

# ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 16 Выпуск 1 (2015)

---

УДК 539.12.01

## К 75-ЛЕТИЮ ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК, ПРОФЕССОРА БЕЗВЕРХНЕГО ВЛАДИМИРА НИКОЛАЕВИЧА

И. В. Добрынина, А. Е. Устьян (г. Тула),  
Ю. Э. Трубицын (г. Бостон, США)

### Аннотация

Авторы статьи ставили перед собой две главные задачи: охарактеризовать основные этапы жизни профессора Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого Владимира Николаевича Безверхнего и дать краткий анализ его научной и педагогической деятельности, имеющей значительное влияние на развитие комбинаторной теории групп.

Особо отмечаются исследования профессора В. Н. Безверхнего и его учеников по алгоритмическим проблемам теории групп и полугрупп.

В. Н. Безверхний, являясь учеником профессора М. Д. Гриндлингера, руководит научной школой и научным семинаром "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп", семинаром "Основы теории групп", аспирантурой по комбинаторной теории групп.

Среди его учеников 7 человек защитили кандидатские диссертации, причём один из них впоследствии стал доктором физико-математических наук.

Владимир Николаевич Безверхний имеет более 170 научных и методических работ. Реферирует статьи в Реферативном Журнале и Mathematical Review. Является членом редколлегии журнала "Чебышевский сборник", постоянным членом программных комитетов Международных конференций по алгебре и теории чисел, проводимых Тульским государственным педагогическим университетом им. Л. Н. Толстого.

*Ключевые слова:* группа, подгруппа, образующие, определяющие соотношения, алгоритмические проблемы.

*Библиография:* 23 названия.

## TO THE 75TH ANNIVERSARY OF PROFESSOR V. N. BEZVERKHNI

I. V. Dobrynina, A. E. Ustyan (Tula), Yu. E. Trubitsyn (Boston, USA)

### Abstract

The article is devoted to the 75th anniversary of Professor Vladimir N. Bezverkhni. The authors made an attempt to describe the work of V. N. Bezverkhni in the area of combinatorial group theory. Also some personal reminiscences are included.

V. N. Bezverkhni, who is a former student of Martin Greendlinger, plays major role in scientific school “Algorithmic problems in theory of groups and semigroups”. Seven his students received their PhD degrees under his supervision, and one of them became a Doctor of Science.

*Keywords:* group, subgroup, generators, defining relations, algorithmic problems.

*Bibliography:* 23 titles.



## 1. Введение

Владимир Николаевич Безверхний родился 31 января 1940 года в г. Севастополь Крымской области в семье военнослужащего. С 1947 по 1957 год учился в общеобразовательной школе. Во время учёбы отличался математическими способностями, хорошо рисовал. Всегда увлекался чтением книг и любил музыку, в основном серьёзную, в частности неплохо знал оперные произведения. После окончания школы два года работал слесарем на судоремонтном заводе в г. Севастополь. С 1959 по 1962 год служил в рядах Советской Армии. После

окончания службы, в 1962 году, поступил на математический факультет Тульского государственного педагогического института (ТГПИ) им. Л. Н. Толстого, где был одним из лучших студентов. Учился увлечённо, много читал математической литературы, не ограничиваясь только программным материалом. Был победителем математических олимпиад. Окончил институт в 1966 году.

## 2. Трудовая и научная деятельность

С сентября 1966 по январь 1968 года работал ассистентом на кафедре высшей математики Рязанского сельскохозяйственного института, после чего перешёл на ту же должность на кафедру высшей математики Тульского политехнического института.

В ноябре 1968 году поступил в аспирантуру при кафедре алгебры и теории чисел Тульского государственного педагогического института им. Л. Н. Толстого, научный руководитель — профессор М. Д. Гриндлингер. После окончания аспирантуры, с ноября 1971 года, вернулся на кафедру высшей математики Тульского политехнического института на должность ассистента.

В 1974 году защитил кандидатскую диссертацию на тему "Проблемы вхождения и сопряженности слов и подгрупп в некоторых классах групп" в Ленинградском государственном педагогическом институте им. А. И. Герцена.

В 1975 году по конкурсу прошёл на должность старшего преподавателя на кафедру высшей математики Тульского высшего артиллерийского инженерного училища. С 1979 года — доцент этой кафедры, а с 1985 по июнь 1988 года — заведующий кафедрой.

С 24 ноября 1988 года — доцент кафедры математического анализа ТГПИ им. Л. Н. Толстого.

Для завершения докторской диссертации с 1 сентября 1995 года по 31 августа 1997 года Владимир Николаевич находился на должности старшего научного сотрудника. В 1999 году защитил докторскую диссертацию на тему "Проблемы вхождения и сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с объединением" в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова.

