлектроупругости для предварительно-напряженного стержня. Проведено обезразмеривание задачи. Получена слабая постановка прямой задачи термоэлектроупругости. На основе слабой постановки и метода линеаризации получены операторные уравнения для решения обратной задачи на основе итерационного процесса. В ходе итерационного процесса поправки к восстанавливаемым характеристикам термоэлектроупругого стержня определялись из решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Прямая задача решалась на основе метода сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в трансформантах по Лапласу и использовании процедуры обращении, реализуемой в соответствии с теорией вычетов Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению характеристик, изменение которых оказывает существенное влияние на дополнительную информацию. В вычислительных экспериментах восстанавливалась одна из характеристик термоэлектроупругого стержня при известных остальных. Даны практические рекомендации по выбору наиболее информативных временных интервалов для измерения входной информации. Выяснено, что появление начальных напряжений существенно влияет на результаты реконструкции характеристик стержня.

Ключевые слова: преднапряжения, термоэлектроупругость, идентификация, обратная задача, стержень.

Библиография: 20 названий.

Для цитирования:
А. О. Ватульян, С. А. Нестеров. Идентификация неоднородных характеристик преднапряженных пироматериалов // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 183–198.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00354) и Южного математического института — филиала ВНЦ РАН.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 2

UDC 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-183-198

Identification of inhomogeneous characteristics of prestressed pyromaterials

Vatulyan Alexander Ovanesovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of elasticity theory, Institute of mathematics, mechanics and computer sciences I.I. Vorovich Southern Federal University.

e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Nesterov Sergey Anatolyevich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher of the Department of Differential Equations of the Southern Mathematical Institute, a branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.

e-mail: 1079@list.ru

Abstract

Functional gradient pyromaterials are found wide application in the creation of various diagnostic instruments. For correct calculation of devices using pyroeffect, you need knowledge material characteristics. In the case of inhomogeneous pre-stressed bodies, direct measurements of material characteristics are impossible, since they represent some functions of the coordinates. Finding characteristics heterogeneous pyromaterials is possible only on the basis of apparatus coefficient inverse problems of thermoelectroelasticity (KOZT), which practically not developed. The paper presents the formulation of the inverse problem thermoelectroelasticity for prestressed functional gradient rod. For this, based on the approach, proposed by Guzem AN, the equations of thermoelectroelasticity for prestressed rod. The problem is dimensioned. A weak formulation of the direct problem of thermoelectroelasticity is obtained. Based weak formulation and the linearization method, the operator equations for solution of the inverse problem on the basis of the iterative process. During the course of Iteration process correction to recoverable characteristics thermoelectroelastic rod were determined from the solution of integral equations Fredholm of the first kind. A direct problem was solved on the basis of the method of reduction to system of Fredholm integral equations of the second kind in transformants in Laplace and the use of the treatment procedure implemented in accordance with The theory of residues A series of computational experiments on The restoration of characteristics, the change of which has an essential influence on additional information. In computational experiments one of the characteristics of a thermoelectroelastic rod under known others. Practical recommendations for choosing the most informative time intervals for measuring the input information. It was found that the appearance of initial stresses significantly affects results of reconstruction of the characteristics of the rod.

Keywords: prestressing, thermoelectroelasticity, identification, inverse problem, rod.

Bibliography: 20 titles.

For citation:

A. O. Vatulyan, S. A. Nesterov, 2018, "Identification of inhomogeneous characteristics of prestressed pyromaterials" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 183–198.

1. Введение

При создании различных диагностических приборов широко используются пироэлектрические материалы благодаря наличию эффекта взаимной связанности электрического, теплового и упругого полей [1]. Для описания механического поведения пироматериалов используют полученные Миндлиным в начале 60-х гг. XX века уравнения связанной термоэлектроупругости [2].

В настоящее время все чаще для улучшения работы устройств на основе пироэффекта используются функционально-градиентные пироматериалы (ФГМП) – композиты, обладающие переменными физическими свойствами. Однако решения задач термоэлектроупругости для функционально-градиентных материалов получены в основном для степенных и экспоненциальных законов неоднородности [3-7]. В статье [8] предложен подход к решению задачи о тепловом ударе по функционально-градиентному слою при произвольных законах распределения неоднородности материальных характеристик слоя. Метод решения основан на сведении к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в трансформантах Лапласа и нахождении оригиналов на основе теории вычетов. Часто в результате технологической обработки, поляризации, неоднородной пластической деформации, воздействия больших тепловых нагрузок во многих элементах устройств из пироматериалов могут возникать предварительные напряжения. В расчетах очень важен учет преднапряжений, которые могут достигать больших значений и привести к разрушению конструкции.

Для описания механического поведения устройств, использующих неоднородные преднапряженные пироматериалы, необходимо знание материальных характеристик материалов, которые представляют собой некоторые функции координат. В этом случае измерения материальных характеристик на основе макроэкспериментов невозможно. Материальные характеристики в случае неоднородных тел определяются только на основе решения коэффициентных обратных задач (КОЗ) [9], которые в случае термоэлектроупругих тел не разработаны. Это связано с существенной нелинейностью этих задач и сложностью построения операторных уравнений, связывающих измеряемые и восстанавливаемые функции.

В последние годы для решения обратных задач механики связанных полей используется итерационный подход, основанный на построении итерационного процесса, на каждом этапе которого решается линеаризованное операторное уравнение 1-го рода [9]. На основе такого подхода была проведена идентификация характеристик преднапряженных и функционально-градиентных материалах в упругих и электроупругих телах [9-13]. В [14-16] представлено решение КОЗ термоупругости для стержня и цилиндра. Использовано два способа нагружения термоупругих тел — тепловой и механический, а дополнительной информацией были данные измерений температуры или смещения на некотором временном интервале на части границы тела. В [17] рассмотрена особенность идентификации характеристик термоэлектроупругого стержня. Однако в проведенных исследованиях не учитывалось влияние преднапрояжений и измерительной погрешности на результаты идентификации неоднородных характеристик.

В данной работе подход, разработанный в [18], распространен на решение обратной задачи для функционально-градиентного предварительно-напряженного термоэлектроупругого стержня. С этой целью, на основе подхода, разработанного Гузем А.Н. [19], были получены уравнения термоэлектроупругости для преднапряженного стержня из пьезокерамики класса 6 mm. Для решения обратной задачи термоэлектроупругости на основе итерационного процесса были получены операторные уравнения 1-го рода, связывающие искомые и измеряемые функции. Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению характеристик, изменение которых оказывает существенное влияние на дополнительную информацию. В вычислительных экспериментах восстанавливалась одна из характеристик термоэлектроупругого стержня при известных остальных. Даны практические рекомендации по выбору наиболее информативных временных интервалов для измерения входной информации. Сделан анализ

влияния предварительных напряжений и малых параметров связанности на результаты реконструкции термоэлектроупругих характеристик стержня.

