ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-80-89

О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа[1]

Горбачёв Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: dvgmail@mail.ru
Мартьянов Иван Анатольевич — аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственного университет.
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Для $0 < p < \infty$ мы изучаем взаимосвязь между константой Никольского для тригонометрических полиномов порядка не больше n

$$\mathcal{C}(n,p) = \sup_{T_n \neq 0} \frac{\|T_n\|_\infty}{\|T_n\|_p}$$

и константой Никольского для целых функций экспоненциального типа не больше 1

$$\mathcal{L}(p) = \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p}.$$

Недавно Е. Левин и Д. Любинский доказали, что

$$\mathcal{C}(n,p) = \mathcal{L}(p) n^{1/p}(1+o(1)), \quad n \to \infty.$$

М. Ганзбург и С. Тихонов обобщили этот результат на случай констант Никольского–Бернштейна.

Мы доказываем неравенства

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p) \leqslant \mathcal{C}(n,p) \leqslant (n + \lceil p^{-1} \rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 < p < \infty,$$

которые уточняют результат Левина и Любинского. Доказательство следует нашему старому подходу, основанному на свойствах интегрального ядра Фейера. С помощью этого подхода ранее были доказаны оценки при $p = 1$

$$n\mathcal{L}(1) \leqslant \mathcal{C}(n,1) \leqslant (n+1)\mathcal{L}(1).$$

Данные неравенства позволяют оценить константу $\mathcal{L}(p)$, приближенно вычисляя $\mathcal{C}(n,p)$ для больших n. Чтобы это сделать мы используем недавние результаты В.В. Арестова и М.В. Дейкаловой, которые выразили константу Никольского $\mathcal{C}(n,p)$ при помощи алгебраического полинома ρ_n, наименее уклоняющегося от нуля в пространстве L^p на отрезке $[-1,1]$ с весом $(1-t)v(t)$, где $v(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ — вес Чебышева. Как следствие, мы уточняем оценки для константы Никольского $\mathcal{L}(1)$ и находим, что

$$1.081 < 2\pi\mathcal{L}(1) < 1.082.$$

Для сравнения предыдущие оценки были $1.081 < 2\pi\mathcal{L}(1) < 1.098$.

Ключевые слова: тригонометрический полином, целая функция экспоненциального типа, константа Никольского, вес Чебышева.

Библиография: 9 названий.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов. О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 80–89.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-80-89

On interrelation of Nikolskii Constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type

Gorbachev Dmitry Viktorovich — professor of the department of applied mathematics and computer science, doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University.
e-mail: dvgmail@mail.ru
Martyanov Ivan Anatol'evich — graduate student of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University.
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Abstract

For $0 < p < \infty$, we investigate the interrelation between the Nikolskii constant for trigonometric polynomials of order at most n

$$\mathcal{C}(n,p) = \sup_{T_n \neq 0} \frac{\|T_n\|_\infty}{\|T_n\|_p}$$

and the Nikolskii constant for entire functions of exponential type at most 1

$$\mathcal{L}(p) = \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p}.$$

Recently E. Levin and D. Lubinsky have proved that

$$\mathcal{C}(n,p) = \mathcal{L}(p) n^{1/p}(1 + o(1)), \quad n \to \infty.$$

M. Ganzburg and S. Tikhonov have extend this result on the case of Nikolskii–Bernstein constants.

We prove inequalities

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p) \leqslant \mathcal{C}(n,p) \leqslant (n + \lceil p^{-1} \rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 < p < \infty,$$

which improve the result of Levin and Lubinsky. The proof follows our old approach based on properties of the integral Fejer kernel. Using this approach we proved earlier estimates for $p = 1$

$$n\mathcal{L}(1) \leqslant \mathcal{C}(n,1) \leqslant (n+1)\mathcal{L}(1).$$

Using such inequalities, we can estimate the constant $\mathcal{L}(p)$ solving approximately $\mathcal{C}(n,p)$ for large n. To do this we use recent results of V. Arestov and M. Deikalova, who expressed the Nikolskii constant $\mathcal{C}(n,p)$ using the algebraic polynomial ρ_n that deviates least from zero in the space L^p on the segment $[-1,1]$ with the weight $(1-t)v(t)$, where $v(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ is the Chebyshev weight. As consequence, we refine estimates of the Nikolskii constant $\mathcal{L}(1)$ and find that

$$1.081 < 2\pi\mathcal{L}(1) < 1.082.$$

To compare previous estimates were $1.081 < 2\pi\mathcal{L}(1) < 1.098$.

