ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 2

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-67-79

Константы Никольского в пространствах $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$[1]

Горбачёв Дмитрий Викторович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: dvgmail@mail.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственного университет.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Аннотация

Недавно Арестов, Бабенко, Дейкалова и Horváth установили ряд интересных результатов относительно точной константы Никольского $\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha,p)$ в весовом неравенстве

$$\sup_{x\in[0,\infty)}|f(x)|\leqslant \mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha,p)\sigma^{(2\alpha+2)/p}\left(2\int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\alpha+1}\,dx\right)^{1/p}$$

для подпространства $\mathcal{E}^\sigma\cap L^p(\mathbb{R}_+, x^{2\alpha+1}\,dx)$ четных целых функций f экспоненциального типа не больше $\sigma>0$, где $1\leqslant p<\infty$ и $\alpha\geqslant -1/2$.

Мы доказываем, что при тех же α и p

$$\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha,p)=\mathcal{L}(\alpha,p),$$

где $\mathcal{L}(\alpha,p)$ — точная константа в неравенстве Никольского

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\leqslant \mathcal{L}(\alpha,p)\sigma^{(2\alpha+2)/p}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^{2\alpha+1}\,dx\right)^{1/p}$$

для произвольных (не обязательно четных) функций $f\in\mathcal{E}^\sigma_{p,\alpha}:=\mathcal{E}^\sigma\cap L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$.

Также мы даем границы для нормализованной константы Никольского

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p):=(2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2))^{1/p}\mathcal{L}(\alpha,p),$$

которые имеют следующий вид:

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p)\leqslant \lceil p/2\rceil^{\frac{2\alpha+2}{p}},\quad p\in(0,\infty),$$

и для фиксированного $p\in[1,\infty)$

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p)\geqslant (p/2)^{\frac{2\alpha+2}{p}\,(1+o(1))},\quad \alpha\to\infty.$$

Верхняя оценка точная тогда и только тогда, когда $p=2$. В этом случае $\mathcal{L}^*(\alpha,2)=1$ для каждого $\alpha\geqslant -1/2$.

Наш подход опирается на одномерный гармонический анализ Данкля. В частности, для доказательства равенства $\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha,p)=\mathcal{L}(\alpha,p)$ применяется четный положительный оператор обобщенного сдвига Данкля T^t, который ограничен в $L^p(\mathbb{R}, |t|^{2\alpha+1}\,dt)$ с константой 1 и инвариантен на подпространстве $\mathcal{E}^\sigma_{p,\alpha}$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

Доказательство верхней оценки константы $\mathcal{L}^*(\alpha,p)$ основано на оценке норм воспроизводящего ядра подпространства $\mathcal{E}^1_{p,\alpha}$ и мультипликативном неравенстве для константы Никольского. Для получения нижней асимптотической оценки мы рассматриваем нормированную функцию Бесселя $j_\nu \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha}$ порядка $\nu \sim (2\alpha+2)/p$.

Ключевые слова: весовое неравенство Никольского, точная константа, целая функция экспоненциального типа, преобразование Данкля, оператор обобщенного сдвига, воспроизводящее ядро, функция Бесселя.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
Д. В. Горбачев, Н. Н. Добровольский. Константы Никольского в пространствах $L^p(\mathbb{R},|x|^{2\alpha+1}\,dx)$ // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 67–79.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 2

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-67-79

Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R},|x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces

Gorbachev Dmitry Viktorovich — professor of the department of applied mathematics and computer science, doctor of physical and mathematical sciences, Tula State University.
e-mail: dvgmail@mail.ru
Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Abstract

Recently Arestov, Babenko, Deikalova, and Horváth have established a series of interesting results correspondent to the sharp Nikolskii constant $\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha,p)$ in the weighted inequality

$$\sup_{x\in[0,\infty)}|f(x)|\leqslant \mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha,p)\sigma^{(2\alpha+2)/p}\biggl(2\int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\alpha+1}\,dx\biggr)^{1/p}$$

for the subspace $\mathcal{E}^\sigma\cap L^p(\mathbb{R}_+,x^{2\alpha+1}\,dx)$ of even entire functions f of exponential type at most $\sigma>0$, where $1\leqslant p<\infty$ and $\alpha\geqslant -1/2$.

We prove that, for the same α and p

$$\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha,p)=\mathcal{L}(\alpha,p),$$

where $\mathcal{L}(\alpha,p)$ is the sharp constant in the Nikolskii inequality

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\leqslant \mathcal{L}(\alpha,p)\sigma^{(2\alpha+2)/p}\biggl(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p|x|^{2\alpha+1}\,dx\biggr)^{1/p}$$

for any (not necessary even) functions $f\in\mathcal{E}^\sigma_{p,\alpha}:=\mathcal{E}^\sigma\cap L^p(\mathbb{R},|x|^{2\alpha+1}\,dx)$.

Also we give bounds of the normalized Nikolskii constant

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p):=(2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2))^{1/p}\mathcal{L}(\alpha,p),$$

which are as follows:

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p)\leqslant \lceil p/2\rceil^{\frac{2\alpha+2}{p}},\quad p\in(0,\infty),$$

and for fixed $p \in [1, \infty)$

$$\mathcal{L}^*(\alpha, p) \geqslant (p/2)^{\frac{2\alpha+2}{p}\,(1+o(1))}, \quad \alpha \to \infty.$$

The upper estimate is sharp if and only if $p = 2$. In this case, $\mathcal{L}^*(\alpha, 2) = 1$ for each $\alpha \geqslant -1/2$.