2. Постановка обратной задачи термоэлектроупругости

Рассмотрим динамическую задачу термоэлектроупругости для неоднородного преднапряженного стержня из пьезокерамики класса $6mm$ длины l, поляризованного вдоль оси x_3. В соответствии с моделью, предложенной Гузем А.Н., уравнения связанной термоэлектроупругости для преднапряженного стержня в предположении об одномерности исследуемого процесса ($u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = u(x_3, t)$, $\theta = \theta(x_3, t)$, $\varphi = \varphi(x_3, t)$) имеют вид:

$$\frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial D_3}{\partial x_3} = 0, \tag{2}$$

$$-\frac{\partial q_3}{\partial x_3} + T_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

а определяющие соотношения представимы в форме:

$$T_{33} = c_{33} \frac{\partial u}{\partial x_3} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \gamma\theta + \sigma^0_{33} \frac{\partial u}{\partial x_3}, \tag{4}$$

$$D_3 = e_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + g_3\theta - \Sigma_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \tag{5}$$

$$q_3 = -k_{33}\theta, \tag{6}$$

$$\eta = \gamma_{33} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{c_\varepsilon}{T_0}\theta - g_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}. \tag{7}$$

Здесь $T_{33}(x_3, t)$ — компонента добавочного тензора напряжений Пиолы, σ^0_{33} — компонента тензора предварительных напряжений, которая удовлетворяет уравнению равновесия $\frac{d\sigma^0_{33}}{dx_3} = 0$, $D_3(x_3, t)$ — компонента вектора электрической индукции, $\eta(x_3, t)$ – энтропия, $q_3(x_3, t)$ — плотность теплового потока, $u(x_3, t)$ — перемещение, $\theta(x_3, t)$ — приращение температуры от естественного состояния с температурой T_0, $\varphi(x_3, t)$ — электрический потенциал, $c_{33}(x_3)$ — компонента тензора модулей упругости, $\rho(x_3)$ — плотность, $c_\varepsilon(x_3)$ — удельная объемная теплоемкость, $k_{33}(x_3)$ — коэффициент теплопроводности, $\gamma_{33}(x_3)$ — коэффициент температурных напряжений, $e_{33}(x_3)$ — пьезокоэффициент, $\Sigma_{33}(x_3)$ — диэлектрическая проницаемость, $g_3(x_3)$ — пирокоэффициент.

Для однозначного решения задачи (1)–(7) необходимо задать граничные и начальные условия. Пусть один торец стержня $x_3 = 0$ жестко защемлен, закорочен и поддерживается при нулевой температуре, а на другом торце $x_3 = l$ действует тепловая нагрузка $q(t)$ или механическая нагрузка $p(t)$.

С математической точки зрения граничные условия имеют вид:

а) механические

$$u(0, t) = 0, \quad (c_{33} \frac{\partial u}{\partial x_3} + e_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} - \gamma_{33}\theta + \sigma^0_{33} \frac{\partial u}{\partial x_3})|_{x_3 = l} = p(t), \tag{8}$$

б) тепловые

$$\theta(0, t) = 0, \quad -k_{33}(x_3) \frac{\partial \theta}{\partial x_3}|_{x_3 = l} = q(t), \tag{9}$$

в) электрические

$$\varphi(0,t)=0, \quad \varphi(l,t)=0. \tag{10}$$

Начальные условия — нулевые:

$$\theta(x,0)=u(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0. \tag{11}$$

Подставим определяющие соотношения (4)–(7) в уравнения (1)–(3) и проведем обезразмеривание полученной начально-краевой задачи, введя обозначения:

$$z=\tfrac{x_3}{l}, \quad U=\tfrac{u}{l}, \quad W=\tfrac{\theta}{\theta_0}, \quad \theta_0=\sqrt{\tfrac{T_0 c_{33}(0)}{c_\varepsilon(0)}},$$
$$Q(\tau)=\tfrac{q}{q_0}, \quad q_0=\tfrac{k_{33}(0)\theta_0}{l}, \quad V=\tfrac{\varphi}{\varphi_0}, \quad \varphi_0=\sqrt{\tfrac{c_{33}(0)l}{\Sigma_{33}(0)}},$$
$$\varepsilon=\tfrac{t_1}{t_2}, \quad t_1=\tfrac{l}{\nu}, \quad t_2=\tfrac{c_\varepsilon(0)l^2}{k_{33}(0)}, \quad \nu=\sqrt{\tfrac{c_{33}(0)}{\rho(0)}}, \quad \tau=\tfrac{t}{t_2}, \quad \bar\rho(z)=\tfrac{\rho(x_3)}{\rho(0)}$$
$$\bar\rho(z)=\tfrac{\rho(x_3)}{\rho(0)}, \quad \bar s(z)=\tfrac{c_{33}(x_3)}{c_{33}(0)}, \quad \bar k(z)=\tfrac{k_{33}(x_3)}{k_{33}(0)}, \quad \bar c(z)=\tfrac{c_\varepsilon(x_3)}{c_\varepsilon(0)},$$
$$\bar\Sigma(z)=\tfrac{\Sigma_{33}(x_3)}{\Sigma_{33}(0)}, \quad \bar\gamma(z)=\tfrac{\gamma_{33}(x_3)}{\gamma_{33}(0)}, \quad \bar e(z)=\tfrac{e_{33}(x_3)}{e_{33}(0)}, \quad \bar g(z)=\tfrac{g_3(x_3)}{g_3(0)},$$
$$d_1=\tfrac{e_{33}(0)}{\sqrt{c_{33}(0)\Sigma_{33}(0)}}, \quad d_2=\gamma_{33}(0)\sqrt{\tfrac{T_0}{c_{33}(0)c_\varepsilon(0)}}, \quad d_3=g_3(0)\sqrt{\tfrac{T_0}{\Sigma_{33}(0)}},$$
$$\Omega_z=\tfrac{\sigma_{33}(x_3)}{c_{33}(0)}, \quad \Omega_z^0=\tfrac{\sigma_{33}^0(x_3)}{c_{33}(0)}, \quad P(\tau)=\tfrac{p(t)}{c_{33}(0)}. \tag{12}$$