Keywords: trigonometric polynomial, entire function of exponential type, Nikolskii constant, Chebyshev weight.

Bibliography: 9 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov, 2018, "On interrelation of Nikolskii Constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 80–89.

1. Введение

Для $0 < p \leqslant \infty$ и $Q \subseteq \mathbb{R}$ через

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_Q |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

обозначим норму функции f в лебеговом пространстве $L^p(Q)$.

Рассмотрим задачу о взаимосвязи точных констант в неравенстве Никольского между L^∞ и L^p нормами для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа. Этой задаче посвящены недавние работы [7, 8, 5], а также наша ранняя работа [6].

Константа Никольского для тригонометрических полиномов порядка не больше $n \in \mathbb{Z}_+$

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \in L^p([0, 2\pi))$$

определяется равенством

$$\mathcal{C}(n, p) = \sup_{T_n \neq 0} \frac{\|T_n\|_\infty}{\|T_n\|_p}.$$

Как хорошо известно, при фиксированном p

$$\mathcal{C}(n, p) \asymp n^{1/p}, \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Похожим образом определяется константа Никольского для целых функций f экспоненциального типа не больше 1:

$$\mathcal{L}(p) = \sup_{f \neq 0} \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_p}.$$

Напомним, что целые функции $f \in L^p(\mathbb{R})$ экспоненциального типа не больше $\sigma > 0$ ограничены на $\mathbb{R}$ и поэтому характеризуются оценкой

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{\sigma|\operatorname{Im} z|}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Замечание 1. *Константа Никольского для функций типа не больше σ равна $\mathcal{L}(p)\sigma^{1/p}$.*

Замечание 2. *В работе* [5, Theorem 1.1] *доказано, что в обоих случаях при вычислении константы Никольского достаточно ограничиться действительными функциями.*

Точные константы Никольского при $p>0$ известны только при $p=2$. В этом случае

$$\mathcal{C}(n,2)=(n+1/2)^{1/2}\mathcal{L}(2),\quad n\in\mathbb{Z}_+,$$

где

$$\mathcal{L}(2)=\pi^{-1}.$$

Нахождение точных констант для других $p>0$ является открытой проблемой. Однако известно точное значения в предельном случае $p\to 0$, полученное в работе [1]:

$$\mathcal{C}(n,0)=4^n e^{-n/2}. \tag{2}$$

Особый интерес представляет случай $p=1$, имеющий долгую историю. Обзоры известных результатов приведены в [3, 5, 6]. В частности в [6] доказано, что для всех $n\in\mathbb{Z}_+$ справедливы оценки

$$n\mathcal{L}(1)\leqslant\mathcal{C}(n,1)\leqslant(n+1)\mathcal{L}(1), \tag{3}$$

где

$$1.081<2\pi\mathcal{L}(1)<1.098. \tag{4}$$

В работе [7] получен следующий результат о взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа в пространстве L^p при $p>0$:

$$\mathcal{C}(n,p)=\mathcal{L}(p)n^{1/p}(1+o(1)),\quad n\to\infty. \tag{5}$$

В работе [5] это равенство обобщено на случай констант Никольского–Бернштейна.

Здесь мы хотели бы уточнить асимптотическое равенство (5) и по аналогии с (3) записать следующие границы.

Теорема 1. *Пусть $p>0$ и $n\in\mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$n^{1/p}\mathcal{L}(p)\leqslant\mathcal{C}(n,p)\leqslant(n+\lceil p^{-1}\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p), \tag{6}$$

где $\lceil a\rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее, чем a.

