ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 511 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-172-182

О приближении действительных чисел суммами квадратов простых чисел

Антон Павлович Науменко — аспирант кафедры матанализа, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; руководитель направления отдела специальных исследований и разработок, ОАО "ИнфоТеКС".
e-mail: naumenko.anton90@gmail.com

Аннотация

В статье доказано, что к заданному действительному числу $N > N_0(\varepsilon)$ можно подойти суммой квадратов трех простых чисел на расстояние не большее, чем $H = N^{217/768+\varepsilon}$ и можно подойти суммой четырех квадратов простых чисел на расстояние не большее, чем $H = N^{1519/9216+\varepsilon}$, где ε – произвольное положительное число.

Данные результаты получены при помощи плотностной техники, разработанной Ю.В. Линником в 1940-х годах. Плотностная техника основана на применении явных формул, выражающих суммы по простым числам, через суммы по нетривиальным нулям дзета-функции Римана и использовании плотностных теорем – оценок количества нетривиальных нулей дзета-функции, лежащих в критической полосе и таких, что их реальная часть больше некоторого σ, где $1 > \sigma \geq 1/2$.

Содержащиеся в статье результаты основаны на применении современных плотностных теорем, полученных А. Ивичем. Кроме того, при доказательстве была использована теорема Бейкера, Хармана, Пинтца: к заданному действительному числу $N > N_0(\varepsilon)$ можно подойти простым числом на расстояние не большее, чем $H = N^{21/40+\varepsilon}$. Также использован результат полученный ранее автором: к заданному действительному числу $N > N_0(\varepsilon)$ можно подойти суммой квадратов двух простых чисел на расстояние не большее, чем $H = N^{31/64+\varepsilon}$.

Ключевые слова: простые числа, диофантовы неравенства, плотностная теорема.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
А. П. Науменко. О приближении действительных чисел // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 172–182.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 511 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-172-182

On the approximation of real numbers by the sums of square of primes

Anton Pavlovich Naumenko — postgraduate Student of the matanalysis department, Moscow State University named after M.V. Lomonosov; Head of Special Research and Development, InfoTeKS OJSC, M. V. Lomonosov Moscow State University; head of special research and development, OAO "Infotecs".
e-mail: naumenko.anton90@gmail.com

Abstract

In the article it is proved that a given real number $N > N_0(\varepsilon)$ can be approached by the sum of squares of three primes by a distance not exceeding $H = N^{217/768+\varepsilon}$ and can be approached by the sum of four squares of primes by a distance no greater than $H = N^{1519/9216+\varepsilon}$, where ε is an arbitrary positive number.

These results were obtained using the density technique developed by Yu.V. Linnik in the 1940s. The density technique is based on applying explicit formulas expressing sums over prime numbers with sums over nontrivial zeros of the Riemann zeta function and using density theorems that estimate the number of nontrivial zeros of the zeta function lying in the critical strip such that their real part is greater than some σ, $1 > \sigma \geq 1/2$.

The results obtained in this paper are based on the application of modern density theorems obtained by A. Ivich. In addition, the proof used the theorem of Baker, Harman, and Pintz: one can approach a given real number $N > N_0(\varepsilon)$ by a prime number by a distance no more than $H = N^{21/40+\varepsilon}$. Also, the following result obtained by the author is used: one can approach a given real number $N > N_0(\varepsilon)$ by the sum of squares of two prime numbers by a distance no greater than $H = N^{31/64+\varepsilon}$.

Keywords: primes, diophantine inequalities, density theorem.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

A. P. Naumenko, 2018, "On the approximation of real numbers by the sums of square of primes", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 172–182.

1. Введение

Пусть $N(\sigma,T)$ – число нетривиальных нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $\sigma \leq Res < 1$, $0 < Ims \leq T$.

Оценки вида

$$N(\sigma,T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)} \ln^c T, \quad c \geq 1 \tag{1}$$

называются плотностными теоремами.

В 1972 году Хаксли [1] получил значение $\lambda = 6/5$ на всем промежутке $1/2 \leq \sigma < 1$. Константа c играет меньшую роль. В работе [2] показано, что $c \leq 18.2$. Оценки для $\lambda = \lambda(\sigma)$ при различных значениях σ рассмотрены в работах А.Ивича [3]–[6].

