ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 2

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-142-150

Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости[1]

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственного университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

В работе продолжено рассмотрение нового класса рядово Дирихле — дзета-функции моноидов натуральных чисел. Основной задачей, решаемой в данной статье, является построение моноида натуральных чисел, для которого дзета-функция этого моноида имеет заданную абсциссу абсолютной сходимости.

Ранее автор решил аналогичную задачу построения множества натуральных чисел, для которого соответствующая дзета-функция имеет заданную абсциссу абсолютной сходимости.

Для решения задачи для дзета-функции моноида натуральных чисел возникают определенные трудности, связанные с необходимостью построения последовательности простых чисел, удовлетворяющих определенным требованиям на рост членов.

Было введено понятие σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел, члены которой удовлетворяют неравенству $n^\sigma \leqslant p_n < (n+1)^\sigma$.

С помощью теоремы Ингама с кубическим ростом простых чисел удалось построить σ-последовательность простых чисел для любого $\sigma \geqslant 3$. Для соответствующей дзета-функции моноида, порожденного данной σ-последовательностью простых, абсцисса абсолютной сходимости равна $\frac{1}{\sigma}$. Таким образом, с помощью теоремы Ингама удалось решить проблему для значений абсциссы абсолютной сходимости от 0 до $\frac{1}{3}$. Для таких моноидов удается получить асимптотическую формулу для функции распределения простых чисел $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$: $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x) = x^{\frac{1}{\sigma}} + \theta(x)$, где $-2 < \theta(x) < -1$.

Для доказательства существования моноида натуральных чисел, для дзета-функции которого значение абсциссы абсолютной сходимости от $\frac{1}{3}$ до 1, потребовалось использовать теорему Россера о простых числах. Для этого было введено понятие σ-последовательности второго рода.

В заключении рассмотрены актуальные задачи с дзета-функциями моноидов натуральных чисел, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, логарифма эйлерова произведения, σ-последовательности.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости// Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 2, С. 142–150.

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-142-150

The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence

Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate Professor of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry of Tula state pedagogical University. L. N. Tolstoy.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

The paper continues consideration of a new class of the Dirichlet — Zeta function of monoids of natural numbers. The main task solved in this paper is to construct a monoid of natural numbers for which the Zeta function of this monoid has a given abscissa of absolute convergence.

Previously, the author solved a similar problem of constructing a set of natural numbers for which the corresponding Zeta function has a given abscissa of absolute convergence.

To solve the problem for the Zeta function of the monoid of natural numbers there are certain difficulties associated with the need to build a sequence of primes that meet certain requirements for the growth of terms.

The notion σ-sequences $\mathbb{P}_\sigma$ of primes was introduced, whose terms satisfy the inequality $n^\sigma \leqslant p_n < (n+1)^\sigma$.

With the help of a theorem of Ingham with a cubic growth of Prime numbers was able to build a σ-a sequence of primes for any $\sigma \geqslant 3$. For the corresponding Zeta function of a monoid generated by a given σ -sequence of primes, the abscissa of absolute convergence is $\frac{1}{\sigma}$. Thus, with the help of Ingam's theorem it was possible to solve the problem for the abscissa values of absolute convergence from 0 to $\frac{1}{3}$. For such monoids it is possible to obtain an asymptotic formula for the Prime number distribution function $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$: $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x) = x^{\frac{1}{\sigma}} + \theta(x)$, where $-2 < \theta(x) < -1$.

To prove the existence of a monoid of natural numbers, for whose Zeta function the abscissa value of absolute convergence is from $\frac{1}{3}$ to 1, it was necessary to use Rosser's Prime number theorem. For this purpose, the concept σ-sequences of the second kind was introduced.

In conclusion, topical problems with zeta-functions of monoids of natural numbers that require further investigation are considered.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product, logarithm of the Euler product.

Bibliography: 14 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 142–150.

1. Введение

Пусть σ — произвольное вещественное число из интервала $(0; 1)$. В работе [9] показано, что для произвольной экспоненциальной системе PE простых чисел дзета-функция $\zeta(M(PE)|\alpha)$

минимального моноида $M(PE)$, образованного системой простых PE, имеет абсциссу абсолютной сходимости $\sigma_{M(PE)} = 0$. С другой стороны, дзета-функция Римана $\zeta(\alpha) = \zeta(\mathbb{N}|\alpha)$ имеет абсциссу абсолютной сходимости $\sigma_{\mathbb{N}} = 1$.