После преобразований и обезразмеривания (12) задача (1)–(11) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\bar s(z)\frac{\partial U}{\partial z})+d_1\frac{\partial}{\partial z}(\bar e(z)\frac{\partial V}{\partial z})-d_2\frac{\partial}{\partial z}(\bar\gamma(z)W)+\frac{\partial}{\partial z}(\Omega_z^0\frac{\partial U}{\partial z})=\varepsilon^2\bar\rho\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}, \tag{13}$$

$$d_1\frac{\partial}{\partial z}(\bar e(z)\frac{\partial U}{\partial z})-\frac{\partial}{\partial z}(\bar\Sigma(z)\frac{\partial V}{\partial z})+d_3\frac{\partial}{\partial z}(\bar g(z)W)=0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\bar k(z)\frac{\partial W}{\partial z})-\bar c(z)\frac{\partial W}{\partial\tau}-d_2\bar\gamma(z)\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial\tau}+d_3\bar g(z)\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\tau}=0, \tag{15}$$

$$U(0,\tau)=0, \quad \Omega_z(1,\tau)=P(\tau), \tag{16}$$

$$W(0,\tau)=0, \quad -\bar k(1)\frac{\partial W}{\partial z}(1,\tau)=Q(\tau), \tag{17}$$

$$V(0,\tau)=V(1,\tau)=0, \tag{18}$$

$$W(z,0)=U(z,0)=\frac{\partial U}{\partial\tau}(z,0)=0. \tag{19}$$

Прямая задача термоэлектроупругости заключается в определении функций U, W, V из (13)–(19) при известных характеристиках $\bar s(z)$, $\bar\rho(z)$, $\bar\gamma(z)$, $\bar c(z)$, $\bar k(z)$, $\bar\Sigma(z)$, $\bar e(z)$, $\bar g(z)$ и преднапряжении $\Omega_z^0=const$. В работе задача (13)–(19) после применения преобразования Лапласа решается численно на основе аппарата интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода и обращении трансформант на основе теории вычетов, аналогично как это сделано в [8].

Обратная задача термоэлектроупругости заключается в одновременном определении характеристик $\bar s(z)$, $\bar\rho(z)$, $\bar\gamma(z)$, $\bar c(z)$, $\bar k(z)$, $\bar\Sigma(z)$, $\bar e(z)$, $\bar g(z)$, Ω_z^0 из (13)–(19) по дополнительной информации, измеренной на торце стержня $z=1$. В качестве дополнительной информации выступают данные :

о смещении

$$U(1,\tau)=f_1(\tau), \quad \tau\in[a_1,b_1], \tag{20}$$

или приращении температуры

$$W(1,\tau)=f_2(\tau), \quad \tau\in[a_2,b_2]. \tag{21}$$

3. Формулировка операторных уравнений

КОЗ термоэлектроупругости — нелинейная задача, решение которой построим на основе итерационного процесса [17], на каждом этапе которого решается операторное уравнение 1-го рода. Получим операторные уравнения на основе слабой постановки прямой задачи термоэлектроупругости в трансформантах по Лапласу. Для этого сначала применив к уравнениям (13)–(15) и граничным условиям (16)–(18) преобразование Лапласа по времени, учитывая начальные условия (19), получим:

$$\frac{d}{dz}(\bar{s}(z)\frac{d\tilde{U}}{dz}) + d_1\frac{d}{dz}(\bar{e}(z)\frac{d\tilde{V}}{dz}) - d_2\frac{d}{dz}(\bar{\gamma}(z)\tilde{W}) + \frac{d}{dz}(\Omega_{33}^0\frac{d\tilde{U}}{dz}) = \varepsilon^2 p^2\bar{\rho}(z)\tilde{U}, \tag{22}$$

$$d_1\frac{d}{dz}(\bar{e}(z)\frac{d\tilde{U}}{dz}) - \frac{d}{dz}(\bar{\Sigma}(z)\frac{d\tilde{V}}{dz}) + d_3\frac{d}{dz}(\bar{g}(z)\tilde{W}) = 0, \tag{23}$$

$$\frac{d}{dz}(\bar{k}(z)\frac{d\tilde{W}}{dz}) - p\bar{c}(z)\tilde{W} - pd_2\bar{\gamma}(z)\frac{d\tilde{U}}{dz} + pd_3\bar{g}(z)\frac{d\tilde{V}}{dz} = 0, \tag{24}$$

$$\tilde{U}(0,p) = 0, \quad \tilde{\Omega}_z(1,p) = \tilde{P}(p), \tag{25}$$

$$\tilde{W}(0,p) = 0, \quad -\bar{k}(1)\frac{d\tilde{W}}{dz}(1,p) = \tilde{Q}(p), \tag{26}$$

$$\tilde{V}(0,p) = \tilde{V}(1,p) = 0. \tag{27}$$

Здесь знак "тильда"обозначает трансформанту Лапласа соответствующей функции, p — параметр преобразования Лапласа. Введем в рассмотрение гладкие пробные функции $\tilde{v}$, $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{\psi}$, удовлетворяющие главным граничным условиям в трансформантах $\tilde{v}(0,p) = 0$, $\tilde{\vartheta}(0,p) = 0$, $\tilde{\psi}(0,p) = 0$. **Определение.** Слабым решением задачи (22)–(27) будем называть функции $\tilde{v}$, $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{\psi}$, удовлетворяющие равенству (28) при произвольных гладких функциях $\tilde{v}$, $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{\psi}$.

$$A(\bar{a}, \tilde{U}, \tilde{v}) = B(\tilde{v}), \tag{28}$$

Здесь

$$A(\bar{a}, \tilde{U}, \tilde{v}) = p^2\int_0^1 \bar{\rho}(z)\tilde{U}\tilde{v}dz - \int_0^1 (\bar{s}(z) + \Omega_z^0)\frac{d\tilde{U}}{dz}\frac{d\tilde{v}}{dz}dz +$$
$$+d_1\int_0^1 (\bar{e}(z)\frac{d\tilde{V}}{dz}\frac{d\tilde{v}}{dz} + \frac{d\tilde{\psi}}{dz}\frac{d\tilde{U}}{dz})dz - \int_0^1 \bar{\Sigma}(z)\frac{d\tilde{V}}{dz}\frac{d\tilde{\psi}}{dz}dz - \frac{1}{p}\int_0^1 \bar{k}(z)\frac{d\tilde{W}}{dz}\frac{d\tilde{\vartheta}}{dz}dz + \int_0^1 \bar{c}(z)\tilde{W}\tilde{\vartheta}dz +$$
$$+d_2\int_0^1 \bar{\gamma}(z)(\frac{d\tilde{v}}{dz}\tilde{W} + \frac{d\tilde{U}}{dz}\tilde{\vartheta})dz - d_3\int_0^1 \bar{g}(z)\frac{d\tilde{V}}{dz}\tilde{\vartheta}dz \tag{29}$$

— трилинейная форма, т.е. форма линейная по коэффициентам дифференциальных операторов $\bar{a}(\bar{s}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$, $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\Sigma}(z)$, $\bar{e}(z)$, $\bar{g}(z)$, $\Omega_z^0)$, трансформантам физических полей ($\tilde{U}$, $\tilde{W}$, $\tilde{V}$) и пробным функциям ($\tilde{v}$, $\tilde{\vartheta}$, $\tilde{\psi}$).

Утверждение. Из задачи (22)–(27) следует слабая постановка(28).