В сороковых годах двадцатого века Ю.В. Линник [7], [8] разработал новую технику решения задач с простыми числами, основанную на явных формулах и плотностных теоремах. Эта техника получила название плотностной.

В монографии С.М. Воронина и А.А. Карацубы [9] с использованием плотностной техники доказано, что неравенство $|p-N| \leq H$ разрешимо в простых числах при $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}} \exp(\ln^{0.8} N)$ для любого достаточно большого N, где λ – константа из плотностной теоремы (1).

Позднее, с привлечением метода решета, был получен следующий результата о "близости" простого числа к произвольному действительному [10]: доказано, что неравенство $|p-N| \leq H$ разрешимо в простых числах при

$$H > N^{21/40+\varepsilon} \tag{2}$$

для любого $N > N_0(\varepsilon)$, где ε – произвольное положительное число; для числа решений данного неравенства справедлива оценка $J(N,H) \gg H/\ln N$.

В 2006 году в работе [11] В.В. Гирько и С.А. Гриценко при помощи плотностной техники доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть* λ *– константа из плотностной теоремы (1). Если* $H > N^{1-(2\lambda)^{-1}}\exp(\ln^{0.8} N)$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2.

Для числа решений данного неравенства справедлива оценка $I(N,H) \gg \frac{H}{\ln N}$.

В 2012 году в работе [12] С.А. Гриценко и Н.Т. Ча при помощи плотностной техники получили следующие результаты.

Теорема 2. *Если* $H > \sqrt{N}\exp(\ln^{-0.1} N)$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2.

Теорема 3. *Пусть* λ *– константа из плотностной теоремы (1). Если* $H > N^{(1-(2\lambda)^{-1})^2}\exp(\ln^{0.8} N)$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 *и* p_3.

В 2018 году автором получено следующее утверждение [13], [14].

Теорема 4. *Пусть* ε *– произвольное положительное число. Если* $H > N^{\frac{31}{64}+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1 *и* p_2 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$.

Для числа решений данного неравенства справедлива оценка $J(N,N_1,H) \gg \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^2 N}$, *где* $N_1 = N^{61/80+\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$.

Основными результатами данной статьи являются следующие теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *– произвольное положительное число,* λ *– константа из плотностной теоремы (1). Если* $H > N^{\frac{31}{64}\cdot(1-(2\lambda)^{-1})+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2 *и* p_3 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$.

Теорема 6. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *– произвольное положительное число,* λ *– константа из плотностной теоремы (1). Если* $H > N^{\frac{31}{64}\cdot(1-(2\lambda)^{-1})^2+\varepsilon}$, *то неравенство*

$$|p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - N| \le H,$$

разрешимо в простых числах p_1, p_2, p_3 *и* p_4 *для любого* $N > N_0(\varepsilon)$.

2. Основной текст статьи

2.1. Леммы

Лемма 1. *(Явная формула) Пусть $2 \le T \le x$. Тогда*

$$\psi(x) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) = x - \sum_{|Im\rho| \le T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $\rho = \beta + i\gamma$ – нули $\zeta(s)$ в критической полосе.

Доказательство см. в [15], Глава 5.

Лемма 2. *При $T \ge 2$ справедливы оценки*

$$\sum_{|\gamma - T| \le 1} 1 = O(\ln T), \qquad \sum_{|\gamma - T| > 1} \frac{1}{|\gamma - T|} = O(\ln^2 T).$$

Доказательство см. в [15], Глава 4.

Лемма 3. *Существует абсолютная постоянная $c_1 > 0$ такая, что $\zeta(s) \ne 0$ в области*

$$\sigma \ge 1 - \frac{c_1}{\ln^{2/3}|T|(\ln\ln|T|)^{1/3}}, \quad \text{где} \quad |T| \ge 10.$$

Доказательство см. в [15], Глава 6.