В работе [10] для $\beta > 1$ рассмотрено множество натуральных чисел $A_{\mathbb{N},\beta}$ вида

$$A_{\mathbb{N},\beta} = \left\{ \left[n^{\beta}\right] \Big| \, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для $\beta > 1$ и дзета-функции $\zeta(A_{\mathbb{N},\beta}|\alpha)$ справедливо равенство $\sigma_{A_{\mathbb{N},\beta}} = \frac{1}{\beta}$.*

Из которой следует, что имеются дзета-функции множеств натуральных чисел, для которых значение абсциссы абсолютной сходимости — любое число от 0 до 1. Возникает естественный вопрос о справедливости аналогичного утверждения для дзета-функции моноида натуральных чисел.

Цель настоящей работы — построить систему простых чисел $\mathbb{P}_{\sigma_0}$ такую, что для абсциссы абсолютной сходимости дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha)$ выполнялось равенство $\sigma_{M(\mathbb{P}_{\sigma_0})} = \sigma$.

2. Следствия из теоремы Ингама

Нам потребуется теорема Ингама о простых числах в следующей формулировке (см. [12], стр. 66).

Теорема 2. *Существует $X_I > 1$ такое, что для любого $x > X_I$ найдется простое число p_x, для которого выполнены неравенства*

$$x^3 \leqslant p_x \leqslant (x+1)^3. \tag{1}$$

Из этой теоремы сразу следует следующее утверждение.

Пусть $\sigma > 3$ и $X_{I,\sigma} = X_I^{\frac{3}{\sigma}}$, тогда для любого $x > X_{I,\sigma}$ найдется простое число $p_{x,\sigma}$, для которого выполнены неравенства

$$x^{\sigma} \leqslant p_{x,\sigma} \leqslant (x+1)^{\sigma}. \tag{2}$$

Действительно, пусть $x > X_{I,\sigma}$. Положим $y = x^{\frac{\sigma}{3}}$, тогда $x^{\sigma} = y^3$ и $y > X_I$. Поэтому, по теореме Ингама найдется простое число p_y такое, что $y^3 \leqslant p_y \leqslant (y+1)^3$, но от сюда следует, что $x^{\sigma} = y^3 \leqslant p_y$. Далее заметим, что $(y+1)^3 \leqslant (x+1)^{\sigma}$. Действительно, положим $\beta = \frac{\sigma}{3}$, тогда $\beta > 1$ и надо показать, что $y + 1 = x^{\beta} + 1 \leqslant (x+1)^{\beta}$. Положим $f(x) = (x+1)^{\beta} - x^{\beta} - 1$, тогда $f(0) = 0$. Имеем $f'(x) = (x+1)^{\beta} \ln(x+1) - x^{\beta} \ln x > 0$, поэтому $f(x) > 0$ при $x > 0$ и $p_y \leqslant (y+1)^3 < (x+1)^{\sigma}$. Следовательно, простое число $p_{x,\sigma} = p_y$ удовлетворяет неравенствам (2) и утверждение доказано. □

Дадим определение σ-последовательности $\mathbb{P}_{\sigma}$ простых чисел.

Определение 1. *Последовательность $\mathbb{P}_{\sigma}$ простых чисел называется σ-последовательностью, если*

$$\mathbb{P}_{\sigma} = \{p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots\}$$

и найдется N_{σ} такое, что для любого $n > N_{\sigma}$ выполняются неравенства

$$n^{\sigma} \leqslant p_n < (n+1)^{\sigma}. \tag{3}$$

Из следствия из теоремы Ингама следует, что σ-последовательности простых чисел существуют для любого $\sigma \geqslant 3$. Вопрос о существовании таких последовательностей при $1 < \sigma < 3$ остается открытым, хотя для $\sigma = 1$ они заведомо отсутствуют.

Рассмотрим дзета-функцию $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)$:

$$\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha) = \sum_{p \in \mathbb{P}_{\sigma_0}} \frac{1}{p^\alpha}.$$

Теорема 3. *Для абсциссы абсолютной сходимости $\sigma_{\mathbb{P}_{\sigma_0}}$ дзета-функции $\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)$ справедливо равенство*

$$\sigma_{\mathbb{P}_{\sigma_0}} = \frac{1}{\sigma_0}.$$

Доказательство. Действительно, для любого $\alpha = \sigma + it$ справедливо равенство $|\zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha)| \leqslant \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\sigma)$. Далее справедлива цепочка неравенств:

$$\sum_{n \leqslant N_{\sigma_0}} \frac{1}{p_n^\sigma} - \sum_{n=1}^{N_{\sigma_0}+1} \frac{1}{n^{\sigma\sigma_0}} + \zeta(\sigma\sigma_0) = \sum_{n \leqslant N_{\sigma_0}} \frac{1}{p_n^\sigma} + \sum_{n > N_{\sigma_0}} \frac{1}{(n+1)^{\sigma\sigma_0}} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^\sigma} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n \leqslant N_{\sigma_0}} \frac{1}{p_n^\sigma} + \sum_{n > N_{\sigma_0}} \frac{1}{n^{\sigma\sigma_0}} = \sum_{n \leqslant N_{\sigma_0}} \frac{1}{p_n^\sigma} - \sum_{n=1}^{N_{\sigma_0}} \frac{1}{n^{\sigma\sigma_0}} + \zeta(\sigma\sigma_0).$$