Our approach relies on the one-dimensional Dunkl harmonic analysis. To prove the identity $\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha, p) = \mathcal{L}(\alpha, p)$ we use the even positive Dunkl-type generalized translation operator T^t such that is bounded on $L^p(\mathbb{R}, |t|^{2\alpha+1}\,dt)$ with constant one and invariant on the subspace $\mathcal{E}^{\sigma}_{p,\alpha}$.

The proof of the upper estimate of the constant $\mathcal{L}^*(\alpha, p)$ is based on estimation of norms of the reproducing kernel for the subspace $\mathcal{E}^1_{p,\alpha}$ and the multiplicative inequality for the Nikolskii constant. To obtain the lower estimate we consider the normalized Bessel function $j_\nu \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha}$ of order $\nu \sim (2\alpha + 2)/p$.

Keywords: weighted Nikolskii inequality, sharp constant, entire function of exponential type, Dunkl transform, generalized translation operator, reproducing kernel, Bessel function.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
D. V. Gorbachev, N. N. Dobrovol'skii, 2018, "Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 67–79.

1. Введение

Для пространства Q с положительной мерой $d\rho$ через $L^p(Q, d\rho)$ мы обозначаем пространство Лебега функций $f\colon Q \to \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p(Q,d\rho)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_Q |f(x)|^p\,d\rho(x)\right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in Q} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

$L^p(Q) = L^p(Q, dx)$ для лебеговой меры dx и $L^\infty(Q) = C(Q)$ для непрерывных функций. Как обычно, $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(Q,d\rho)}$, если это не вызывает недоразумений.

Неравенства Никольского (иногда называемые обратными неравенствами Гёльдера) для подпространств $Y \subset L^p(Q, d\rho)$ являются важным объектом исследований в гармоническом анализе и его приложениях, например, в теории приближений и во вложении весовых пространств (см. [13]). Исторически первые результаты относятся к случаю подпространств тригонометрических многочленов и целых функций экспоненциального типа. Обзоры известных результатов, в том числе многомерных, а также обширная библиография приведены в работах [4, 6]. Отметим, что большое внимание уделялось выяснению асимптотического поведения константы Никольского в зависимости от (средней) размерности подпространства Y.

Точные значения констант Никольского при $p > 0$ известны только для пары $(p, q) = (2, \infty)$ и ни в каких других случаях (исключая, может быть, какие-то частные постановки). Однако стоит отметить интересный случай $p = 0$, $q > 0$ и подпространства одномерных тригонометрических многочленов, где точная константа Никольского была вычислена Арестовым [3].

Множество целых функций экспоненциального типа не больше $\sigma > 0$ обозначим через $\mathcal{E}^\sigma$. Напомним, что функции $f \in \mathcal{E}^\sigma$ характеризуются неравенством

$$|f(z)| \leqslant C_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

для произвольно малого $\varepsilon > 0$. Нижняя грань таких σ называется типом функции f (см., например, [1, Chap. 4]).

Пусть везде далее $\alpha \geqslant -1/2$. В недавней работе [4] получен ряд интересных результатов относительно точной константы Никольского $\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha, p)$ в весовом неравенстве

$$\sup_{x\in[0,\infty)} |f(x)| \leqslant \mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha, p)\sigma^{(2\alpha+2)/p}\biggl(2\int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\alpha+1}\,dx\biggr)^{1/p}$$

при $1 \leqslant p < \infty$ для четных функций $f \in \mathcal{E}^\sigma \cap L^p(\mathbb{R}_+, x^{2\alpha+1}\,dx)$.

Здесь мы покажем (см. теорему 1), что при тех же α и p

$$\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha, p) = \mathcal{L}(\alpha, p),$$

где $\mathcal{L}(\alpha, p)$ — точная константа в неравенстве Никольского

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \leqslant \mathcal{L}(\alpha, p)\sigma^{(2\alpha+2)/p}\biggl(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^{2\alpha+1}\,dx\biggr)^{1/p}$$

для произвольных (не обязательно четных) функций $f \in \mathcal{E}^\sigma \cap L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$. Очевидно, что

$$\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha, p) \leqslant \mathcal{L}(\alpha, p). \tag{2}$$

Также мы приведем границы константы Никольского $\mathcal{L}(\alpha, p)$ (см. предложение 1), дающие представление об ее поведении в зависимости от изменения параметров.

Далее для краткости положим

$$L^p_\alpha := L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx), \quad \|f\|_{p,\alpha} := \|f\|_{L^p_\alpha}, \quad \mathcal{E}^\sigma_{p,\alpha} := \mathcal{E}^\sigma \cap L^p_\alpha.$$

В работе [9, Theorem 5.1, $d = 1$] доказано, что функции $f \in \mathcal{E}^\sigma_{p,\alpha}$ при $p \in (0, \infty)$ равномерно ограничены на всей действительной оси. В этом случае неравенство (1) можно уточнить:

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_{C(\mathbb{R})} e^{\sigma|\mathrm{Im}\, z|}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Кроме того, легко видеть, что класс $\mathcal{E}^\sigma_{p,\alpha}$ вкладывается в безвесовой класс $\mathcal{E}^\sigma_{p,-1/2}$ при $p > 0$. Отсюда, аналогично [4, Subsect. 4.3] доказывается, что для $f \in \mathcal{E}^\sigma_{p,\alpha}$ при $p \geqslant 1$

$$f(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty. \tag{3}$$

Приведем некоторые известные результаты для констант $\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha, p)$ и $\mathcal{L}(\alpha, p)$. В безвесовом случае $\alpha = -1/2$ имеем

$$\mathcal{L}_p := \mathcal{L}(-1/2, p) = \mathcal{L}_{\mathrm{even}}(-1/2, p), \quad p > 0,$$

что является простым следствием равенства

$$\mathcal{L}_p = \sup\{f(0)\colon f \in \mathcal{E}^1 \cap L^p(\mathbb{R}),\ \|f\|_p \leqslant 1\},$$

вытекающего из инвариантности класса $\mathcal{E}^1$ и нормы в $L^p(\mathbb{R})$ относительно сдвига $f(\,\cdot + t)$.