Лемма 4. *Пусть $N > N_0(\varepsilon)$, $N_1 = N^{61/80+\varepsilon}$, $N_2 = N^{31/64+\varepsilon}$, $H \gg N^{1/4}$. Тогда при любом $N_2/2 \le X \le 2N_2$ справедлива оценка:*

$$\sum_{N - 2N_1 < n^2 \le N - N_1} \sum_{N - n^2 - 2N_2 < k^2 \le N - n^2 - N_2} \sum_{X - H < N - n^2 - k^2 \le X + H} 1 \ll H\sqrt{\frac{N_1}{N}}.$$

Доказательство. Запишем

$$n = \sqrt{N} - t_1, \quad \frac{N_1}{\sqrt{N}} \ll t_1 \ll \frac{N_1}{\sqrt{N}};$$

$$k = \sqrt{N - n^2} - t_2, \quad \frac{N_2}{\sqrt{N_1}} \ll t_2 \ll \frac{N_2}{\sqrt{N_1}}.$$

Рассмотрим сумму $n^2 + k^2$. Имеем

$$n^2 + k^2 = N - 2t_1\sqrt{N} + t_1^2 + 2t_1\sqrt{N} - t_1^2 + 2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N} - t_1^2} + t_2^2 = N + 2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N} - t_1^2} + t_2^2.$$

Заметим, что $t_2^2 \asymp N_2^2/N_1 \ll N^{1/4} \ll H$. Следовательно, справедлива оценка

$$\sum_{X - H < N - n^2 - k^2 \le X + H} 1 = \sum_{X - H < 2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N} - t_1^2} + t_2^2 \le X + H} 1 \ll$$

$$\ll \sum_{X - 2H < 2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N} - t_1^2} \le X + 2H} 1.$$

Зафиксируем некоторое значение $N_2/2 \le X \le 2N_2$ и некоторую пару t_2 и t_1, такую что

$$X - 2H < 2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N} - t_1^2} \le X + 2H. \tag{3}$$

Если при данном X ни одной такой пары не существует, то утверждение леммы при этом X очевидно справедливо.

Пусть теперь дана некоторая произвольная пара t_2' и t_1'. Для оценки числа решений (3) достаточно оценить количество различных пар t_2' и t_1', при которых

$$-2H \le 2t_2'\sqrt{2t_1'\sqrt{N} - (t_1')^2} - 2t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N} - (t_1)^2} \le 2H,$$

то есть

$$-H \le t_2'\sqrt{2t_1'\sqrt{N} - (t_1')^2} - t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N} - (t_1)^2} \le H.$$

Домножим все части неравенства на неотрицательную величину

$$t_2'\sqrt{2t_1'\sqrt{N} - (t_1')^2} + t_2\sqrt{2t_1\sqrt{N} - (t_1)^2}.$$

Заметим, что указанная величина при всех допустимых значениях t_2, t_1, t_2' и t_1' имеет порядок N_2 и не превосходит $4N_2$.

Тогда достаточно оценить сверху число решений

$$\left|(t_2')^2(2t_1'\sqrt{N} - (t_1')^2) - t_2^2(2t_1\sqrt{N} - (t_1)^2)\right| \le 4HN_2. \tag{4}$$

Справедливы оценки

$$(t_2't_1')^2 \ll \frac{N_2N_2^2}{N} < 2HN_2;$$

$$(t_2t_1)^2 \ll \frac{N_2N_2^2}{N} < 2HN_2.$$

Следовательно, число решений (4) не превосходит числа решений

$$\left|(t_2')^2t_1' - t_2^2t_1\right| \le \frac{3HN_2}{\sqrt{N}}. \tag{5}$$

Зафиксируем t_2'. Тогда (5) может быть разрешено относительно t_1':

$$\left|t_1' - \left(\frac{t_2}{t_2'}\right)^2 t_1\right| \le \frac{3HN_2}{\sqrt{N}(t_2')^2}.$$

Вариантов выбора t_2' по порядку не более $N_2/\sqrt{N_1}$. При каждом из них число решений t_1' по порядку не превосходит $HN_1/(N_2\sqrt{N})$.

Тогда, при любом выборе t_2 и t_1, существует по порядку не более $H\sqrt{N_1/N_2}$ различных пар t_2' и t_1', таких что выполнено (4).

Лемма доказана.

2.2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 5.

Рассмотрим

$$S=\sum_{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1}\ \sum_{N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2}\ \sum_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}<n\le\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}}\Lambda(n),$$

где $N_2=N^{\frac{31}{64}+\varepsilon}$, $N_1=N^{\frac{61}{80}+\varepsilon}$ и в качестве ε выбрано наибольшее из значений, которые получены из (2) и Теоремы 4.

При суммировании по n учитываются не только простые числа q, но и степени простых чисел q^r при натуральных $r>1$. Оценим вклад указанных слагаемых в S.