Доказательство. Применим метод множителей Лагранжа. Умножим уравнение (22) на $\tilde{v}$, уравнение (23) на $\beta_1\tilde{\psi}$, уравнение (24) на $\beta_2\tilde{\vartheta}$ и проинтегрируем их на отрезке $[0,1]$. Аналогично поступим с граничными условиями (24)–(26): условие $\tilde{\Omega}_z(1,p) = \tilde{P}(p)$ умножим на $\beta_3\tilde{v}$,

$\tilde V(1,p)=0$ на $\beta_4\tilde\psi$, $-\bar k(1)\frac{d\tilde W}{dz}(1,p)=\tilde Q(p)$ на $\beta_5\tilde\vartheta$. Сложив все построенные функционалы, и, используя формулу интегрирования по частям, получим:

$$p^2\int_0^1\bar\rho\tilde U\tilde v dz-\int_0^1(\bar s(z)+\Omega_z^0)\frac{d\tilde U}{dz}\frac{d\tilde v}{dz}dz+d_2\int_0^1\bar\gamma(z)\frac{d\tilde v}{dz}\tilde W dz+d_1\int_0^1\bar e(z)\frac{d\tilde V}{dz}\frac{d\tilde v}{dz}dz+$$
$$+\beta_1\int_0^1(d_1\bar e(z)\frac{d\tilde U}{dz}+\bar g(z)\tilde W-\bar\Sigma\frac{d\tilde V}{dz})\frac{d\tilde\psi}{dz}dz+\beta_2\int_0^1\bar k(z)\frac{d\tilde W}{dz}\frac{d\tilde\vartheta}{dz}dz-$$
$$-\beta_2 p\int_0^1(d_2\bar\gamma(z)\frac{d\tilde U}{dz}+\bar c(z)\tilde W-d_3\bar g(z)\frac{d\tilde V}{dz})\tilde\vartheta dV+((1+\beta_3)\tilde\Omega_z(1)-\beta_3\tilde P)\tilde v(1)+$$
$$+(\beta_1+\beta_4)\tilde D(1)\tilde\psi+((\beta_2+\beta_5)\tilde Q-\beta_5\tilde Q)\tilde\vartheta(1)=0. \qquad (30)$$

Полагая в (30) $\beta_1=1$, $\beta_2=-\frac{1}{p}$, $\beta_3=\beta_4=-1$, $\beta_5=\frac{1}{p}$ получим:

$$p^2\int_0^1\bar\rho(z)\tilde U\tilde v dz-\int_0^1(\bar s(z)+\Omega_z^0)\frac{d\tilde U}{dz}\frac{d\tilde v}{dz}dz+d_1\int_0^1\bar e(z)(\frac{d\tilde V}{dz}\frac{d\tilde v}{dz}+\frac{d\tilde\psi}{dz}\frac{d\tilde U}{dz})dz-$$
$$-\int_0^1\bar\Sigma(z)\frac{d\tilde V}{dz}\frac{d\tilde\psi}{dz}dz-\frac{1}{p}\int_0^1\bar k(z)\frac{d\tilde W}{dz}\frac{d\tilde\vartheta}{dz}dz+\int_0^1\bar c(z)\tilde W\tilde\vartheta dz+$$
$$+d_2\int_0^1\bar\gamma(z)(\frac{d\tilde v}{dz}\tilde W+\frac{d\tilde U}{dz}\tilde\vartheta)dz-d_3\int_0^1\bar g(z)\frac{d\tilde V}{dz}\tilde\vartheta dz=\tilde P\tilde v(1,p)+\frac{1}{p}\tilde Q\tilde\vartheta(1,p). \qquad (31)$$

Слабая постановка (31) позволяет построить итерационный процесс для решения нелинейной обратной задачи. Для этого получим два операторных соотношения. Для получения первого соотношения, положив в (31) $\tilde\vartheta=0$, имеем:

$$p^2\int_0^1\bar\rho(z)\tilde U\tilde v dz-\int_0^1(\bar s(z)+\Omega_z^0)\frac{d\tilde U}{dz}\frac{d\tilde v}{dz}dz+d_1\int_0^1\bar e(z)(\frac{d\tilde V}{dz}\frac{d\tilde v}{dz}+\frac{d\tilde\psi}{dz}\frac{d\tilde U}{dz})dz+$$
$$-\int_0^1\bar\Sigma(z)\frac{d\tilde V}{dz}\frac{d\tilde\psi}{dz}dz+d_2\int_0^1\bar\gamma(z)\frac{d\tilde v}{dz}\tilde W dz=\tilde P\tilde v(1,p). \qquad (32)$$

Для получения второго соотношения, положив в (31) $\tilde v=0$, имеем:

$$-\int_0^1\bar\Sigma(z)\frac{d\tilde V}{dz}\frac{d\tilde\psi}{dz}dz-\frac{1}{p}\int_0^1\bar k(z)\frac{d\tilde W}{dz}\frac{d\tilde\vartheta}{dz}dz+\int_0^1\bar c(z)\tilde W\tilde\vartheta dz+$$
$$+d_2\int_0^1\bar\gamma(z)\frac{d\tilde U}{dz}\tilde\vartheta dz-d_3\int_0^1\bar g(z)\frac{d\tilde V}{dz}\tilde\vartheta dz=\frac{1}{p}\tilde Q\tilde\vartheta(1,p). \qquad (33)$$

Будем различать два состояния: первое состояние с компонентами $\bar s^{(1)}$, $\bar\rho^{(1)}$, $\bar\gamma^{(1)}$, $\bar c^{(1)}$, $\bar k^{(1)}$, $\bar\Sigma^{(1)}$, $\bar e^{(1)}$, $\bar g^{(1)}$, $\tilde U^{(1)}$, $\tilde W^{(1)}$, $\tilde V^{(1)}$, $\tilde v^{(1)}$, $\tilde\vartheta^{(1)}$, $\tilde\psi^{(1)}$, второе — соответственно $\bar s^{(2)}$, $\bar\rho^{(2)}$, $\bar\gamma^{(2)}$, $\bar c^{(2)}$, $\bar k^{(2)}$, $\bar\Sigma^{(2)}$, $\bar e^{(2)}$, $\bar g^{(2)}$, $\tilde U^{(2)}$, $\tilde W^{(2)}$, $\tilde V^{(2)}$, $\tilde v^{(2)}$, $\tilde\vartheta^{(2)}$, $\tilde\psi^{(2)}$. На отрезке $[0,1]$ для каждого состояния выполнены