Отсюда следует, что $\sigma\sigma_0 > 1$ и, следовательно, $\sigma_{\mathbb{P}_{\sigma_0}} = \frac{1}{\sigma_0}$. Теорема доказана. □

Теорема 4. *Для абсциссы абсолютной сходимости $\sigma_{M(\mathbb{P}_{\sigma_0})}$ дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha)$ справедливо равенство*

$$\sigma_{M(\mathbb{P}_{\sigma_0})} = \frac{1}{\sigma_0}.$$

Доказательство. Действительно, для любого $\alpha = \sigma + it$ в области абсолютной сходимости справедливо равенство

$$\zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)^{-1}.$$

Для логарифма эйлерова произведения имеем:

$$\ln \zeta(M(\mathbb{P}_{\sigma_0})|\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k p_n^{k\alpha}} = \zeta(\mathbb{P}_{\sigma_0}|\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k p_n^{k\alpha}}$$

Отсюда следует, что $\sigma_{M(\mathbb{P}_{\sigma_0})} = \sigma_{\mathbb{P}_{\sigma_0}}$ и теорема доказана. □

Остановимся на вопросе о распределении простых чисел в σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел. Обозначим количество простых чисел в σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел, не превосходящих x через $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$.

Теорема 5. *При $x > N_\sigma : \sigma$ для функции $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$ справедливы равенства*

$$\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x) = x^{\frac{1}{\sigma}} + \theta(x), \qquad (4)$$

где $-2 < \theta(x) < -1$.

Доказательство. Пусть $n^\sigma \leqslant x < (n+1)^\sigma$, тогда из определения σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел вытекает, что

$$\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x) = \begin{cases} n-1, & \text{при } n^\sigma \leqslant x < p_n, \\ n, & \text{при } p_n \leqslant x < (n+1)^\sigma. \end{cases}$$

Так как $n = \left[x^{\frac{1}{\sigma}}\right]$, то

$$\theta(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\sigma}} - \left\{x^{\frac{1}{\sigma}}\right\} - 1, & \text{при } n^\sigma \leqslant x < p_n, \\ \\ x^{\frac{1}{\sigma}} - \left\{x^{\frac{1}{\sigma}}\right\}, & \text{при } p_n \leqslant x < (n+1)^\sigma. \end{cases}$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

3. Следствия из теоремы Россера

Теперь нам потребуется теорема Россера о простых числах в следующей формулировке (см. [15]).

Теорема 6. *Для любого $n > 1$ и простого p_n выполнены неравенства*

$$n \ln n < p_n < n(\ln n + 2\ln\ln n). \tag{5}$$

Рассмотрим при $\sigma_0 > 1$ ряд $S_{\sigma_0}(\alpha)$, заданный равенством:

$$S_{\sigma_0}(\alpha) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^{\sigma_0}\ln n)^\alpha}.$$

Так как ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

расходится, то абсцисса абсолютной сходимости ряда $S_{\sigma_0}(\alpha)$ при $\alpha = \sigma + it$ будет $\beta_0 = \frac{1}{\sigma_0}$. Таким образом, при $\sigma \geqslant \beta > \beta_0$ ряд $S_{\sigma_0}(\alpha)$ равномерно сходится, а при $\sigma \leqslant \beta_0$ расходится.

Определение 2. *Последовательность $\mathbb{N}_\sigma$ натуральных чисел называется σ-последовательностью, если*

$$\mathbb{N}_\sigma = \{m_1 < m_2 < \ldots < m_n < \ldots\}$$

и найдется σ такое, что для любого n выполняются неравенства

$$n^\sigma \leqslant m_n < (n+1)^\sigma. \tag{6}$$

Очевидно, что σ-последовательности натуральных чисел существуют для любого $\sigma \geqslant 1$.

Определение 3. *Последовательность $\mathbb{P}^*_\sigma$ простых чисел называется σ-последовательностью второго рода, если*

$$\mathbb{P}^*_\sigma = \{p_{m_1} < p_{m_2} < \ldots < p_{m_n} < \ldots\}$$

и множество номеров m_n образуют σ-последовательность $\mathbb{N}_\sigma$ натуральных чисел.