Число слагаемых во внешней двойной сумме не превосходит по порядку величины $\frac{\sqrt{N_1}N_2}{\sqrt{N}}$. Количество значений k во внутренней сумме, которые представимы в виде q^r, не превосходит:

$$\sum_{r=2}^{2\ln N}\ \sum_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}<q^r\le\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}}1\ll\frac{H\ln N}{N_2^{3/4}}.$$

Тогда окончательно для вклада в S слагаемых, отвечающих степеням простых чисел q^r при натуральном $r>1$, справедлива оценка

$$\ll\frac{HN_2^{1/4}\sqrt{N_1}\ln N}{\sqrt{N}}.\tag{6}$$

Воспользуемся для внутренней суммы Леммой 1 (явной формулой):

$$S=\sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2}}\ \sum_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}<n\le\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}}\Lambda(n)=$$

$$=\sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2}}\left(\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}-\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}\right)-$$

$$-\sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2}}\left(\sum_{|\gamma|\le T}\int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}}x^{\rho-1}dx+O\left(\frac{\sqrt{N_2}\ln^2N}{T}\right)\right).$$

T выбираем так, чтобы остаток был меньше предполагаемого главного члена.

Получаем условие:

$$T\gg\frac{N_2\ln^3N}{H}.\tag{7}$$

Согласно Теореме 5, при $N_2\gg N^{31/64+\varepsilon}$ (в данном случае N_2 выполняет роль переменной H в теореме) справедлива оценка:

$$\sum_{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1}\ \sum_{N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2}1\gg\frac{N_2\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^2N}.$$

Таким образом, предполагаемый главный член в S будет иметь вид:

$$\gg\frac{N_2\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^2N}\frac{H}{\sqrt{N_2}}=\frac{H\sqrt{N_2}\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^2N}.\tag{8}$$

Отметим, что оценка (8) по порядку меньше (6).

Далее займемся оценкой остатка:

$$W = \sum_{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1}\ \sum_{N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2}\left(\sum_{|\gamma|\le T}\int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}} x^{\rho-1}dx\right)\ll$$

$$\ll \sum_{N-2N_1<n^2\le N-N_1}\ \sum_{N-n^2-2N_2<k^2\le N-n^2-N_2}\int_{\sqrt{N-n^2-k^2-H}}^{\sqrt{N-n^2-k^2+H}}\left|\sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1}\right|dx.$$

Разобьем промежуток $[N_2/2; 2N_2)$ на непересекающиеся интервалы длины $2H$ (за исключением, быть может, последнего). Согласно лемме 4 в каждый такой интервал при различных парах (n,k) попадает по порядку величины не более $H\sqrt{N_1/N}$ значений $N-n^2-k^2$.

Просуммируем по n и k внутренние интегралы, используя данную оценку. Получим

$$W \ll \frac{H\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}}\int_{\sqrt{N_2}/2}^{\sqrt{2N_2}}\left|\sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1}\right|dx.$$

Теперь достаточно показать, что

$$I = \int_{\sqrt{N_2}/2}^{2\sqrt{N_2}}\left|\sum_{|\gamma|\le T} x^{\rho-1}\right|dx \ll \sqrt{N_2}\ln^{-5} N.$$

Пусть $\delta=\delta(T)=\frac{c_1}{\ln^{2/3}|T|(\ln\ln|T|)^{1/3}}$, где c_1 – константа из Леммы 3. Разобьем прямоугольник $0.5<Res<1-\delta$, $-T<Ims<T$, по которому суммируются нули дзета-функции Римана, на $O(\ln N)$ прямоугольников шириной $1/\ln N$. Получим:

$$I \ll \sum_{i=0}^{0.5\ln N-1}\int_{\sqrt{N_2}/2}^{2\sqrt{N_2}}\left|\sum_{\substack{0.5+\frac{i}{\ln N}\le\beta<0.5+\frac{i+1}{\ln N}\\ |\gamma|\le T}} x^{\rho-1}\right|dx.$$

Рассмотрим

$$I_i = \int_{\sqrt{N_2}/2}^{2\sqrt{N_2}}\left|\sum_{\substack{0.5+\frac{i}{\ln N}\le\beta<0.5+\frac{i+1}{\ln N}\\ |\gamma|\le T}} x^{\rho-1}\right|dx.$$