Никольский показал, что $\mathcal{L}_p \leqslant 2$ при $p \geqslant 1$, а лучшая известная автору оценка имеет вид [10]

$$\mathcal{L}_p \leqslant \Bigl(\frac{\lceil p/2\rceil}{\pi}\Bigr)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \tag{4}$$

где $\lceil a\rceil$ обозначает наименьшее целое число, не меньшее, чем a. В частности, $\lceil p/2\rceil = 1$ при $p \leqslant 2$. Оценка (4) точная только при $p = 2$.

При $p=1$ известны следующие границы [8]:

$$\mathcal{L}_1 \in \frac{1}{2\pi}\,(1.081, 1.098).$$

Вопрос о точном значении константы $\mathcal{L}_1$ остается открытым.

Неравенство Никольского с конечной константой в пространстве $\mathcal{E}^{\sigma}_{p,\alpha}$ при $\alpha \geqslant -1/2$

$$\|f\|_{q,\alpha} \leqslant C(\alpha,p,q)\sigma^{(2\alpha+2)(1/p-1/q)}\|f\|_{p,\alpha}, \quad 0<p<q\leqslant\infty, \tag{5}$$

вытекает из неравенства [9, Eq. (7.1)] для одномерного преобразования Данкля (11). Случай $p\geqslant 1$ был рассмотрен в [11]. Для четных функций и преобразования Ганкеля неравенство (5) при $p\geqslant 1$ получено в работе [14].

Как хорошо известно, для полуцелых $\alpha=n/2-1$, $n\in\mathbb{N}$, множество четных функций из $\mathcal{E}^{\sigma}\cap L^p(\mathbb{R}_+,x^{n-1}\,dx)$ можно отождествить с классом радиальных целых функций экспоненциального сферического типа не больше σ, принадлежащих $L^p(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [7]). Отсюда и из многомерной оценки [12, Corollary 2] следует, что

$$\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(n/2-1,p) \leqslant \Bigl(\frac{\lceil p/2\rceil^n}{2^n\Gamma(n/2)\Gamma(n/2+1)}\Bigr)^{1/p}, \quad 0<p<\infty, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{6}$$

Это неравенство согласуется с (4) при $n=1$.

Мы перенесем оценку (6) на случай произвольного α. При этом удобно ввести нормализованную константу Никольского

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p) := (2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2))^{1/p}\mathcal{L}(\alpha,p). \tag{7}$$

Предложение 1. *Пусть $\alpha\geqslant -1/2$.*

(i) *Для всех $p\in(0,\infty)$*

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p) \leqslant \lceil p/2\rceil^{\frac{2\alpha+2}{p}},$$

в частности,

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p)\leqslant 1 \quad \text{при} \quad p\in(0,2]. \tag{8}$$

Равенство достигается только при $p=2$.

(ii) *Для фиксированного $p\in[1,\infty)$*

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p) \geqslant (p/2)^{\frac{2\alpha+2}{p}\,(1+o(1))}, \quad \alpha\to\infty. \tag{9}$$

Замечание 1. *В части* (i) *достаточно доказать неравенство* (8). *Действительно, справедливо мультипликативное неравенство*

$$\mathcal{L}^*(\alpha,\rho k) \leqslant (\mathcal{L}^*(\alpha,\rho))^{1/k}k^{(2\alpha+2)/p}, \quad k\in\mathbb{N}, \quad \rho>0,$$

которая следует из того факта, что если $p=\rho k$ и $f\in\mathcal{E}^1_{p,\alpha}$, то степень $f^k\in\mathcal{E}^k_{\rho,\alpha}$, а, значит,

$$\|f\|_\infty = (\|f^k\|_\infty)^{1/k} \leqslant (\mathcal{L}(\alpha,\rho)k^{(2\alpha+2)/\rho}\|f^k\|_{\rho,\alpha})^{1/k} = (\mathcal{L}(\alpha,\rho))^{1/k}k^{(2\alpha+2)/p}\|f\|_{p,\alpha}.$$

При $p>2$ можно взять $k=\lceil p/2\rceil$, тогда $\rho\in(1,2]$ и это влечет (i).

Для доказательства (8) *применяется подход из работ* [10, 12] *на основе оценок норм воспроизводящего ядра подпространства $\mathcal{E}^1_{p,\alpha}$.*

Оценку (ii) *мы получим на нормированной функции Бесселя $j_\nu\in\mathcal{E}^1_{p,\alpha}$, имеющей порядок $\nu\sim(2\alpha+2)/p$, где $A\sim B$ означает $A/B\to 1$.*

Глубокий анализ задачи $\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha,p)$ проведен в работе [4], где установлено, что для всех $\alpha \geqslant -1/2$ и $p \in [1,\infty)$

- справедливо равенство

$$\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha,p) = \sup\{f(0)\colon f \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha} \text{ — четная и } \|f\|_{p,\alpha} \leqslant 1\}; \tag{10}$$

- экстремальная функция f_* в задаче (10) существует, она действительная, имеет только действительные нули и при $p > 1$ единственная (случай $p = 1$ открыт);

- экстремальная функция f_* характеризуется следующим свойством ортогональности:

$$\int_0^\infty h(x)|f_*(x)|^{p-1}\operatorname{sign} f_*(x)x^{2\alpha+1}\,dx = 0$$

для произвольных четных функций $h \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha}$, таких что $h(0) = 0$.