Степень доктора физико-математических наук присвоена в 1999 году. Ученое звание профессора присуждено в 2004 году.

Руководил проектами № 00-01-00767-а, № 03-01-00198-а, поддержанных РФФИ, а также проектом РД № 02-1.1-209, поддержанным Министерством образования России.

С 1983 года заместитель главного редактора, а в 1994-2001 годах — главный редактор журнала "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп".

С 1 февраля 2001 года по июль 2002 года Владимир Николаевич заведовал кафедрой алгебры и геометрии Тульского государственного педагогического университета им. Л. Н. Толстого.

С 8 апреля 2002 года — профессор кафедры высшей математики Академии гражданской защиты МЧС России. Ведет курсы по высшей математике, алгебре, математической логике, дискретной математике в Академии гражданской защиты МЧС России и Тульском государственном педагогическом университете им. Л. Н. Толстого.

Награжден грамотой Министерства образования. Отличник народного просвещения.

Имеет более 170 научных и методических работ. Реферирует статьи в Реферативном Журнале и Mathematical Review. Является членом редколлегии журнала "Чебышевский сборник", постоянным членом программных комитетов Международных конференций по алгебре и теории чисел, проводимых Тульским государственным педагогическим университетом им. Л. Н. Толстого.

### 3. Научная школа В. Н. Безверхнего

В. Н. Безверхний руководит научной школой и научным семинаром "Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп", семинаром "Основы теории групп", аспирантурой по комбинаторной теории групп.

Наиболее крупные научные результаты, полученные В. Н. Безверхним и его учениками [1] – [22]:

- доказана разрешимость проблемы вхождения в  $HN$ -расширениях и свободных произведениях групп; решена проблема сопряженности подгрупп в свободных группах, свободных произведениях групп,  $HN$ -расширениях с конечными ассоциированными подгруппами;
- доказана неразрешимость проблемы вхождения и сопряженности подгрупп в свободных произведениях свободных групп с объединением по подгруппам ранга 4;
- решена проблема Комерфорда: доказана разрешимость проблемы сопряженности и степенной сопряженности слов в свободном произведении групп с одним определяющим соотношением с кручением, объединенных по циклической подгруппе;
- описаны классы гиперболических групп, исследованы свойства Хаусона и  $SQ$ -универсальности в группах с одним определяющим соотношением;
- решена проблема сопряженности слов в древесном произведении свободных групп с циклическим объединением; получено обобщение теорем Магнуса и Гриндлингера об изоморфизме групп;
- доказана неразрешимость проблемы вхождения в неприводимых группах Артина конечного типа;

- доказана разрешимость проблемы вхождения в циклическую подгруппу в группах Артина конечного типа, группах Артина и Кокстера большого типа, группах с условием  $C(p) \& T(q)$ ;
- доказана неразрешимость проблемы сопряженности подгрупп в группах крашенных кос  $Rn(n > 4)$ ;
- доказана разрешимость проблемы сопряженности и обобщенной сопряженности слов в группах Артина и Кокстера большого типа;
- решена проблема степенной сопряженности слов в группах Артина и Кокстера экстрабольшого типа;
- доказана разрешимость проблемы сопряженности подгрупп, исследовано свойство Хаусона и указан алгоритм, выписывающий образующие пересечения конечно порожденных подгрупп в группах Кокстера с древесной структурой;
- доказана разрешимость проблемы обобщенной сопряженности слов в группах с условием  $C(p) \& T(q)$ ;
- решена проблема ширины в свободных произведениях групп с объединением.

Под руководством В. Н. Безверхнего защищены докторская диссертация [15]:

- Добрынина Ирина Васильевна "Решение алгоритмических проблем в группах Кокстера" (ЯрГУ, 2010);

кандидатские диссертации [16]–[22]:

- Добрынина Ирина Васильевна "О подгруппах в группах крашенных кос и группах Артина конечного типа" (МПГУ, 1997),
- Паршикова Елена Владиславовна "Проблемы степени и степенной сопряженности в группах с условиями  $C(4) \& T(4)$ " (МПГУ, 2001),
- Новикова Ольга Александровна "Решение алгоритмических проблем для свободного произведения с коммутирующими подгруппами" (МПГУ, 2002),
- Безверхняя Наталия Борисовна "Гиперболичность,  $SQ$ -универсальность и некоторые другие свойства групп с одним определяющим соотношением" (МПГУ, 2002),
- Инченко Оксана Владимировна "Некоторые алгоритмические проблемы в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой" (МПГУ, 2010),

- Кузнецова Анна Николаевна "Некоторые алгоритмические проблемы в группах Артина большого и экстрабольшого типа" (МПГУ, 2010),
- Платонова Оксана Юрьевна "Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой" (ЯрГУ, 2013).