соотношения (32), (33). Найдя разность соотношений (32) и (33) для каждого из состояний, и полагая в этих разностях $\tilde{v}^{(1)} = \tilde{U}^{(2)}$, $\tilde{v}^{(2)} = \tilde{U}^{(1)}$, $\tilde{\vartheta}^{(1)} = \tilde{W}^{(2)}$, $\tilde{\vartheta}^{(2)} = \tilde{W}^{(1)}$, $\tilde{\psi}^{(1)} = \tilde{V}^{(2)}$, $\tilde{\psi}^{(2)} = \tilde{V}^{(1)}$, получим:

$$p^2 \int_0^1 (\bar{\rho}^{(1)} - \bar{\rho}^{(2)})\tilde{U}^{(1)}\tilde{U}^{(2)}dz - \int_0^1 ((\bar{s} + \Omega_z^0)^{(1)} - (\bar{s} + \Omega_z^0)^{(2)})\frac{d\tilde{U}^{(1)}}{dz}\frac{d\tilde{U}^{(2)}}{dz}dz +$$
$$\int_0^1 d_1(\bar{e}^{(1)}\frac{d\tilde{V}^{(1)}}{dz}\frac{d\tilde{U}^{(2)}}{dz} - \bar{e}^{(2)}\frac{d\tilde{V}^{(2)}}{dz}\frac{d\tilde{U}^{(1)}}{dz})dz + \int_0^1 d_2(\bar{\gamma}^{(1)}\tilde{W}^{(2)}\frac{d\tilde{U}^{(1)}}{dz} - \bar{\gamma}^{(2)}\tilde{W}^{(1)}\frac{d\tilde{U}^{(2)}}{dz})dz +$$
$$+ \int_0^1 (\bar{\Sigma}^{(1)} - \bar{\Sigma}^{(2)})\frac{d\tilde{V}^{(1)}}{dz}\frac{d\tilde{V}^{(1)}}{dz}dz = \tilde{P}(\tilde{U}^{(2)}(1) - \tilde{U}^{(1)}(1)), \quad (34)$$

$$\int_0^1 d_1(\bar{e}^{(1)}\frac{d\tilde{V}^{(1)}}{dz}\frac{d\tilde{U}^{(2)}}{dz} - \bar{e}^{(2)}\frac{d\tilde{V}^{(2)}}{dz}\frac{d\tilde{U}^{(1)}}{dz})dz + \int_0^1 (\bar{\Sigma}^{(1)} - \bar{\Sigma}^{(2)})\frac{d\tilde{V}^{(1)}}{dz}\frac{d\tilde{V}^{(2)}}{dz}dz +$$
$$+d_1 \int_0^1 (\bar{\gamma}^{(1)}\tilde{W}^{(2)}\frac{d\tilde{U}^{(1)}}{dz} - \bar{\gamma}^{(2)}\tilde{W}^{(1)}\frac{d\tilde{U}^{(2)}}{dz})dz + \int_0^1 (\bar{c}^{(1)} - \bar{c}^{(2)})\tilde{W}^{(1)}\tilde{W}^{(2)}dz -$$
$$-\frac{1}{p}\int_0^1 (\bar{k}^{(1)} - \bar{k}^{2)})\frac{d\tilde{W}^{(1)}}{dz}\frac{d\tilde{W}^{(2)}}{dz}dz - \int_0^1 d_3(\bar{g}^{(1)}\frac{d\tilde{V}^{(1)}}{dz}\tilde{W}^{(2)} - \bar{g}^{(2)}\frac{d\tilde{V}^{(2)}}{dz}\tilde{W}^{(1)})dz =$$
$$\frac{1}{p}\tilde{Q}(\tilde{W}^{(1)}(1) - \tilde{W}^{(2)}(1)) \quad (35)$$

4. Формулировка итерационного процесса

Полученные соотношения (34), (35) можно трактовать как нелинейные операторные соотношения для решения обратной задачи в пространстве трансформант. Проведем линеаризацию уравнений (34), (35), положив

$$\tilde{W}^{(1)} = \tilde{W}^{(n-1)}, \quad \tilde{W}^{(2)} = \tilde{W}^{(n-1)} + \delta\tilde{W}^{(n-1)}, \quad \tilde{U}^{(1)} = \tilde{U}^{(n-1)}, \quad \tilde{U}^{(2)} = \tilde{U}^{(n-1)} + \delta\tilde{U}^{(n-1)},$$
$$\tilde{V}^{(1)} = \tilde{V}^{(n-1)}, \quad \tilde{V}^{(2)} = \tilde{V}^{(n-1)} + \delta\tilde{V}^{(n-1)}, \quad \bar{s}^{(1)} = \bar{s}^{(n-1)}, \quad \bar{s}^{(2)} = \bar{s}^{(n-1)} + \delta\bar{s}^{(n-1)},$$
$$\bar{k}^{(1)} = \bar{k}^{(n-1)}, \quad \bar{k}^{(2)} = \bar{k}^{(n-1)} + \delta\bar{k}^{(n-1)}, \quad \bar{c}^{(1)} = \bar{c}^{(n-1)}, \quad \bar{c}^{(2)} = \bar{c}^{(n-1)} + \delta\bar{c}^{(n-1)},$$
$$\bar{\gamma}^{(1)} = \bar{\gamma}^{(n-1)}, \quad \bar{\gamma}^{(2)} = \bar{\gamma}^{(n-1)} + \delta\bar{\gamma}^{(n-1)}, \quad \bar{\Sigma}^{(1)} = \bar{\Sigma}^{(n-1)}, \bar{\Sigma}^{(2)} = \bar{\Sigma}^{(n-1)} + \delta\bar{\Sigma}^{(n-1)},$$
$$\bar{e}^{(1)} = \bar{e}^{(n-1)}, \quad \bar{e}^{(2)} = \bar{e}^{(n-1)} + \delta\bar{e}^{(n-1)}, \quad \bar{g}^{(1)} = \bar{g}^{(n-1)},$$
$$\bar{g}^{(2)} = \bar{g}^{(n-1)} + \delta\bar{g}^{(n-1)}, \quad \bar{\rho}^{(1)} = \bar{\rho}^{(n-1)}, \quad \bar{\rho}^{(2)} = \bar{\rho}^{(n-1)} + \delta\bar{\rho}^{(n-1)}, \quad (36)$$

и, сохраняя в соотношениях (36) линейные слагаемые, с учетом дополнительной информации, получим:

$$p^2\int_0^1 \delta\bar{\rho}^{(n-1)}(\tilde{U}^{(n-1)})^2dz - \int_0^1 \delta(\bar{s}+\Omega_z^0)^{(n-1)}(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz})^2dz + \\ +2d_1\int_0^1 \delta\bar{e}^{(n-1)}\frac{d\tilde{V}^{(n-1)}}{dz}\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}dz + d_2\int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)}\tilde{W}^{(n-1)}\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}dz + \\ + \int_0^1 \delta\bar{\Sigma}^{(n-1)}(\frac{d\tilde{V}^{(n-1)}}{dz})^2dz = \tilde{P}(\tilde{f}_1(p) - \tilde{U}^{(1)}(1,p)), \tag{37}$$

$$pd_1\int_0^1 \delta\bar{e}^{(n-1)}\frac{d\tilde{V}^{(n-1)}}{dz}\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}dz \\ +p\int_0^1 d\bar{\Sigma}^{(n-1)}(\frac{d\tilde{V}^{(n-1)}}{dz})^2dz + pd_2\int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)}\tilde{W}^{(n-1)}\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}dz + \\ +p\int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)}(\tilde{W}^{(n-1)})^2dz - pd_3\int_0^1 \delta\bar{g}^{(n-1)}\frac{d\tilde{V}^{(n-1)}}{dz}\tilde{W}^{(n-1)}dz + \\ + \int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)}(\frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz})^2dz = \tilde{Q}(\tilde{f}_2(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1,p)). \tag{38}$$