Простое доказательство теоремы 1, основанное на нашем подходе из [6], мы приводим в секции 2. Отметим зависимость верхней оценки в (6) от $p\in(0,1)$, что представляется не случайным в связи с разным типом поведения констант Никольского $\mathcal{C}(n,p)$ при $p>0$ и $p=0$ (ср. (1) и (2)).

Мы пока не рассматриваем случай констант Никольского–Бернштейна, где у нас есть трудности в случае $0<p<1$.

В связи с теоремой 1 отметим доказанное в работе [4] похожее неравенство

$$\alpha_p\leqslant C_{np}\leqslant\alpha_p\Big(1+\frac{1}{n}\Big),\quad 1\leqslant p\leqslant\infty,$$

где $\alpha_p=\pi\|\cos x\|_{p'}^{-1}$, $C_{np}=\inf\|T_n\|_p$ и нижняя грань берется по всем действительным тригонометрическим полиномам $T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, для которых

$$\|\widehat{T}_n\|_\infty=\max\{|a_0|,|a_1|,\dots,|a_n|,|b_1|,\dots,|b_n|\}=1.$$

Кроме того, $C_{np}=\alpha_p$, если $p'=2,4,\dots$ и $n\geqslant p'-1$.

Неравенство (3) и теорему 1 можно использовать для оценок константы $\mathcal{L}(p)$. Для этого нужно приближенно вычислить константу $\mathcal{C}(n,p)$ при достаточно большом n. При $p\geqslant 1$ соответствующий алгоритм может быть разработан на основе результатов статьи [2]. Мы проделаем это в секции 3. Как следствие, получается следующее утверждение, уточняющее (4).

Предложение 1. *Имеем*

$$1.081<2\pi\mathcal{L}(1)<1.082.$$

2. Доказательство теоремы 1

2.1. Предварительные сведения

Как было отмечено в замечании 2 во введении можно ограничиться действительными функциями.

Для удобства рассмотрим константы Никольского для 1-периодических полиномов

$$t_n(x) = \sum_{|k|\leqslant n} c_k e^{2\pi ikx} \in L^p(\mathbb{T}), \quad \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

и целых функций

$$f(z) = O(e^{2\pi|\mathrm{Im}\, z|}), \quad z \in \mathbb{C},$$

экспоненциального типа не больше 2π. Соответствующие константы обозначим через c_{np} и ℓ_p. С помощью замены переменного находим, что

$$c_{np} = (2\pi)^{1/p}\mathcal{C}(n,p), \quad \ell_p = (2\pi)^{1/p}\mathcal{L}(p), \tag{7}$$

поэтому

$$\frac{\mathcal{C}(n,p)}{\mathcal{L}(p)} = \frac{c_{np}}{\ell_p}.$$

Во всех работах [6, 7, 8, 5] в том или ином виде применялись свойства sinc-функции

$$\mathrm{sinc}\,(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

В частности, положим

$$\Delta(x) = \max\,(1-|x|, 0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда по [6, Лемма 3] преобразованием Фурье функции Δ будет интегральное ядро Фейера

$$\widehat{\Delta}(y) = \int_{\mathbb{R}} \Delta(x) e^{-2\pi ixy}\, dx = \Big(\frac{\sin \pi y}{\pi y}\Big)^2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Функция $\widehat{\Delta}$ является неотрицательной четной целой функцией экспоненциального типа 2π со следующими свойствами: $\widehat{\Delta}(0) = 1$, $\widehat{\Delta}(k) = 0$ для всех целых $k \neq 0$,

$$\widehat{\Delta}(y) \leqslant 1, \quad \widehat{\Delta}(y) = O\Big(\frac{1}{1+y^2}\Big), \quad y \in \mathbb{R},$$

и

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\Delta}(y+k) = 1, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Можно показать, что этими свойствами функция Δ определяется единственным образом.

Доказательство тождества (8) основано на классической формуле суммирования Пуассона [9, Sect. VII.2]

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi ikx}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

справедливой, в частности, если $f(x)$ и $\widehat{f}(x)$ одновременно оцениваются как $O((1+|x|)^{-1-\varepsilon})$ для всех $x \in \mathbb{R}$ с некоторым $\varepsilon > 0$.