## 4. Заключение

В заключение приведем слова Ю. Э. Трубицына:

"Я хорошо помню первую встречу с Владимиром Николаевичем, как будто это было не 30 лет назад, а на прошлой неделе. После отъезда М. Д. Гриндлингера из Тулы Владимир Николаевич руководил алгебраическим семинаром в Тульском пединституте. Первое заседание, на которое я пришел, не состоялось по какой-то причине, но Владимир Николаевич сказал, чтобы я обязательно приходил в следующий раз. Не буду описывать, как дальше развивались события - это знакомо каждому, кому посчастливилось иметь хорошего научного руководителя. Скажу только, что его разносторонность интересов и увлеченность наукой были видны сразу. Запомнилось, как после семинаров мы шли с ним по проспекту Ленина вниз к его дому. Как-то зимой, когда он объяснял что-то о группе кос, ему понадобилось нарисовать кое-что. После неудачной попытки рисовать носком ботинка на снегу, Владимир Николаевич с гораздо большим успехом использовал ключ, нацарапав им на льду все, что требовалось.

Так получилось, что меня заинтересовали немного другие задачи [23] (с уклоном в теорию полугрупп), но толчком в этом направлении послужила задача о применимости алгоритма Маркова с одним правилом, предложенная Владимиром Николаевичем (а он узнал о ней от М. Д. Гриндлингера). Впрочем, я с большой пользой читал статьи Владимира Николаевича, посвященные алгоритмическим вопросам в полугруппах.

К сожалению, судьба нас разбросала, но когда я недавно опять попал на семинар к Владимиру Николаевичу, очень приятно было видеть, что он совершенно не изменился, только студенты и аспиранты были другие. К его юбилею желаю ему научить алгебре еще много поколений студентов! У него это хорошо получается".

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безверхний В. Н. Решение проблемы вхождения в классе  $HNN$ -групп // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. 1981. С. 20–62.
2. Безверхний В. Н. О пересечении подгрупп в  $HNN$ -группах // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 1. С. 199–222.

3. Безверхний В. Н. Решение проблемы обобщенной сопряженности слов в  $C(p)&T(q)$ -группах // Известия Тульского гос. университета. Серия Математика. 1998. Т. 4. С. 5–13.
4. Безверхний В. Н. Решение обобщенной сопряженности слов в группах Артина большого типа // Фундаментальная и прикладная математика. 1999. Т. 5. № 1. С. 1–38.
5. Bezverkhni V. N., Dobrynina I. V. On the unsolvability of the conjugacy problem for subgroups of the group  $R_5$  of pure braids // Mathematical Notes. 1999. Vol. 65. N 1–2. P. 13–19.
6. Bezverkhni V. N., Dobrynina I. V. On width in some class of groups with two generators and one defining relation // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues). 2001. suppl. 2. P. 53–60.
7. Bezverkhni V. N., Dobrynina I. V. Normalizers of some classes of subgroups in braid groups // Mathematical Notes. 2003. Vol. 74. N 1–2. P. 18–29.
8. Bezverkhni V. N., Dobrynina I. V. A solution of the generalized conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type // Discrete Mathematics and Applications. 2005. Vol. 15. I. 6. P. 611–634.
9. Bezverkhni V. N., Grinblat V. A. Solution of the generalized conjugacy problem for words in pure subgroups of Artin groups of finite type // Mathematical Notes. 2006. Vol. 79. N 4–5. P. 606–613.
10. Bezverkhni V. N., Dobrynina I. V. A solution of the power conjugacy problem for words in Coxeter groups of extra-large type // Discrete Mathematics and Applications. 2008. Vol. 18. I. 5. P. 535–544.
11. Безверхний В. Н., Инченко О. В. Проблема сопряженности подгрупп в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой // Чебышевский сборник. 2010. Т. 11. № 3 (35). С. 32–56.
12. Безверхний В. Н., Устьян А. Е. Обобщения теорем В. Магнуса и М. Д. Гриндлингера // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14. № 3. С. 20–33.
13. Безверхний В. Н., Добрынина И. В. О проблеме свободы в группах Кокстера с древесной структурой // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 1–1. С. 5–13.
14. Безверхний В. Н. Проблемы вхождения и сопряженности подгрупп для свободного произведения свободных групп с объединением: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Тула. 1999.