Основным результатом работы является утверждение о равенстве констант Никольского для четных и произвольных функций из подпространства $\mathcal{E}^1_{p,\alpha}$.

Теорема 1. *Для $\alpha \geqslant -1/2$ и $p \in [1,\infty)$*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha,p) = \mathcal{L}(\alpha,p).$$

Замечание 2. *С учетом* (2) *и* (10) *достаточно будет доказать, что*

$$\mathcal{L}(\alpha,p) \leqslant \sup\{f(0)\colon f \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha} \text{ — четная и } \|f\|_{p,\alpha} \leqslant 1\} = \mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha,p).$$

Для сдвига точки максимума функции в нуль авторы [4] *использовали положительный самосопряженный оператор обобщенного сдвига Бесселя (или Гегенбауэра) T^t_α, действующий инвариантно на классах четных функций из $\mathcal{E}^1 \cap L^p(\mathbb{R}_+, x^{2\alpha+1}\,dx)$ и для которого $T^0_\alpha = \mathrm{Id}$ и $\|T^t_\alpha\|_{p\to p} = 1$ при $p \geqslant 1$.*

В случае функций из L^p_α известен оператор обобщенного сдвига Данкля τ^t (см., например, [9]*). Однако он не является положительным и его L^p-ограниченность доказана с константой, большей* 1. *Чтобы преодолеть эту сложность мы воспользуемся положительным оператором обобщенного сдвига Данкля T^t, изученным в работе* [9].

Дальнейшая организация работы следующая. В разделе 2 мы приведем некоторые вспомогательные утверждения, связанные с одномерным преобразованием Данклем. В разделе 3 мы докажем теорему 1. После этого в разделе 4 доказывается предложение 1.

2. Вспомогательные утверждения

Как известно, гармонический анализ в пространствах L^p_α на оси $\mathbb{R}$ со степенным весом $|x|^{2\alpha+1}$, $\alpha \geqslant -1/2$, базируется на одномерном преобразовании Данкля $\mathcal{F}_\alpha$, ассоциированном с группой отражений $\mathbb{Z}_2$ и функцией кратности $k(\cdot) \equiv \alpha + 1/2 \geqslant 0$ (см., например, [15, Example 2.1]):

$$\mathcal{F}_\alpha(f)(y) := c_\alpha \int_{\mathbb{R}} f(x)e_\alpha(-xy)|x|^{2\alpha+1}\,dx, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

где $c_\alpha^{-1} = 2^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)$ и $e_\alpha(t)$ — обобщенная экспонента,

$$e_\alpha(t) := j_\alpha(t) - ij'_\alpha(t) = j_\alpha(t) + \frac{it}{2(\alpha+1)}\,j_{\alpha+1}(t).$$

Здесь $j_\alpha(t)=\Gamma(\alpha+1)(2/t)^\alpha J_\alpha(t)$ — нормированная функция Бесселя порядка α. Многочисленные свойства классической функции Бесселя $J_\alpha(t)$, влекущие соответствующие свойства $j_\alpha(t)$, можно найти, например, в [5, Chap. 7]. В частности, функция $j_\alpha(t)$ является четной целой функцией экспоненциального типа 1,

$$\frac{d}{dt}\,(t^{2\alpha+2}j_{\alpha+1}(xt))=2(\alpha+1)t^{2\alpha+1}j_\alpha(xt). \tag{12}$$

и

$$|j_\alpha(t)|\leqslant j_\alpha(0)=1,\quad |j_\alpha(t)|=O((1+|t|)^{-\alpha-1/2}),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

Оператор $\mathcal{F}_\alpha$ унитарный в пространстве L^2_α, $\mathcal{F}_\alpha^{-1}(f)(x)=\mathcal{F}_\alpha(f)(-x)$ и справедливо равенство Планшереля

$$\langle f,\overline{g}\rangle_\alpha=\langle\mathcal{F}_\alpha(f),\overline{\mathcal{F}_\alpha(g)}\rangle_\alpha,\quad \langle f,g\rangle_\alpha:=\int_{\mathbb{R}}f(x)g(x)|x|^{2\alpha+1}\,dx.$$

Также оператор $\mathcal{F}_\alpha$ автоморфен на классе шварцовских функций $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

На четных функциях получаем преобразование Ганкеля

$$\mathcal{H}_\alpha(f)(y):=\frac{1}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty f(x)j_\alpha(xy)x^{2\alpha+1}\,dx,\quad y\in\mathbb{R}_+.$$

Более подробные сведения о преобразованиях Данкля и Ганкеля можно найти, например, в [4, 9, 11, 15].

Для одномерного преобразования Данкля $\mathcal{F}_\alpha$ рассмотрим положительный оператор обобщенного сдвига $\widetilde{T}^t_\alpha:=T^t$, изученный в работе [9, Sect. 3]. Приведем его основные свойства, на которые будем опираться в дальнейшем.