Норма пространства L^p на периоде или оси при $0 < p \leqslant \infty$ инвариантна относительно сдвига аргумента функции. Таким же свойством обладают подпространства полиномов и целых функций. Отсюда вытекает следующий известный факт:

$$c_{np} = \sup_{t_n \neq 0} \frac{t_n(0)}{\|t_n\|_p}, \quad 0 < p < \infty,$$

и аналогично для константы ℓ_p.

При $p \geqslant 1$ здесь можно ограничиться четными функциями f, поскольку иначе можно рассмотреть четную составляющую $f_{\mathrm{even}}(x) = (f(x) + f(-x))/2$, которая остается в нужном классе и обладает свойствами $f_{\mathrm{even}}(0) = f(0)$ и $\|f_{\mathrm{even}}\|_p \leqslant \|f\|_p$.

2.2. Доказательство неравенства $n^{1/p}\mathcal{L}(p) \leqslant \mathcal{C}(n,p)$

При $n = 0$ неравенство верно, поэтому пусть $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольную целую функцию $f \in L^p(\mathbb{R})$ экспоненциального типа не больше 2π и построим по ней тригонометрический многочлен t_n порядка не больше n с нужными свойствами. Для этого положим

$$g(x) = f(x)\widehat{\Delta}\Big(\frac{x}{n}\Big).$$

Тогда g — целая функция экспоненциального типа не больше $2\pi(1 + 1/n)$ и $g(x) = O(x^{-2})$ при $x \to \pm\infty$. Поэтому $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\widehat{g} \in C(\mathbb{R})$ и по теореме Пэли–Винера [9, Sect. III.4]

$$\widehat{g}(y) = 0, \quad |y| \geqslant 1 + \frac{1}{n}.$$

Искомый многочлен t_n найдем периодизацией функции $ng(nx)$. Ее преобразование Фурье равно $\widehat{g}(y/n)$, поэтому по формуле суммирования Пуассона (9)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} ng(n(x+k)) = \sum_{|k|\leqslant n} \widehat{g}\Big(\frac{k}{n}\Big)e^{2\pi ikx} = t_n(x).$$

Поскольку $\widehat{\Delta}(k) = 0$ для целых $k \neq 0$, то

$$t_n(0) = n\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(nk)\widehat{\Delta}(k) = nf(0).$$

Оценим сверху норму полинома t_n при $0 < p < \infty$. Имеем

$$\|t_n\|_p^p = \int_0^1 \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} ng(n(x+k))\Big|^p dx \leqslant n^p \int_0^1 \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+k))|\,\widehat{\Delta}(x+k)\Big)^p dx.$$

Покажем, что

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+k))|\,\widehat{\Delta}(x+k)\Big)^p \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+k))|^p. \tag{10}$$

При $p \geqslant 1$ для этого воспользуемся неравенством Гёльдера

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+k))|\,\widehat{\Delta}(x+k) \leqslant \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+k))|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\Delta}^{p'}(x+k)\Big)^{1/p'},$$

где сопряженный показатель $p' = p/(p-1) \geqslant 1$. Поэтому

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\Delta}^{p'}(x+k) \leqslant \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\Delta}(x+k)\Big)^{p'} = 1$$

и (10) верно.

Если $0 < p < 1$, то

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+k))|\,\widehat{\Delta}(x+k)\Big)^p \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+k))|^p\,\widehat{\Delta}^p(x+k)$$

и (10) верно в силу $\widehat{\Delta}^p(x+k) \leqslant 1$.

Продолжим оценку $\|t_n\|_p^p$:

$$\|t_n\|_p^p \leqslant n^p \int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+k))|^p\,dx = n^{p-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{nk}^{n(k+1)} |f(x)|^p\,dx = n^{p-1}\|f\|_p^p.$$

Таким образом,

$$\frac{nf(0)}{n^{1-1/p}\|f\|_p} \leqslant \frac{t_n(0)}{\|t_n\|_p} \leqslant c_{np}.$$

Отсюда, переходя к верхней грани по f, выводим нужное неравенство $n^{1/p}\ell_p \leqslant c_{np}$.