15. Добрынина И. В. Решение алгоритмических проблем в группах Кокстера: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Ярославль. 2010.
16. Добрынина И. В. О подгруппах в группах крашенных кос и группах Артина конечного типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула. 1997.
17. Паршикова Е. В. Проблемы степени и степенной сопряженности в группах с условиями  $C(4)&T(4)$ : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула. 2001.
18. Новикова О. А. Решение алгоритмических проблем для свободного произведения с коммутирующими подгруппами: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула. 2002.
19. Безверхняя Н. Б. Гиперболичность,  $SQ$ -универсальность и некоторые другие свойства групп с одним определяющим соотношением: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула. 2002.
20. Инченко О. В. Некоторые алгоритмические проблемы в конечно порожденных группах Кокстера с древесной структурой: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула. 2010.
21. Кузнецова А. Н. Некоторые алгоритмические проблемы в группах Артина большого и экстрабольшого типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула. 2010.
22. Платонова О. Ю. Решение некоторых алгоритмических проблем в группах Артина с древесной структурой: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тула. 2013.
23. Трубицын Ю. Э. Алгоритмические проблемы и тождества в полугруппах со свойством Черча-Россера: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. 1996.

## REFERENCES

1. Bezverkhii V. N., 1981, Solution of the occurrence problem in a class of  $HNN$ -groups // Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups. Tula State Ped. Inst. Tula. P. 20–62.
2. Bezverkhii V. N., 1998, On intersection of subgroups in  $HNN$ -groups // Fundamental and Applied Mathematics. Vol. 4. No. 1. P. 199–222.
3. Bezverkhii V. N., 1998, Solution of the problem of generalized conjugacy in  $C(p)&T(q)$ -groups // Proceedings of Tula State University. Mathematics. Vol. 4. P. 5–13.
4. Bezverkhii V. N., 1999, Solution of the problem of generalized conjugacy in Artin groups of large type // Fundamental and Applied Mathematics. Vol. 5. No. 1. P. 1–38.

5. Bezverkhniy V. N., Dobrynina I. V. 1999, On the unsolvability of the conjugacy problem for subgroups of the group  $R_5$  of pure braids // Mathematical Notes. Vol. 65. No. 1–2. P. 13–19.
6. Bezverkhniy V. N., Dobrynina I. V. 2001, On width in some class of groups with two generators and one defining relation // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues). Suppl. 2. P. 53–60.
7. Bezverkhniy V. N., Dobrynina I. V. 2003, Normalizers of some classes of subgroups in braid groups // Mathematical Notes. Vol. 74. No. 1–2. P. 18–29.
8. Bezverkhniy V. N., Dobrynina I. V. 2005, A solution of the generalized conjugacy problem for words in Coxeter groups of large type // Discrete Mathematics and Applications. Vol. 15. I. 6. P. 611–634.
9. Bezverkhniy V. N., Grinblat V. A. 2006, Solution of the generalized conjugacy problem for words in pure subgroups of Artin groups of finite type // Mathematical Notes. Vol. 79. No. 4–5. P. 606–613.
10. Bezverkhniy V. N., Dobrynina I. V. 2008, A solution of the power conjugacy problem for words in Coxeter groups of extra-large type // Discrete Mathematics and Applications. Vol. 18. I. 5. P. 535–544.
11. Bezverkhniy V. N., Inchenko O. V. 2010, A subgroup conjugacy problem in finitely generated Coxeter groups with tree structure // Chebyshev Sb. Vol. 11. No. 3 (35). pp. 32–56.
12. Bezverkhniy V. N., Ustyan A. E. 2013, Generalization of theorems of Magnus and Greendlinger // Chebyshev Sb. Vol. 14. N 3. P. 20–33.
13. Bezverkhniy V. N., Dobrynina I. V. 2014, On a freedom problem in Coxeter groups with tree structure // Proceedings of Tula State University. Science. No. 1–1. P. 5–13.
14. Bezverkhniy V. N., 1999, Occurrence and conjugacy problems for subgroups in some classes of groups // Doctor of Science thesis, Tula.
15. Dobrynina I. V., 2010, Solution of algorithmic problems in Coxeter groups // Doctor of Science thesis. Yaroslavl.
16. Dobrynina I. V., 1997, On subgroups in groups of pure braids and Artin groups of finite type // PhD thesis. Tula.
17. Parshikova E. V., 2001, Problems of degree and degree conjugacy in small cancellation groups  $C(4)&T(4)$  // Tula.
18. Novikova O. A., 2002, Solution of algorithmic problems in free product of groups with commuting subgroups // PhD thesis. Tula.

19. Bezverkhnyaya N. B., 2002, Hyperbolicity, SQ-universality and other properties of one-relator groups // PhD thesis. Tula.
20. Inchenko O. V., 2010, On algorithmic problems in finitely generated Coxeter groups with tree structure // PhD thesis. Tula.
21. Kuznetsova A. N., 2010, Algorithmic problems in Artin groups of large and extra-large type // PhD thesis. Tula.
22. Platonova O. Yu., 2013, Solution of algorithmic problems in Artin groups with tree structure // PhD thesis. Tula.
23. Trubitsyn Yu. E., 1996, Algorithmic problems and identities in Church-Rosser semigroups // PhD thesis. Moscow.

Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого  
Поступило 11.02.2015