Отметим, что уравнений (37), (38) вообще говоря недостаточно для однозначного определения всего набора искомых характеристик, однако в случае если неизвестной является только одна характеристика при известных остальных, то в этом случае достаточно одного уравнения. Так, при механическом способе нагружения торца стержня силой $P(\tau) = H(\tau)$ операторное уравнение для нахождения поправок упругого модуля $\delta\bar{s}^{(n-1)}$ на $(n-1)$-ой итерации будет иметь вид:

$$\int_0^1 \delta\bar{s}^{(n-1)}(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz})^2dz = \frac{1}{p}(\tilde{f}_1(p) - \tilde{U}^{(n-1)}(1,p)), \tag{39}$$

Уравнение для нахождения поправок пьезомодуля $\delta\bar{e}^{(n-1)}$ на $(n-1)$-ой итерации будет иметь вид:

$$d_1\int_0^1 \delta\bar{e}^{(n-1)}\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}\frac{d\tilde{V}^{(n-1)}}{dz}dz = \frac{1}{p}(\tilde{f}_1(p) - \tilde{U}^{(n-1)}(1,p)). \tag{40}$$

При тепловом способе нагружения торца стержня потоком $Q(\tau) = H(\tau)$ операторное уравнение для нахождения поправок коэффициента теплопроводности $\delta\bar{k}^{(n-1)}$ на $(n-1)$-ой итерации будет иметь вид:

$$\int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)}(\frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz})^2dz = \frac{1}{p}(\tilde{f}_2(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1,p)). \tag{41}$$

Для нахождения поправок удельной теплоемкости $\delta\bar{c}^{(n-1)}$ в трансформантах на $(n-1)$-ой итерации необходимо решать интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода:

$$p\int\limits_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)}(\tilde{W}^{(n-1)})^2 dz = \frac{1}{p}(\tilde{f}_2(p) - \tilde{W}^{(n-1)}(1,p)). \tag{42}$$

Для нахождения поправок удельной теплоемкости $\delta c^{(n-1)}$ на $(n-1)$-ой итерации в оригиналах применим к (42) теоремы операционного исчисления о свертке и о дифференцировании оригинала. Тогда операторное уравнение в оригиналах будет иметь вид:

$$\int\limits_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} R(z,\tau)dz = f_2(\tau) - W^{(n-1)}(1,\tau), \qquad \tau \in [a_2, b_2]. \tag{43}$$

Здесь ядро интегрального уравнения (43) имеет вид:

$$R(z,\tau) = \int\limits_0^\tau \frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial\tau}(z,\tau)\frac{\partial W^{(n-1)}}{\partial\tau}(z,\tau-\tau_1)d\tau_1.$$

Итерационный процесс стартует с некоторого начального приближения. В работе начальное приближение для каждого коэффициента определяется в классе положительных ограниченных линейных функций на основе минимизации функционала невязки, вид которого зависит от способа нагружения стержня. В случае только механического нагружения стержня силой $P(\tau)$, функционал невязки имеет вид:

$$J_1^{(n-1)} = \int\limits_{a_1}^{b_1} (f_1(\tau) - U^{(n-1)}(1,\tau))^2 d\tau. \tag{44}$$

В случае нагружения стержня только тепловым потоком $Q(\tau)$, функционал невязки имеет вид:

$$J_2^{(n-1)} = \int\limits_{a_2}^{b_2} (f_2(\tau) - W^{(n)}(1,\tau))^2 d\tau. \tag{45}$$

После нахождения начального приближения уточняются законы изменения неоднородных характеристик путем нахождения поправок из решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода вида (45). Решение интегральных уравнений (45) является некорректной задачей. В работе применялся метод регуляризации Тихонова А.Н. с выбором параметра регуляризации по обобщенной невязке [20]. В результате реализации итерационного процесса получают скорректированные функции. Условиями выхода из итерационного процесса являются: а) в случае механического способа нагружения стержня

$$J_1^{(n-1)} < d_0; \tag{46}$$

б) в случае теплового способа нагружения стержня

$$J_2^{(n-1)} < d_0. \tag{47}$$

5. Численная реализация

В первой серии экспериментов были проведены исследования по реконструкции неоднородных характеристик термоэлектроупругого стержня при отсутствии начальных напряжений ($\Omega_z^0 = 0$) [17]. При этом предельное значение для выхода из итерационного процесса полагалось $d_0 = 10^{-4}$. Для определения параметров d_1, d_2, d_3, входящих в уравнения (22)–(27) использовались физические характеристики титаната бария [8], который является представителем керамики класса $6mm$. Исходя из этих данных в расчетах принято: $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-9}$, $d_1 = 0.2$, $d_2 = 10^{-2}$, $d_3 = 0.1$.

Определены наиболее информативные диапазоны для съема дополнительной информации. Выяснено, что, измерение торцевого смещения при нагрузке $P(\tau) = H(\tau)$ наиболее информативно на интервале $[a_1, b_1] = [0, 1.2]$ при 6 точках наблюдения внутри него, а измерение торцевой температуры при нагрузке $Q(\tau) = H(\tau)$ - на интервале $[a_2, b_2] = [0, 0.8]$ при 4 точках наблюдения внутри него. Оказалось, что погрешность восстановления безразмерных характеристик монотонных функций не превосходит 2%, а немонотонных 6%. Для выполнения условий выхода (46), (47)требуется не более 10 итераций.

Для идентификации преднапряжения стержня Ω_z^0 при известных остальных характеристиках предлагается следующий подход. Исходя из уравнения равновесия $\frac{d\Omega_z^0}{dz} = 0$ начальное напряжение находят в виде $\Omega_z^0 = C_0\omega$, где ω — уровень начального напряжения. Постоянная C_0 находится из условия минимимума функционала невязки (44) на компакте, построенном по априорной информации об ограниченности искомой характеристики.

Во второй серии экспериментов проведены исследования по влиянию начальных напряжений и параметров связанности d_1, d_2, d_3 на реконструкции характеристик термоэлектроупругого стержня.

При механическом способе нагружения стержня результаты реконструкции характеристик $\bar{s}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{\Sigma}(z)$ практически не зависят от параметров связанности. Однако результат реконструкции $\bar{s}(z)$ сильно зависит от величины уровня преднапряжений ω. При $\omega = 0$ погрешность восстановления $\bar{s}(z)$ не превышает 4%. Однако при увеличении ω погрешность реконструкция модуля $\bar{s}(z)$ быстро растет. Так, для монотонных функций, погрешность восстановления $\bar{s}(z)$ при $\omega = 0.001$ увеличивается до 6%, при $\omega = 0.01$ до 13%, а при $\omega = 0.03$ реконструкция становится уже невозможной.