Применим неравенство Коши:

$$I_i^2 \ll \sqrt{N_2}\int_{\sqrt{N_2}/2}^{2\sqrt{N_2}}\left|\sum_{\substack{0.5+\frac{i}{\ln N}\le\beta<0.5+\frac{i+1}{\ln N}\\ |\gamma|\le T}} x^{\rho-1}\right|^2 dx.$$

Раскроем квадрат модуля, разобьем при суммировании нули на "близкие" и "далекие" и поменяем после этого порядок суммирования и интегрирования. Имеем

$$I_i^2 \ll \sqrt{N_2}\left(\sum_{|\gamma|\le T}\ \sum_{\substack{|\gamma_1|\le T\\ |\gamma-\gamma_1|\le 1}}\int_{\sqrt{N_2}/2}^{2\sqrt{N_2}} x^{2\sigma-2}dx + \sum_{|\gamma|\le T}\ \sum_{\substack{|\gamma_1|\le T\\ |\gamma-\gamma_1|>1}}\frac{1}{|\gamma-\gamma_1|}\int_{\sqrt{N_2}/2}^{2\sqrt{N_2}} x^{2\sigma-2}dx\right),$$

где $0.5+i/\ln N \le \sigma \le 0.5+(i+1)/\ln N$ – точка, в которой правая часть неравенства принимает максимальное значение.

Используя лемму 2 и учитывая, что вклад суммирования по нулям в данном случае имеет вид $N(\sigma,T)$, получаем оценку:

$$I \ll N_2^{(\sigma-1)/2}\sqrt{N(\sigma,T)}\ln N. \tag{9}$$

Теперь нам достаточно показать, что при всех $\sigma\in[0.5;1-\delta(T)]$ выполнено условие:

$$N_2^{(\sigma-1)/2}\sqrt{N(\sigma,T)} \ll \ln^{-5} N, \tag{10}$$

Воспользуемся плотностной теоремой (1):

$$N(\sigma,T) \ll T^{2\lambda(1-\sigma)}\ln^c T.$$

Тогда получаем, предварительно возводя обе части неравенства (10) в квадрат,

$$N_2^{\sigma-1}T^{2\lambda(1-\sigma)} \ll \ln^{-c-10} N,$$

откуда, используя (7), имеем

$$N_2^{\sigma-1}\left(\frac{N_2}{H}\right)^{2\lambda(1-\sigma)} \ll \ln^{-c-10} N,$$

$$N_2^{(2\lambda-1)(1-\sigma)}\ln^{c+10} N \ll H^{2\lambda(1-\sigma)}.$$

Используя Лемму 3 и включая множитель $\ln^{c+10} N$ в N^{ε}, получим

$$H \gg N_2^{1-1/(2\lambda)} \gg N^{(31/64+\varepsilon)\cdot(1-1/(2\lambda))}.$$

При $\lambda=6/5$ имеем

$$H \gg N^{217/768+\varepsilon} = N^{0.28255\ldots+\varepsilon}$$

Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6.

Рассмотрим

$$S=\sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2\\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\le N-p_1^2-p_2^2-N_3}}\ \sum_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2-H}<n\le\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2+H}}\Lambda(n),$$

где $N_1=N^{\frac{61}{80}+\varepsilon}$, $N_2=N^{\frac{31}{64}+\varepsilon}$, $N_3=N^{\frac{31}{64}(1-(2\lambda)^{-1})+\varepsilon}$, λ – константа из плотностной теоремы (1), а в качестве ε выбрано наибольшее из значений, которые получены из Теорем 4 и 5.

Вклад в S слагаемых, соответствующих натуральным степеням $r>1$ простых чисел, может быть оценен как

$$\ll \frac{HN_3^{1/4}\sqrt{N_1}\sqrt{N_2}\ln N}{\sqrt{N}}. \tag{11}$$

Воспользуемся для внутренней суммы Леммой 1:

$$S=\sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2\\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\le N-p_1^2-p_2^2-N_3}}\ \sum_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-H}<n\le\sqrt{N-p_1^2-p_2^2+H}}\Lambda(n)=$$

$$= \sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2\\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\le N-p_1^2-p_2^2-N_3}} \left(\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2+H}-\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2-H}\right)-$$

$$-\sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2\\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\le N-p_1^2-p_2^2-N_3}} \left(\sum_{|\gamma|\le T_1}\int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2+H}} x^{\rho-1}dx+O\left(\frac{\sqrt{N_3}\ln^2 N}{T_1}\right)\right).$$

T_1 выбираем так, чтобы остаток был меньше предполагаемого главного члена.