Теорема 7. *Для абсциссы абсолютной сходимости $\sigma_{\mathbb{P}^*_{\sigma_0}}$ дзета-функции $\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)$ справедливо равенство*

$$\sigma_{\mathbb{P}^*_{\sigma_0}} = \frac{1}{\sigma_0}.$$

Доказательство. Действительно, для любого $\alpha = \sigma + it$ справедливо равенство $|\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha)| \leqslant \zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma)$.

Далее заметим, что

$$m_n \ln m_n < p_{m_n} < m_n(\ln m_n + 2\ln\ln m_n), \quad n^{\sigma_0} \leqslant m_n < (n+1)^{\sigma_0};$$
$$\sigma_0 n^{\sigma_0} \ln n < p_{m_n} < 3\sigma_0 (n+1)^{\sigma_0} \ln(n+1).$$

Отсюда следует, что $\zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\sigma)$ оценивается сверху и снизу через $S_{\sigma_0}(\sigma)$, а значит $\sigma\sigma_0 > 1$ и, следовательно, $\sigma_{\mathbb{P}^*_{\sigma_0}} = \frac{1}{\sigma_0}$. Теорема доказана. □

Теорема 8. *Для абсциссы абсолютной сходимости $\sigma_{M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})}$ дзета-функции $\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\alpha)$ справедливо равенство*

$$\sigma_{M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})} = \frac{1}{\sigma_0}.$$

Доказательство. Действительно, для любого $\alpha = \sigma + it$ в области абсолютной сходимости справедливо равенство

$$\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^{\alpha}}\right)^{-1}.$$

Для логарифма эйлерова произведения имеем:

$$\ln\zeta(M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})|\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kp_n^{k\alpha}} = \zeta(\mathbb{P}^*_{\sigma_0}|\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{kp_n^{k\alpha}}$$

Отсюда следует, что $\sigma_{M(\mathbb{P}^*_{\sigma_0})} = \sigma_{\mathbb{P}^*_{\sigma_0}}$ и теорема доказана. □

Вопрос о распределении простых чисел в σ-последовательности второго рода более сложный и требует специального рассмотрения. Это связано с тем, что интервалы для простого p_{m_ν} и $p_{m_{\nu+1}}$ пересекаются. Более того, количество пересекающихся интервалов растёт с ростом номера ν.

4. Заключение

Из предыдущего видно, что для дзета-функции моноидов натуральных чисел значение абсциссы абсолютной сходимости может изменяться от 0 до 1. При построении соответствующих множеств простых чисел при значениях абсциссы от 0 до $\frac{1}{3}$ можно использовать теорему Ингама и её следствия. При значениях от $\frac{1}{3}$ до 1 требуется использовать теорему Россера. Первый случай в некотором смысле более простой и удается описать функцию распределения простых чисел, второй случай оказывается более сложным и требует новых исследований.

Так как в полуплоскости абсолютной сходимости дзета-функция любого моноида натуральных чисел, порожденного произвольным множеством простых чисел, представляется в виде эйлерова произведения, то отсюда следует, что в полуплоскости абсолютной сходимости эта дзета-функция не имеет нулей.

Для любого $q > 2$ дзета-функцию любого моноида натуральных чисел можно разбить на сумму рядов Дирихле, соответствующим суммам по пересечению моноида и произвольного класса вычетов по модулю q. Как известно, для натурального ряда соответствующие ряды Дирихле выражаются через дзета-функцию Гурвица, а для неё справедливы результаты о нуля: теоремы Дэвенпорта — Хейльброна [1, 13] и теорема Воронина [2, 3].

Возникает естественный вопрос об исследовании возможных аналогов этих результатов на случай дзета-функцию произвольного моноида натуральных чисел, порожденного множеством простых чисел.

Данная тематика имеет естественное многомерное обобщение. Действительно, рассмотрим многомерный моноид $\mathbb{N}^s$ с операцией покоординатного умножения и единичным элементом $(1,\dots,1)$. Дзета-функция этого моноида определяется естественным образом:

$$\zeta\left(\mathbb{N}^s|\,\alpha\right)=\sum_{\vec{x}\in\mathbb{N}^s}\frac{1}{(x_1\dots x_s)^\alpha}\quad \alpha=\sigma+it,\quad \sigma>1.$$

Очевидно, что $\zeta\left(\mathbb{N}^s|\,\alpha\right)=\zeta^s(\alpha)$.