При тепловом способе нагружения стержня наличие преднапряжений при значениях параметров связанности, заданных выше, не влияет на результаты реконструкции. Так, при достаточно высоком уровне преднапряжений $\omega = 0.05$ погрешность реконструкции теплофизических характеристик $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\Sigma}(z)$ не превосходит 6%. При увеличении параметров связанности до $d_1 = 0.4$, $d_2 = 0.05$, $d_3 = 0.4$ погрешность реконструкции теплофизических характеристик $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\Sigma}(z)$ увеличивается на 2-3%.

На рисунках ниже представлены результаты реконструкции характеристик неоднородного термоэлектроупругого стержня; при этом сплошной линией показан график исходной функции, точками — восстановленной при уровне начального напряжения $\omega = 0.001$.

На рис. 1 показан результат восстановления возрастающей функции $\bar{s}(z) = 0.5z^2 + 0.2$ при механическом способе нагружения торца стержня. Начальное приближение $\bar{s}_0(z) = 0.47z^2 + 0.22$. Для выполнения условия выхода (46) потребовалось 6 итераций. Погрешность реконструкции на последней итерации не превысила 6%. На рис. 2 показан результат восстановления убывающей функции $\bar{\Sigma}(z) = 1.8e^{-2z}$ при механическом способе нагружения торца стержня. Начальное приближение $\bar{\Sigma}_0(z) = 1.85 - 1.55z$. Для выполнения условия выхода (46) потребовалось 8 итераций. Погрешность реконструкции на последней итерации не превысила 5%. На рис. 3 показан результат реконструкции немонотонной функции $\bar{k}(z) = 2 + 1.4\sin(\pi z)$ при тепловом способе нагружения торца. Начальное приближение $\bar{k}_0(z) = 2.65 + 0.4z$. Для вы-

полнения условия выхода (47) потребовалось 12 итерации. Погрешность реконструкции на последней итерации не превысила 6%.

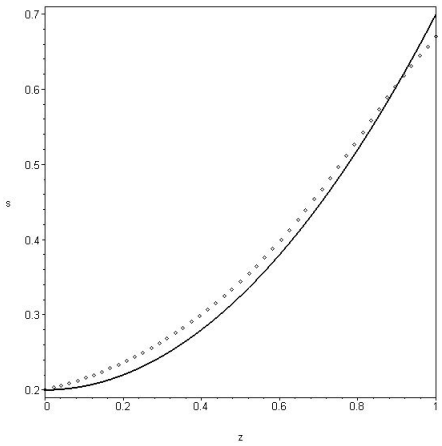

Рис. 1: Результат реконструкции закона изменения упругого модуля $\bar{s}(z) = 0.5z^2 + 0.2$

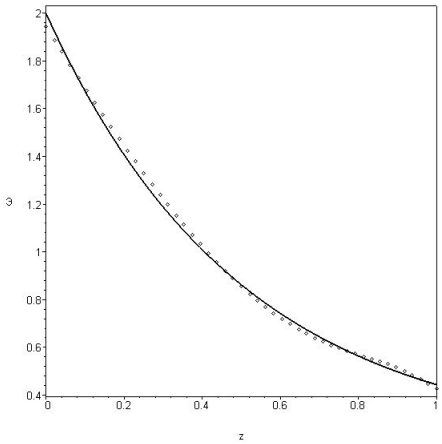

Рис. 2: Результат реконструкции закона изменения диэлектрической проницаемости $\bar{\Sigma}(z) = 1.8e^{-2z}$

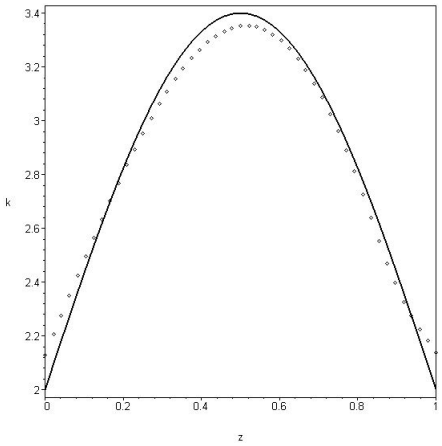

Рис. 3: Результат реконструкции закона изменения коэффициента теплопроводности $\bar{k}(z) = 2 + 1.4\sin(\pi z)$

6. Заключение

Рассмотрена коэффициентная обратная задача термоэлектроупругости, которая состоит в нахождении законов изменения характеристик преднапряженного термоэлектроупругого стержня из пьезокерамики класса 6 mm по дополнительной информации о значении температуры или смещения на торце стержня. Для решения обратной задачи предложен итерационный метод, основанный на слабой постановке задачи термоэлектроупругости и последующей линеаризации. Для нахождения поправок реконструируемых характеристик в итерационном процессе применялись интегральные операторные уравнения 1-го рода в оригиналах. В ходе вычислительных экспериментов восстанавливалась одна из характеристик стержня при известных остальных. Результаты расчетов показали, что при отсутствии начальных напряжений, предложенный метод позволяет идентифицировать искомые функции с небольшой погрешностью. Однако, появление начальных напряжений существенно влияет на результаты реконструкции некоторых характеристик стержня. Выяснено, что при увеличении начальных напряжений погрешность реконструкция механических характеристик быстро возрастает и при некоторых значениях начальных напряжений становится уже невозможной. Однако, увеличение начальных напряжений практически не изменяет относительную погрешность реконструкции теплофизических характеристик.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hussain T. M., Baig A. M., Saadawi T. N. Infrared Pyroelectric Sensor for Diction of Vehicular Traffic Using Digital Signal Processing Techniques // IEEE Trans. Vehicular Technol. 1995. Vol. 44, №3. P. 683-690. https://doi.org/10.1109/25.406637.

2. Mindlin R. D. On the equations of motion of piezoelectric crystals // Problems of continuum / Ed. by N.I.Muskilishivili N. I. 1961. Philadelphia: SIAM, 1961. P. 282-290.

3. Bassiouny E., Youssef H. M. Thermo-elastic properties of thin ceramic layers subjected to thermal loadings // J. Thermoelasticity. 2013. Vol. 1, №1. P. 4-12. http://researchpub.org/journal/jot/number/vol1-no1/vol1-no1-1.pdf.

4. Wu X. H., Shen Y. P., Chen C. An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensor or actuators // Mater Lett. 2003. Vol. 57, №22-23. P. 3532-3542. https://doi.org/10.1016/S0167-577X(03)00121-6

5. Ying C., Zhefei S. Exact solutions of functionally gradient piezothermoelasic cantilevers and parameter identification // J. Intel. Mat. Syst. Str. 2005. Vol. 16, №6. P. 531-539. https://doi.org/10.1177/1045389X05053208

6. Zhong Z., Shang E. T. Exact analysis of simply supported functionally graded piezothermoelectric plates // J. Intel. Mat. Syst. Str. 2005. Vol. 16, №7-8. P. 643-651. https://doi.org/10.1177/1045389X05050530

7. Ootao Y., Tanigawa Y. The transient piezothermoelastic problem of a thick functionally graded thermopiezoelectric strip due to nonuniform heat supply // Arch. Appl. Mech. 2005. Vol. 74, №7. P. 449-465. https://doi.org/10.1007/s00419-004-0354-5

8. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, № 2. С. 117-126. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10

9. Ватульян А. О. К теории обратных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. 2010. Т. 74, №6. С. 909-916. (English version https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.01.004).

10. Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2008. 176 с.

11. Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону: Из-во ЮФУ, 2014. 206 с.

12. Ватульян А. О., Дударев В. В. О реконструкции неоднородных свойств пьезоэлектрических тел // Вычисл. мех. сплош. сред. 2012. Т. 5, №3. С. 259-264. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.3.30

13. Богачев И. В., Ватульян А. О., Явруян О. В. Идентификация свойств неоднородной электроупругой среды // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. №5. С. 860-866. (English version https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.016).

14. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87, №1. С. 217-224. (English version https://doi.org/10.1007/s10891-014-1004-6).

15. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // International Journal of Solids and Structures. – 2014. Vol. 51 P. 767-773. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003

16. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об особенностях идентификации неоднородного предварительно напряженного состояния в термоупругих телах // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81, вып.1. С. 103-110. https://elibrary.ru/item.asp?id=29009217 .

17. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Итерационная схема решения коэффициентной обратной задачи термоэлектроупругости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10. №4. С. 445-455. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.4.36

18. Ватульян А. О., Нестеров С. А. Об особенностях идентификации неоднородных характеристик предварительно напряженных термоупругих тел // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. №1. С.18-24.

19. Guz A. N. On foundations of the ultrasonic nondestructive method for determination of stresses in near-surface layers of solid bodies, International Applied Mechanics. 2005. Vol. 41(8). P. 944-955. https://doi.org/10.1007/s10778-005-0165-6

20. Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

REFERENCES

1. Hussain, T. M., Baig, A. M., & Sadawi, T. N. 1995, " Pyroelectric Sensor for Diction of Vehicular Traffic Using Digital Signal Processing", *Trans. Vehicular Technol.*, vol. 44, no. 3. pp. 683-690. https://doi.org/10.1109/25.406637.

2. Mindlin, R. D., 1961, *On the equations of motion of piezoelectric crystals*, Problems of continuum, SIAM, Philadelphia, pp. 282-290.

3. Bassiouny, E., Youssef, H.M. 2013, "Thermo-elastic properties of thin ceramic layers subjected to thermal loadings ",*J. Thermoelasticity*, vol. 1, no. 1, pp. 4-12. http://researchpub.org/journal/jot/number/vol1-no1/vol1-no1-1.pdf.

4. Wu, X.H., Shen, Y.P., & Chen, C. 2003, "An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensor or actuators ", *Mater Lett.*, vol. 57, no. 22-23, pp. 3532-3542. https://doi.org/10.1016/S0167-577X(03)00121-6

5. Ying, C., Zhefei, S. 2005, "Exact solutions of functionally gradient piezothermoelasic cantilevers and parameter ", *J. Intel. Mat. Syst. Str.* , vol. 16, no. 6, pp. 531-539. https://doi.org/10.1177/1045389X05053208

6. Zhong, Z., Shang, E.T. 2005, "Exact analysis of simply supported functionally graded piezothermoelectric plates", *J. Intel. Mat. Syst. Str.* , Vol. 16, no.7-8, pp. 643-651. https://doi.org/10.1177/1045389X05050530

7. Ootao, Y., Tanigawa, Y. 2005," The transient piezothermoelastic problem of a thick functionally graded thermopiezoelectric strip due to nonuniform heat supply ", *Arch. Appl. Mech.*, vol. 74, no. 7, pp. 449-465. https://doi.org/10.1007/s00419-004-0354-5

8. Vatul'yan, A.O., Nesterov, S.A. 2017, "The dynamic problem of thermoelectroelasticity for functional-gradient layer", *Vychisl. mekh. splosh. sred*, vol 10, no. 2, pp. 117-126. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10

9. Vatul'yan, A.O., 2010, "To the theory of inverse problems in linear mechanics of a deformable of the body", *Appl. Math. Mech.*, vol. 74, no. 6, pp. 909-916. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.01.004.

10. Vatul'yan, A.O., Soloviev, A.N., 2008, *Direct and inverse problems for homogeneous and inhomogeneous elastic and electroelastic bodies*, South federal university, Rostov-on-Don, 176 p.

11. Vatul'yan, A.O., Дударев, V.V., Nedin. R.D., 2014, *Preliminary stresses: modeling and identification*, South federal university, Rostov-on-Don, 206 p.

12. Vatul'yan, A.O., Dudarev, V.V. 2012, On the reconstruction of inhomogeneous properties piezoelectric bodies // *Vychisl. mekh. splosh. sred*, vol. 5, no. 3, pp. 259-264. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2012.5.3.30

13. Bogachev, I.V., Vatul'yan, A.O., & Yavruyan O.V. 2012, " Identification inhomogeneous properties of electroelastic medium ", *Appl. Math. Mech.*, vol. 76, no. 5, pp. 860-866. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.016

14. Vatul'yan, A.O., Nesterov, S.A., 2014, "About one method of identification of thermoelastic characteristics for inhomogeneous bodies", *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, vol. 87, no. 1, pp. 217-224. https://doi.org/10.1007/s10891-014-1004-6.

15. Nedin, R., Nesterov, S., & Vatulyan, A. 2014, " On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod ", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, pp. 767-773. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003

16. Vatul'yan, A.O., Nesterov S.A., 2017, "On the features of identification of inhomogeneous prestressed state in thermoelastic bodies", *Appl. Math. Mech.*, vol. 81, no. 1, pp. 103-110. https://elibrary.ru/item.asp?id=29009217 .

17. Vatul'yan, A. O., Nesterov S. A., 2017, "Iterative scheme for solving the coefficient inverse problem of thermoelectroelasticity", *Vychisl. mekh. splosh. sred*, vol. 10, no. 4, pp. 445-455. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.4.36

18. Vatul'yan, A. O., Nesterov S. A., 2014, "On the features of identification of heterogeneous characteristics of prestressed thermoelastic bodies", *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*, no. 1, pp. 18-24.

19. Guz, A. N. 2005. "On foundations of the ultrasonic nondestructive method for determination of stresses in near-surface layers of solid bodies ", *International Applied Mechanics*, vol. 41(8), pp. 944-955. https://doi.org/10.1007/s10778-005-0165-6

20. Tikhonov, A. N., Goncharskii, A. V., Stepanov, B. B., Jagola, A. G., 1990, *Numerical methods solving of ill-posed problems*, Nauka, Moscow, 230 p.

Получено 29.06.2018
Принято в печать 17.08.2018