Получаем условие:

$$T_1 \gg \frac{N_3\ln^3 N}{H}. \tag{12}$$

Согласно Теореме 5, при $N_3 \gg N^{31/64(1-(2\lambda)^{-1})+\varepsilon}$ (в данном случае N_3 выполняет роль переменной H в теореме) справедлива оценка:

$$\sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2\\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\le N-p_1^2-p_2^2-N_3}} 1 \gg \frac{N_3\sqrt{N_2}\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^3 N}.$$

Таким образом, предполагаемый главный член в S будет иметь вид:

$$\gg \frac{N_3\sqrt{N_2}\sqrt{N_1}}{\sqrt{N}\ln^3 N}\frac{H}{\sqrt{N_3}} = \frac{H\sqrt{N_1}\sqrt{N_2}\sqrt{N_3}}{\sqrt{N}\ln^3 N}. \tag{13}$$

Отметим, что оценка (11) по порядку меньше (13).

Далее займемся оценкой остатка:

$$R = \sum_{\substack{N-2N_1<p_1^2\le N-N_1\\ N-p_1^2-2N_2<p_2^2\le N-p_1^2-N_2\\ N-p_1^2-p_1^2-2N_3<p_3^2\le N-p_1^2-p_2^2-N_3}} \sum_{|\gamma|\le T_1}\int_{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2-H}}^{\sqrt{N-p_1^2-p_2^2-p_3^2+H}} x^{\rho-1}dx \ll$$

$$\ll \sum_{\substack{N-2N_1<n^2\le N-N_1\\ N-n^2-2N_2<k^2\le N-p^2-N_2\\ N-n^2-k^2-2N_3<l^2\le N-n^2-k^2-N_3}} \int_{\sqrt{N-n^2-k^2-l^2-H}}^{\sqrt{N-n^2-k^2-l^2+H}} \left|\sum_{|\gamma|\le T_1} x^{\rho-1}dx\right|.$$

Разобьем промежуток $[N_3/2; 2N_3)$ на непересекающиеся интервалы длины $2H$ (за исключением, быть может, последнего). Полностью повторяя доказательство леммы 4, можно показать, что при нашем выборе параметров в каждый такой интервал при различных тройках (n,k,l) попадает по порядку величины не более $\frac{H\sqrt{N_1}\sqrt{N_2}}{\sqrt{N}}$ значений $N-n^2-k^2-l^2$.

Просуммируем по n, k и l внутренние интегралы, используя данную оценку. Получим

$$R \ll \frac{H\sqrt{N_1}\sqrt{N_2}}{\sqrt{N}}\int_{\sqrt{N_3}/2}^{2\sqrt{N_3}}\left|\sum_{|\gamma|\le T_1} x^{\rho-1}dx\right|.$$

Далее, с учетом оценки (9), приходим к условию:

$$N_3^{(\sigma-1)/2}\sqrt{N(\sigma,T_1)} \ll \ln^{-5} N.$$

Воспользовавшись плотностной теоремой (1) и Леммой 3, окончательно получаем:

$$H \gg N_3^{1-1/(2\lambda)} \gg N^{\frac{31}{64}(1-1/(2\lambda))^2+\varepsilon}.$$

При $\lambda = 6/5$ имеем

$$H \gg N^{1519/9216+\varepsilon} = N^{0.1648...+\varepsilon}$$

Теорема 6 доказана.