- Изначально $\widetilde{T}^t_\alpha$ определяется в L^2_α как мультипликатор Данкля:

$$\mathcal{F}_\alpha(\widetilde{T}^t_\alpha f)(x)=j_\alpha(tx)\mathcal{F}_\alpha(f)(x),\quad x,t\in\mathbb{R}. \tag{14}$$

- Справедливо явное интегральное представление

$$\widetilde{T}^t_\alpha f(x)=\begin{cases}C_\alpha\displaystyle\int_0^\pi\Big\{f_{\mathrm{even}}(A)+(x-t\cos\theta)\,\frac{f_{\mathrm{odd}}(A)}{A}\Big\}\sin^{2\alpha}\theta\,d\theta, & \alpha>-1/2,\\ \dfrac{1}{2}\,\{f(x-t)+f(x+t)\}, & \alpha=-1/2,\end{cases} \tag{15}$$

  где $A:=\sqrt{x^2+t^2-2xt\cos\theta}$, f_{even} и f_{odd} — соответственно четная и нечетная части функции f и C_α — нормировочная константа, получаемая из условия $\widetilde{T}^t_\alpha 1=1$, $C_\alpha=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}$. На четных функциях получаем оператор обобщенного сдвига Бесселя T^t_α.

- Оператор $\widetilde{T}^t_\alpha$ четный по t, положительный, самосопряженный и $\widetilde{T}^0_\alpha=\mathrm{Id}$. При $p\geqslant 1$ он L^p-ограничен с константой 1 как по x, так и по t. В частности, для каждого $x\in\mathbb{R}$

$$\bigg(\int_{\mathbb{R}}|\widetilde{T}^t_\alpha f(x)|^p|t|^{2\alpha+1}\,dt\bigg)^{1/p}\leqslant\|f\|_{p,\alpha}.$$

Для функций из класса $\mathcal{E}^\sigma_{p,\alpha}$ справедлива следующая теорема Пэли–Винера.

Теорема 2 ([2, Sect. 5]). *Пусть $\alpha \geqslant -1/2$, $\sigma > 0$ и $p \geqslant 1$. Функция $f \in \mathcal{E}^{\sigma}_{p,\alpha}$ тогда и только тогда, когда носитель ее преобразования Данкля $\mathcal{F}_\alpha(f)$ содержится в $[-\sigma, \sigma]$.*

На четных функциях имеем аналогичное утверждение для преобразования Ганкеля $\mathcal{H}_\alpha$ и носителя $[0, \sigma]$.

В этой теореме при $p > 2$ преобразование Данкля понимается как распределение:

$$\langle \mathcal{F}_\alpha(f), \varphi\rangle_\alpha = \langle f, \mathcal{F}_\alpha(\varphi)\rangle_\alpha, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

При $1 \leqslant p \leqslant 2$ для функций $f \in \mathcal{E}^{\sigma}_{p,\alpha}$ справедливо представление

$$f(x) = c_\alpha \int_{-\sigma}^{\sigma} \mathcal{F}_\alpha(f)(y) e_\alpha(xy) |y|^{2\alpha+1}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

где $\mathcal{F}_\alpha(f) \in L^{p'}([-\sigma, \sigma], |x|^{2\alpha+1}\, dx)$ в силу неравенства Хаусдорфа–Юнга для преобразования Данкля, $p' = p/(p-1)$ — сопряженный показатель.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\alpha \geqslant -1/2$ и $p \in [1, \infty)$. Согласно замечанию 2 достаточно показать, что

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\alpha, p) &= \sup\{\|f\|_{C(\mathbb{R})} \colon f \in \mathcal{E}^{1}_{p,\alpha},\ \|f\|_{p,\alpha} \leqslant 1\}\\ &\leqslant \sup\{g(0) \colon g \in \mathcal{E}^{1}_{p,\alpha} \text{ — четная и } \|g\|_{p,\alpha} \leqslant 1\} = \mathcal{L}_{\mathrm{even}}(\alpha, p).\end{aligned} \tag{17}$$

Для этого установим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция $f \in \mathcal{E}^{\sigma}_{p,\alpha}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ — произвольная фиксированная точка и*

$$g(t) := \widetilde{T}^{t}_{\alpha} f(x_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда g продолжается до четной целой функции экспоненциального типа не больше σ, такой что

$$g(0) = f(x_0), \quad \|g\|_{p,\alpha} \leqslant \|f\|_{p,\alpha}.$$

Доказательство. Для четных функций f лемма следует из результатов [4, Sect. 4]. Рассмотрим случай произвольных $f \in \mathcal{E}^{\sigma}_{p,\alpha}$.

В силу свойств оператора $\widetilde{T}^{t}_{\alpha}$, приведенных в разделе 2, достаточно показать, что g продолжается до целой функции экспоненциального типа не больше σ. Приведем два доказательства этого факта.

Первое доказательство базируется на теореме Пэли–Винера для преобразования Данкля (см. теорему 2). Пусть $p = 1$. Тогда из (16) и (14) следует, что

$$\widetilde{T}^{t}_{\alpha} f(x_0) = c_\alpha \int_{-\sigma}^{\sigma} j_\alpha(ty) \mathcal{F}_\alpha(\varphi)(y) e_\alpha(x_0 y) |y|^{2\alpha+1}\, dy = \int_{0}^{\sigma} j_\alpha(ty) w(y)\, dy,$$

где функция $w \in C([0, \sigma])$. Следовательно, $g \in \mathcal{E}^{\sigma}$, поскольку нормированная функция Бесселя $j_\alpha(t)$ является целой функцией экспоненциального типа 1.

При $p > 1$ приблизим f функцией $f_\varepsilon(x) := f(x)\psi_\varepsilon(x)$, $\varepsilon > 0$, где $\psi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}^{\varepsilon}$ — шварцовская функция, для которой $\|1 - \psi_\varepsilon\|_\infty \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Так как f ограничена, имеем $f_\varepsilon \in \mathcal{E}^{\sigma+\varepsilon}_{1,\alpha}$. Отсюда по доказанному выше получаем, что $g_\varepsilon(t) = \widetilde{T}^{t}_{\alpha} f_\varepsilon(x_0)$ — четная функция из $\mathcal{E}^{\sigma+\varepsilon}_{p,\alpha}$. Поэтому по теореме Пэли–Винера для носителя ее преобразования Ганкеля справедливо вложение $\operatorname{supp} \mathcal{H}_\alpha(g_\varepsilon) \subset [0, \sigma + \varepsilon]$.