2.3. Доказательство неравенства $\mathcal{C}(n,p) \leqslant (n+\lceil p^{-1}\rceil)^{1/p}\mathcal{L}(p)$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и t_{n-1} — произвольный тригонометрический полином порядка не больше $n-1$. Одновременно он является целой функцией экспоненциального типа не больше $2\pi(n-1)$.

Определим целую функцию

$$f(x) = \widehat{\Delta}^m\Big(\frac{x}{n}\Big)t_{n-1}\Big(\frac{x}{n}\Big)$$

где $m = \lceil p^{-1}\rceil$. Она имеет экспоненциальный тип не больше $2\pi(m+n-1)/n$. Отсюда, замечания 1 и второго соотношения в (7) следует, что

$$\frac{f(0)}{\|f\|_p} \leqslant \Big(\frac{m+n-1}{n}\Big)^{1/p}\ell_p. \tag{11}$$

Имеем $f(0) = t_{n-1}(0)$ и как в пункте 2.2

$$\|f\|_p^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{nk}^{n(k+1)} |f(x)|^p\,dx = n\int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(n(x+k))|^p\,dx.$$

Подставляя сюда выражение f и учитывая периодичность t_{n-1}, находим

$$\|f\|_p^p = n\int_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\Delta}^{mp}(x+k)|t_{n-1}(x+k)|^p\,dx = n\int_0^1 |t_{n-1}(x)|^p \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\Delta}^{mp}(x+k)\,dx.$$

Поскольку $mp \geqslant 1$, то как и в пункте 2.2 имеем $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\Delta}^{mp}(x+k) \leqslant 1$. Поэтому

$$\|f\|_p \leqslant n^{1/p}\|t_{n-1}\|_p.$$

Таким образом, с учетом (11) находим

$$\frac{t_{n-1}(0)}{\|t_{n-1}\|_p} \leqslant \frac{f(0)}{n^{-1/p}\|f\|_p} \leqslant (m+n-1)^{1/p}\ell_p.$$

Переходя здесь к верхней грани по t_{n-1} и заменяя $n-1$ на n, получаем нужную оценку

$$c_{np} \leqslant (n+m)^{1/p}\ell_p, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

3. Доказательство предложения 1

Пусть $1 \leqslant p < \infty$. В силу теоремы 1

$$(n+1)^{-1/p}\mathcal{C}(n,p) \leqslant \mathcal{L}(p) \leqslant n^{-1/p}\mathcal{C}(n,p).$$

Эти границы можно использовать для получения оценок константы Никольского $\mathcal{L}(p)$, вычисляя приближенно $\mathcal{C}(n,p)$ для больших n.

Покажем, как этом можно сделать при помощи результатов работы [2]. Во-первых, в ней показано, что

$$\mathcal{C}(n,p) = 2^{-1/p}\mathcal{M}_v(n,p), \quad \mathcal{M}_v(n,p) = \sup_{P_n \neq 0} \frac{\|P_n\|_\infty}{\|P_n\|_{p,v}},$$

где $\mathcal{M}_v(n,p)$ — константа Никольского для действительных алгебраических полиномом $P_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ в пространстве L^p на отрезке $[-1,1]$ с весом Чебышёва $v(t) = (1-t^2)^{-1/2}$,

$$\|f\|_{p,v} = \left(\int_{-1}^1 |f(t)|^p v(t)\,dt\right)^{1/p}, \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|.$$

Во-вторых, в [2] доказано, что

$$\mathcal{M}_v(n,p) = \frac{\|\rho_n\|_{p,v}^{p-1}}{I(n,p)}, \quad I(n,p) = \int_{-1}^1 |\rho_n(t)|^{p-1}\operatorname{sign}\rho_n(t)\,v(t)\,dt,$$

где $\rho_n(t)$ — полином вида

$$\rho_n(t) = \prod_{i=1}^n (t - t_{ni}), \quad 1 > t_{n1} > \ldots > t_{nn} > -1,$$