3. Заключение

В статье доказано, что к заданному действительному числу $N > N_0(\varepsilon)$ можно подойти суммой квадратов трех простых чисел на расстояние не большее, чем $H = N^{217/768+\varepsilon}$ и можно подойти суммой четырех квадратов простых чисел на расстояние не большее, чем $H = N^{1519/9216+\varepsilon}$, где ε – произвольное положительное число.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huxley M.N. On the difference between consequtive primes// Invent. Math. 1972. Vol. 15, № 1. p. 164–170.
2. Гриценко С.А. Уточнение одной константы в плотностной теореме // Матем. заметки. 1994. Том 55, №2. С. 59–61.
3. Ivic A. The Riemann zeta-function// New York, John Wiley and Sons, 1985.
4. Ivic A. Topics in recent zeta-function theory//Publ. Math. d'Orsay, Universite de Paris-Sud, Orsay, 1983.
5. Ivic A. A note on the zero-density estimates for the zeta-function// Arch. Math. 1979. Vol. 33. P. 155–164.
6. Ivic A. Exponent pairs and the zeta-function of Riemann// Studia Sci. Math. Hung. 1980. Vol. 15. P. 157–181.
7. Линник Ю.В. О возможности единого метода в некоторых вопросах аддитивной и дистрибутивной теории чисел// ДАН СССР. 1945. Том 49, №1. с. 3–7.
8. Линник Ю.В. Об одной теореме теории простых чисел// ДАН СССР. 1945. Том 47, №1. с. 7–9.
9. Воронин С.М., Карацуба А.А. Дзета-функция Римана// М.: Физматлит, 1994.
10. Baker R.C., Harman G., Pintz J. The difference between consecutive primes, II// Proceeding of the London Mathematical Society. 2001. Vol. 83, №3.
11. Гирько В.В., Гриценко С.А. Об одном диофантовом неравенстве с простыми числами // Чебышевский сборник. Том 7, №4. С. 26–30.
12. Гриценко С.А., Нгуен Тхи Ча О диофантовых неравенствах с простыми числами// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика, 2012. 23(142). Вып. 29.
13. Науменко А.П. О нелинейных диофантовых неравенствах с простыми числами// Труды XV Международной конференции "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия. Современные проблемы и приложения" , Тула, 2018 г. с. 239–241.

14. Науменко А.П. О некоторых нелинейных диофантовых неравенствах с простыми числами// Математические заметки. 2018. Том 104. (принято к печати)

15. Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел// М.: Наука, 1983.

REFERENCES

1. Huxley, M. N. 1972, “On the difference between consequtive primes“, Invent. Math. vol. 15, № 1. p. 164–170.

2. Gritsenko, S. A. 1994, “The refinement of a constant in the density theorem“, Mathematical Notes. Vol. 55, №2. p. 142–143.

3. Ivic, A. 1985, “The Riemann zeta-function“, New York, John Wiley and Sons.

4. Ivic, A. 1983, “Topics in recent zeta-function theory“, Publ. Math. d’Orsay, Universite de Paris-Sud, Orsay.

5. Ivic, A. 1979, “A note on the zero-density estimates for the zeta-function“, Arch. Math. vol. 33. P. 155–164.

6. Ivic, A. 1980, “Exponent pairs and the zeta-function of Riemann“, Studia Sci. Math. Hung. vol. 15. P. 157–181.

7. Linnik, U. V. 1945, “On the possibility of a unified method in certain questions of additive and multiplicative number theory“, Doklady of the Academy of Sciences of the USSR. vol. 49, №1. p. 3–7.

8. Linnik, U. V. 1945, “On a theorem of the theory of primes“, Doklady of the Academy of Sciences of the USSR. vol. 47, №1. p. 7–9.

9. Voronin, S. M. & Karatsuba, A. A. 1994, “The Riemann zeta function (Russian)“, FML, Moscow.

10. Baker, R. C., Harman, G., & Pintz, J. 2001, “The difference between consecutive primes, II“. Proceeding of the London Mathematical Society. vol. 83, №3. p. 121–159.

11. Gir’ko, V. V., & Gritsenko, S. A., 2006, “On a diophantine inequality with primes“ (In Russian), Chebyshevskii sbornik. vol. 7, №4. p. 26–30.

12. Gritsenko, S. A., & Nguyen Thi Tcha, 2012, “On diophantine inequalities with primes“ (In Russian), Nauchnyye vedomosti BelGU, Series: Math. Physics. Vol. 23(142), №29. p. 48–52.

13. Naumenko, A. P., 2018, “On nonlinear diophantine inequalities with primes“. Proceedings of the XV International Conference "Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: modern problems and applications»" , Tula. p. 239–241.

14. Naumenko, A. P., 2018, “On some nonlinear diophantine inequalities with primes“, Mathematical Notes. Vol. 104 (in press)

15. Karatsuba, A. A., 1993, “Basic analytic number theory (English)“, transl. from the Russian by M. B. Nathanson. Berlin: Springer-Verlag.

Получено 01.06.2018
Принято в печать 17.08.2018