Пусть $\sigma' > \sigma$ и φ — произвольная четная шварцовская функции с носителем в $[\sigma', \infty)$. Тогда $\langle \mathcal{H}_\alpha(g_\varepsilon), \varphi\rangle_\alpha = 0$ для всех $\varepsilon \in (0, \sigma' - \sigma)$. Применяя неравенство Гёльдера, обозначая $C_{p'} := \|\mathcal{H}_\alpha(\varphi)\|_{p',\alpha}$ и используя L^p-ограниченность $\widetilde{T}_\alpha^t$ по t, находим при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}|\langle \mathcal{H}_\alpha(g), \varphi\rangle_\alpha| &= |\langle \mathcal{H}_\alpha(g - g_\varepsilon), \varphi\rangle_\alpha| = |\langle g - g_\varepsilon, \mathcal{H}_\alpha(\varphi)\rangle_\alpha| \leqslant C_{p'}\|g - g_\varepsilon\|_{p,\alpha} \\ &= C_{p'}\|\widetilde{T}_\alpha^t(f - f_\varepsilon)(x_0)\|_{p,\alpha} \leqslant C_{p'}\|f - f_\varepsilon\|_{p,\alpha} \leqslant C_{p'}\|f\|_{p,\alpha}\|1 - \psi_\varepsilon\|_\infty \to 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\langle \mathcal{H}_\alpha(g), \varphi\rangle_\alpha = 0$, поэтому носитель $\mathcal{H}_\alpha(g)$ содержится в $[0, \sigma'] \to [0, \sigma]$ при $\sigma' \to \sigma$. Применяя теорему Пэли–Винера в обратную сторону, заключаем, что $g \in \mathcal{E}^\sigma$.

Второе доказательство включения $g \in \mathcal{E}^\sigma$ прямо следует из интегрального представления (15). Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $\alpha > -1/2$.

Пусть функция f имеет ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!}, \quad a_n = f^{(n)}(0).$$

Напомним, что $\|f\|_{C(\mathbb{R})} < \infty$. По неравенству Бернштейна [1, Chap. 4]

$$|a_n| \leqslant \sigma^n \|f\|_{C(\mathbb{R})}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

В силу (15)

$$\widetilde{T}_\alpha^t f(x_0) = C_\alpha \int_0^\pi \Big\{ f_{\text{even}}(A) + (x_0 - t\cos\theta)\,\frac{f_{\text{odd}}(A)}{A} \Big\} \sin^{2\alpha}\theta\, d\theta,$$

где $A = \sqrt{x_0^2 + t^2 - 2x_0 t\cos\theta}$. Здесь

$$f_{\text{even}}(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k}}{(2k)!}\,(x_0^2 + t^2 - 2x_0 t\cos\theta)^k$$

и

$$\frac{f_{\text{odd}}(A)}{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!}\,(x_0^2 + t^2 - 2x_0 t\cos\theta)^k.$$

Отсюда

$$|f_{\text{even}}(A)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{2k}|(|t| + |x_0|)^{2k}}{(2k)!}$$

и

$$\Big|(x_0 - t\cos\theta)\,\frac{f_{\text{odd}}(A)}{A}\Big| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{2k+1}|(|t| + |x_0|)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Таким образом, для произвольного $t \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}|g(t)| &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{2k}|(|t| + |x_0|)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_{2k+1}|(|t| + |x_0|)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &\leqslant \|f\|_{C(\mathbb{R})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^n(|t| + |x_0|)^n}{n!} = \|f\|_{C(\mathbb{R})} e^{\sigma(|t| + |x_0|)}\end{aligned}$$

и $g \in \mathcal{E}^\sigma$. Лемма доказана. $\square$

Завершим доказательство теоремы 1. Пусть $f \in \mathcal{E}_{p,\alpha}^1$ — произвольная функция, для которой $\|f\|_{p,\alpha} \leqslant 1$. В силу (3) имеем $\|f\|_{C(\mathbb{R})} = |f(x_0)|$ для некоторой точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Не ограничивая общности можно считать, что $f(x_0) > 0$.

Воспользуемся леммой 1 и определенной в ней четной функцией $g(t) = \widetilde{T}_\alpha^t f(x_0)$ экспоненциального типа не больше 1. Для функции g имеем $g(0) = \|f\|_{C(\mathbb{R})}$ и $\|g\|_{p,\alpha} \leqslant \|f\|_{p,\alpha} \leqslant 1$. Следовательно, (17) верно. Теорема 1 доказана.