В моноиде $\mathbb{N}^s$ имеется несчетное множество различных подмоноидов $M\subset\mathbb{N}^s$, для которых можно определить дзета-функцию $\zeta\left(M|\,\alpha\right)$ по формуле

$$\zeta\left(M|\,\alpha\right)=\sum_{\vec{x}\in M}\frac{1}{(x_1\dots x_s)^\alpha}\quad \alpha=\sigma+it,\quad \sigma>\sigma_M,$$

где $0\leqslant\sigma_M\leqslant1$ — абсцисса абсолютной сходимости дзета-ряда.

Другое многомерное обобщение связано с чисто-вещественными алгебраическими полями. Пусть F_s — чисто вещественное алгебраическое поле степени s, $F_s^{(1)}=F_s,F_s^{(2)},\dots,\dots,F_s^{(s)}$ — набор его сопряженных полей и для любого алгебраического числа Θ из F_s $\Theta^{(1)}=\Theta,\Theta^{(2)},\dots,\Theta^{(s)}$ — набор его алгебраически сопряженных чисел. Через $\mathbb{Z}_{F_s}$ обозначим кольцо целых алгебраических чисел поля F_s.

Рассмотрим алгебраическую решётку $\Lambda=\left\{\left(\Theta^{(1)},\Theta^{(2)},\dots,\Theta^{(s)}\right)\middle|\,\Theta\in\mathbb{Z}_{F_s}\right\}$. Относительно операции покоординатного умножения решётка Λ является моноидом с единицей $(1,\dots,1)$, так как, согласно Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддееву, являются решётками, повторяющимися умножением. Как показано в теории гиперболической дзета-функции решёток, для алгебраической решётки Λ нельзя определить дзета-функцию, так как она будет расходиться для любого значения α в силу теоремы Дирихле об алгебраических единицах.

Таким образом, мы видим, что теория дзета-функций моноидов натуральных чисел тесно связана с теорией гиперболических дзета-функций решёток, с которой можно познакомиться по работам [4, 5, 6, 7, 8, 14].

В заключении автор выражает свою глубокую признательность профессорам В. И. Иванову и В. Н. Чубарикову за внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.

2. С. М. Воронин Избранные труды: Математика / Под ред. А. А. Карацубы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2006. — 480 с.

3. С. М. Воронин, А. А. Карацуба Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

4. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 6–85.

5. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с. http://elibrary.ru/item.asp? id=20905960

6. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4–107.

7. Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Доклады академии наук 2007. Т. 412, № 3. С. 302–304.

8. Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский, В. Н. Соболева, Д. К. Соболев, Л. П. Добровольская, О. Е. Бочарова О гиперболической дзета-функции Гурвица // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 3. С. 72–105.

9. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

10. Н. Н. Добровольский О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 79–105.

11. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, вып. 1. С. 106–123.

12. Э. Трост Простые числа — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1959. — 136 с.

13. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

14. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovol'skii, N. N. Dobrovolsky. On Hyperbolic Zeta Function of Lattices. In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications. Vol. 211. 2014. P. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

15. B. Rosser The n-th Prime is greater than $n \log n$ // Proc. London. math. Soc. 1938. Vol. 45. pp. 21–44.

REFERENCES

1. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, "Around the Davenport–Heilbronn function", *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.

2. Voronin S. M., 2006, *Izbrannye trudy: Matematika. Pod red. A. A. Karacuby*, Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana, Moskva, 480 p.

3. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

4. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrova I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.

5. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, Mnogomernye teoretiko-chislovye setki i reshyotki i algoritmy poiska optimal'nykh koehffitsientov [Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients], Izdatel'stvo Tul'skogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. L.N. Tolstogo, Tula, Russia.

6. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Dobrovol'skii, N. N. 2012, "The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients", Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

7. Dobrovol'skij M. N., 2007, "Funkcional'noe uravnenie dlja giperbolicheskoj dzeta-funkcii celochislennyh reshetok" , *Doklady akademii nauk*, vol 412, № 3, pp. 302–304.

8. Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Soboleva V. N., Sobolev D. K., Dobrovol'skaya L. P., Bocharova O. E., 2016, "On hyperbolic Hurwitz zeta function" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 17, № 3 pp. 72–105.

9. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 18, № 4. P. 187–207.

10. Dobrovolsky N. N., 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, № 1. P.

11. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 106–123.

12. Trost E., 1959, "Prime numbers" , *Izd-vo Fiz-matlit, Moskva*, 511 p.

13. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series" , *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

14. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

15. Rosser B., 1938, "The n-th Prime is greater than $n \log n$" , *Proc. London. math. Soc.* Vol. 45. pp. 21–44.