наименее уклоняющийся от нуля в пространстве L^p на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(t) = (1-t)v(t)$. Полином ρ_n единственный и характеризуется следующим соотношением ортогональности:

$$\int_{-1}^1 P_{n-1}(t)|\rho_n(t)|^{p-1}\operatorname{sign}\rho_n(t)\,w(t)\,dt = 0, \quad \forall\, P_{n-1}(t). \tag{12}$$

Вернемся к доказательству предложения 1, для которого $p=1$. Имеем

$$\mathcal{C}(n,1) = \frac{1}{2I(n,1)},$$

где

$$I(n,1) = \int_{-1}^1 \operatorname{sign}\rho_n(t)\,v(t)\,dt = \sum_{i=0}^n (-1)^i \int_{t_{ni}}^{t_{n,i+1}} v(t)\,dt$$

и положено $t_{n0} = 1$, $t_{n,n+1} = -1$.

Соотношение (12) достаточно записать на базисных функциях. Мы использовали полиномы Чебышева $T_j(t) = \cos(j \arccos t)$:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \int_{t_{ni}}^{t_{n,i+1}} T_j(t)\,(1-t)v(t)\,dt = 0, \quad j = 0,1,\ldots,n-1.$$

Теперь удобно вернуться к тригонометрическим функциям при помощи замены переменного $t = \cos x$, $x \in [0,\pi]$. Тогда $t_{ni} = \cos x_{ni}$, где $0 = x_{n0} < x_{n1} < \ldots < x_{nn} < x_{n,n+1} = \pi$, и

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \int_{x_{ni}}^{x_{n,i+1}} (1-\cos x)\cos jx\,dx = 0, \quad j = 0,1,\ldots,n-1.$$

Простое интегрирование дает систему из n тригонометрических уравнений для определения n неизвестных корней $x_{ni} \in (0, \pi)$, $i = 1, \ldots, n$. Эта система эффективно решается методом Ньютона с переменным шагом при достаточно больших n. Проделав это, вычисляем величину

$$I(n,1) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_{n,i+1} - x_{ni})$$

и приближенное значение $\mathcal{C}(n, 1)$.

Мы провели необходимые вычисления для разных n. В частности, предложение 1 было получено при $n = 6000$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arestov V. V. Inequality of different metrics for trigonometric polynomials // Math. Notes. 1980. Vol. 27, no. 4. P. 265–269.

2. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708.

3. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Analysis Math. 2016. Vol. 42, no. 2. P. 91–120.

4. Ash J. M., Ganzburg M. An Extremal Problem for Trigonometric Polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 127, no. 1. P. 211–216.

5. Ganzburg M., Tikhonov S. On Sharp Constants in Bernstein–Nikolskii Inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.

6. Gorbachev D. V. An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 2005. Vol. 2. P. S117–S138.

7. Levin E., Lubinsky D. L_p Chritoffel functions, L_p universality, and Paley–Wiener spaces // J. D'Analyse Math. 2015. Vol. 125. P. 243–283.

8. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468.

9. Stein E. M., Weiss G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. N. J.: Princeton, 1971.

REFERENCES

1. Arestov V. V. Inequality of different metrics for trigonometric polynomials // Math. Notes. 1980. Vol. 27, no. 4. P. 265–269.

2. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708.

3. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Analysis Math. 2016. Vol. 42, no. 2. P. 91–120.

4. Ash J. M., Ganzburg M. An Extremal Problem for Trigonometric Polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 127, no. 1. P. 211–216.

5. Ganzburg M., Tikhonov S. On Sharp Constants in Bernstein–Nikolskii Inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.

6. Gorbachev D. V. An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 2005. Vol. 2. P. S117–S138.

7. Levin E., Lubinsky D. L_p Chritoffel functions, L_p universality, and Paley–Wiener spaces // J. D'Analyse Math. 2015. Vol. 125. P. 243–283.

8. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468.

9. Stein E. M., Weiss G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. N. J.: Princeton, 1971.

Получено 05.06.2018
Принято в печать 17.08.2018