4. Доказательство предложения 1

Доказательство (i)

В силу замечания 1 достаточно рассмотреть случай $0 < p \leqslant 2$. Пусть вначале $p \in [1, 2]$. По теореме 1 и (10) имеем

$$\mathcal{L}(\alpha, p) = \sup\{f(0)\colon f \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha} \text{ — четная и } \|f\|_{p,\alpha} \leqslant 1\}.$$

Обозначим через χ характеристическую функцию отрезка $[-1, 1]$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha}$ в силу (16) и равенства Планшереля имеем

$$f(0) = c_\alpha \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_\alpha(f)(y)\chi_\sigma(y)|y|^{2\alpha+1}\,dy = c_\alpha \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathcal{F}_\alpha(\chi)(x)|x|^{2\alpha+1}\,dx,$$

где по (12)

$$c_\alpha\mathcal{F}_\alpha(\chi)(x) = 2c_\alpha^2 \int_0^1 j_\alpha(xt)t^{2\alpha+1}\,dt = \frac{c_\alpha^2 j_{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} =: K(x).$$

Следовательно,

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)K(x)|x|^{2\alpha+1}\,dx = \langle f, K\rangle_\alpha, \quad f \in \mathcal{E}^1_{p,\alpha}, \quad p \in [1, 2]. \tag{18}$$

Отметим, что используя оператор обобщенного сдвига $\widetilde{T}^t_\alpha$ можно показать, что функция K будет воспроизводящим ядром подпространства $\mathcal{E}^1_{p,\alpha}$. Мы не будем этого делать. Интересно также отметить, что в силу (13)

$$K \in \mathcal{E}^1_{q,\alpha}, \quad q > \frac{2(2\alpha+2)}{2\alpha+3},$$

что позволяет расширить формулу (18) на все $p \geqslant 1$, для которых

$$p < \Big(\frac{2(2\alpha+2)}{2\alpha+3}\Big)' = \frac{2(2\alpha+2)}{2\alpha+1}.$$

По равенству Планшереля имеем

$$\|K\|^2_{2,\alpha} = c_\alpha^2\|\chi\|^2_{2,\alpha} = \frac{c_\alpha^2}{\alpha+1} = \|K\|_\infty,$$

где мы учли (13). Отсюда и из (18), применяя неравенство Гёльдера, находим

$$f(0) \leqslant \|f\|_{p,\alpha}\|K\|_{p',\alpha},$$

где с учетом $p \in [1, 2]$

$$\|K\|_{p',\alpha} \leqslant \|K\|_\infty^{1-2/p'}\|K\|_{2,\alpha}^{2/p'} = \Big(\frac{c_\alpha^2}{\alpha+1}\Big)^{1/p} = \Big(\frac{1}{2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}\Big)^{1/p}.$$

Таким образом, при $p \in [1, 2]$ для нормализованной константы Никольского (7) получаем нужную оценку $\mathcal{L}^*(\alpha, p) \leqslant 1$.

Равенство возможно только в случае, когда $\langle f, K\rangle_\alpha = \|f\|_{p,\alpha}\|K\|_{p',\alpha}$ или $K = |f|^{p-1}\operatorname{sign} f$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Для целой функции f и целой функции K с простыми нулями это допустимо только при $p = 2$ и тогда $f = K$ будет экстремальной функцией.

При $p \in (0, 1)$ имеем

$$\|f\|_{1,\alpha} = \||f|^{1-p}|f|^p\|_{1,\alpha} \leqslant \|f\|_\infty^{1-p}\|f\|^p_{p,\alpha} \leqslant \mathcal{L}(\alpha, 1)\|f\|_{1,\alpha}\|f\|_\infty^{-p}\|f\|^p_{p,\alpha},$$

откуда

$$\mathcal{L}(\alpha, p) \leqslant (\mathcal{L}(\alpha, 1))^{1/p} \quad \text{или} \quad \mathcal{L}^*(\alpha, p) \leqslant (\mathcal{L}^*(\alpha, 1))^{1/p} \leqslant 1.$$

Доказательство (ii)

Поскольку $\mathcal{L}^*(\alpha,2)=1$, то достаточно рассмотреть случай $1\leqslant p<\infty$, $p\neq 2$.

Воспользуемся следующим асимптотическим результатом для функции Бесселя $J_\nu(t)$ [16]: для фиксированных $1\leqslant p\leqslant\infty$ и $a<1/2-1/p$ при $\nu\to\infty$

$$A(\nu):=\left(\int_0^\infty |J_\nu(x)x^a|^p\,dx\right)^{1/p}\asymp\begin{cases}\nu^b, & p\neq 4,\\ \nu^b(\ln\nu)^{1/4}, & p=4,\end{cases}\tag{19}$$

где $b=a-1/2+1/p$ при $1\leqslant p\leqslant 4$ и $b=a-1/3+1/(3p)$ при $4<p\leqslant\infty$. Здесь запись $A(\nu)\asymp B(\nu)$ означает, что $C^{-1}<A(\nu)/B(\nu)<C$ при $\nu\to\infty$ для некоторой константы $C>1$, зависящей только от p и a.

Для нормированной функции Бесселя $j_\nu(x)=\Gamma(\nu+1)(2/x)^\nu J_\nu(x)$ имеем

$$\|j_\nu\|_{L^p(\mathbb{R},|x|^{p(\nu+a)}\,dx)}=2^{\nu+1/p}\Gamma(\nu+1)A(\nu).$$

Положим здесь $p(\nu+a)=2\alpha+1$ или $\nu=(2\alpha+1)/p-a$ и устремим $\alpha\to\infty$. Тогда с помощью формулы Стирлинга получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*(\alpha,p)&\geqslant(2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2))^{1/p}\,\frac{j_\nu(0)}{\|j_\nu\|_{p,\alpha}}=\frac{(2^{2\alpha+2}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2))^{1/p}}{2^{\nu+1/p}\Gamma(\nu+1)A(\nu)}\\ &\sim\frac{\Gamma^{2/p}(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha/p+1)A(2\alpha/p)}\sim\frac{((2\pi\alpha)^{1/2}(\alpha/e)^\alpha)^{2/p}}{(4\pi\alpha/p)^{1/2}(2\alpha/(pe))^{2\alpha/p}A(2\alpha/p)}\sim(p/2)^{(2\alpha+2)/p}B(\alpha)\end{aligned}$$

с некоторой функцией $B(\alpha)$, которая с учетом (19) при $\alpha\to\infty$ изменяется не быстрее показательной функции. Отсюда при $p\neq 2$ получаем требуемую оценку (9)

$$\mathcal{L}^*(\alpha,p)\geqslant(p/2)^{\frac{2\alpha+2}{p}\,(1+o(1))}.$$

Этот факт завершает доказательство предложения 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Achieser N. N. Theory of Approximation. New York: Dover, 2004.

2. Andersen N. B., de Jeu M. Elementary proofs of Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform on the real line // Int. Math. Res. Notices. 2005. Vol. 2005, no. 30. P. 1817–1831.

3. Arestov V. V. Inequality of different metrics for trigonometric polynomials // Math. Notes. 1980. Vol. 27, no. 4. P. 265–269. https://doi.org/10.1007/BF01140526

4. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth Á. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-Line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, no. 1. P. 21–42. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0103-6

5. Bateman G., Erdélyi A., et al. Higher Transcendental Functions. Vol. II. McGraw Hill Book Company, New York, 1953.

6. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Analyse Math. 2018 (in press); arXiv:1708.09837.

7. Gorbachev D. V. Extremum problems for entire functions of exponential spherical type // Math. Notes. 2000. Vol. 68, no. 2. P. 159–166.

8. Gorbachev D. V. An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 2005. Vol. 2. P. S117–S138.

9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Y. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2018. P. 1–51. https://doi.org/10.1007/s00365-018-9435-5

10. Ibragimov I. I., Dzhafarov A. S. Some inequalities for an entire function of finite degree and its derivatives // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1961. Vol. 138, no. 4. P. 755–758.

11. Li I. P., Su C. M., Ivanov V. I. Some problems of approximation theory in the spaces L_p on the line with power weight // Math. Notes. 2011. Vol. 90, no. 3. P. 344–364. https://doi.org/10.1134/S0001434611090045

12. Nessel R., Wilmes G. Nikolskii-type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type // J. Austral. Math. Soc. 1978. Vol. 25, no. 1. P. 7–18.

13. Nikolskii S. M. Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1975.

14. Platonov S. S. Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line // Izvestiya: Math. 2007. Vol. 71, no. 5. P. 1001–1048.

15. Rösler M. Dunkl Operators: Theory and Applications // Lecture Notes in Math. Berlin: Springer. 2003. Vol. 1817. P. 93–135.

16. Stempak K. A weighted uniform L^p-estimate of Bessel functions: a note on a paper of K. Guo: "A uniform L^p estimate of Bessel functions and distributions supported on S^{n-1}" // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. Vol. 128, no. 10. P. 2943–2945.

REFERENCES

1. Achieser, N. N. 2004, "Theory of Approximation", New York: Dover.

2. Andersen, N. B. & de Jeu, M. 2005, "Elementary proofs of Paley–Wiener theorems for the Dunkl transform on the real line", *Int. Math. Res. Notices*, vol. 2005, no. 30, pp. 1817–1831.

3. Arestov, V. V. 1980, "Inequality of different metrics for trigonometric polynomials", *Math. Notes*, vol. 27, no. 4, pp. 265–269. https://doi.org/10.1007/BF01140526

4. Arestov, V., Babenko, A., Deikalova, M. & Horváth, Á. 2018, "Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-Line", *Anal. Math.*, vol. 44, no. 1, pp. 21–42. https://doi.org/10.1007/s10476-018-0103-6

5. Bateman, G., Erdélyi, A., et al. 1953, "Higher Transcendental Functions", vol. II. McGraw Hill Book Company, New York.

6. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2018, "Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere", *J. d'Analyse Math.* (in press); arXiv:1708.09837.

7. Gorbachev, D. V. 2000, "Extremum problems for entire functions of exponential spherical type", *Math. Notes*, vol. 68, no. 2, pp. 159–166.

8. Gorbachev, D. V. 2005, "An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii", *Proc. Steklov Inst. Math. Suppl.*, vol. 2, pp. S117–S138.

9. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I. & Tikhonov, S. Y. 2018, "Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications", *Constr. Approx.*, pp. 1–51. https://doi.org/10.1007/s00365-018-9435-5

10. Ibragimov, I. I. & Dzhafarov, A. S. 1961, "Some inequalities for an entire function of finite degree and its derivatives", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 138, no. 4, pp. 755–758.

11. Li, I. P., Su, C. M. & Ivanov V. I. 2011, "Some problems of approximation theory in the spaces L_p on the line with power weight", *Math. Notes*, vol. 90, no. 3, pp. 344–364. https://doi.org/10.1134/S0001434611090045

12. Nessel, R. & Wilmes, G. 1978, "Nikolskii-type inequalities for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type", *J. Austral. Math. Soc.*, vol. 25, no. 1, pp. 7–18.

13. Nikolskii, S. M. 1975, "Approximation of functions of several variables and imbedding theorems", Berlin; Heidelberg; New York: Springer.

14. Platonov, S. S. 2007, "Bessel harmonic analysis and approximation of functions on the half-line", *Izvestiya: Math.*, vol. 71, no. 5, pp. 1001–1048.

15. Rösler, M. 2003, "Dunkl Operators: Theory and Applications", *Lecture Notes in Math.*, Berlin: Springer, vol. 1817, pp. 93–135.

16. Stempak, K. 2000, "A weighted uniform L^p-estimate of Bessel functions: a note on a paper of K. Guo: 'A uniform L^p estimate of Bessel functions and distributions supported on S^{n-1}'", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 128, no. 10, pp. 2943–2945.

Получено 03.06.2018
Принято в печать 17.08.2018