

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 2

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-15-29

Об оценке меры иррациональности чисел вида

$$\sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Башмакова Мария Геннадьевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры "Высшая математика", Брянский государственный технический университет

e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru

Золотухина Екатерина Сергеевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры "Высшая математика", Брянский государственный технический университет

e-mail: e-mail: eszolutukhina@mail.ru

Аннотация

Арифметические свойства значений гипергеометрической функции изучались различными методами, начиная с работы К. Зигеля 1929 г. Это направление теории диофантовых приближений исследовалось такими авторами как М. Хата [1]-[2], Ф. Аморозо и К. Виола [3], А. Хеймонен, В. Матала-Ахо и К. Ваананен [4]-[5] и многими другими. В последние десятилетия был получен ряд интересных результатов в этой области, усилено много ранее известных оценок меры иррациональности, как для значений гипергеометрической функции, так и для других величин.

В настоящее время одним из широко применяемых подходов при построении оценок показателя иррациональности является использование интегральных конструкций, симметричных относительно какой-либо замены параметров. Симметризованные интегралы и ранее использовались разными авторами, например, в работе Дж. Рина [6], но наиболее активное развитие это направление приобрело после работы В. Х. Салихова [7], получившего с помощью симметризованного интеграла новую оценку для $\ln 3$. Впоследствии симметричность различного типа позволила доказать ряд значимых результатов. Были получены новые оценки для некоторых значений логарифмической функции, функции $\operatorname{arctg} x$, классических констант (см., например, [8] – [18]). В 2014 г., используя общие симметризованные многочлены первой степени вида $At - B$, где $t = (x - d)^2$, К. Ву и Л. Ванг усилили результат В. Х. Салихова о мере иррациональности $\ln 3$ (см. [19]). В работе [20] идея симметричности была применена к интегралу Р. Марковеккио, доказавшего ранее новую оценку для $\ln 2$ в [21], что позволило улучшить результат для $\pi/3$.

Данная статья является продолжением работы [22], обобщающей результаты для двух типов симметричных интегральных конструкций. Первая позволяет более эффективно оценить показатели иррациональности чисел вида $\sqrt{d} \ln \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$ при $d = 2^{2k+1}, d = 4k+1$ для некоторых $k \in \mathbb{N}$ (см. [22]). Используя данный интеграл, также можно получить оценки меры иррациональности чисел $\sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Вторая рассматриваемая интегральная конструкция дает возможность оценивать меру иррациональности некоторых значений логарифмической функции, используя симметричность другого типа, что было подробно рассмотрено в [22]. Данный интеграл позволяет также оценивать меру иррациональности значений $\frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Обобщение этого случая предлагается в данной работе.

Ключевые слова: показатель иррациональности, гипергеометрическая функция Гаусса, симметризованные интегралы.

Библиография: 25 названий.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00296 А

Для цитирования:

М. Г. Башмакова, Е. С. Золотухина. Об оценке меры иррациональности чисел вида $\sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1}$ и $\frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}}$ // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 2, с. 15–29.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 2

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-15-29

On estimate of irrationality measure of the numbers

$$\sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1} \text{ and } \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Bashmakova Mariya Gennadiyevna — candidate of physico-mathematical sciences, docent of department of mathematics, Bryansk State Technical University

e-mail: mariya-bashmakova@yandex.ru

Zolotukhina Ekaterina Sergeevna — candidate of physico-mathematical sciences, docent of department of mathematics, Bryansk state technical university

e-mail: eszolotukhina@mail.ru

Abstract

The arithmetic properties of the values of hypergeometric function have been studied by various methods since the paper of C. Siegel in 1929. This direction of the theory of Diophantine approximations was studied by such authors as M. Hata [1]-[2], F. Amoroso and C. Viola [3], A. Heimonen, T. Matala-aho and K. Väänänen [4]-[5] and other. In recent decades, a number of interesting results in this area have been obtained, many of the previously known estimates for the irrationality measures for values of hypergeometric functions, and other variables have been improved.

Currently one of the widely used approaches in the construction of estimates of the irrationality measure is the use of integral constructions symmetric with respect to replacement of parameters. Symmetrized integrals have been previously used by different authors, for example in the G. Rhin's article [6], but the most active development of this direction was acquired after the work of V. Kh. Salikhov [7], who received a new estimate for $\ln 3$ using the symmetrized integral. Subsequently, the symmetry of different types allowed to prove a number of significant results. New estimates for some values of the logarithmic function, the function $\operatorname{arctg} x$, and classical constants were obtained (see, for example, [8] – [18]). In 2014 Q. Wu and L. Wang intensified V. H. Salikhov's result of the irrationality measure of $\ln 3$ using common symmetrized polynomials $At - B$, where $t = (x - d)^2$ (see [19]). In the V. A. Androsenko's article the idea of symmetry was applied to the integral of Marcovecchio, who previously proved a new estimate for $\ln 2$ in [21], and it allowed to improve the result for $\pi/3$.

This paper is a continuation of article [22] generalizing results for two types of symmetric integral constructions. The first allows to estimate more effectively the measure of irrationality of numbers of the form $\sqrt{d} \ln \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$ at $d = 2^{2k+1}$, $d = 4k + 1$ for some $k \in \mathbb{N}$ (see [22]). It is also possible to obtain estimates of the irrationality measure of numbers $\sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1}$, $k \in \mathbb{N}$ using this integral. The second considered integral construction makes it possible to estimate the measure of irrationality of some values of the logarithmic function using another type of symmetry, what was discussed in detail in [22]. This integral also allows to estimate the measure of irrationality of values $\frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}}$. A generalization of this case is proposed in this paper.

Keywords: Irrationality measure, Gauss hypergeometric function, symmetrized integrals.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

M. G. Bashmakova, E. S. Zolotukhina, 2018, "On estimate of irrationality measure of the numbers $\sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1}$ and $\frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 15–29.

1. Введение

При изучении свойств иррациональных и трансцендентных чисел одним из исследуемых вопросов является возможность приближения их рациональными дробями. Одной из применяемых характеристик качества такого приближения служит мера иррациональности.

Мерой (показателем) иррациональности числа γ будем называть величину $\mu(\gamma)$, определяемую как нижняя граница чисел μ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $q_0(\varepsilon) > 0$, такое, что неравенство $\left| \gamma - \frac{p}{q} \right| \geq q^{-\mu-\varepsilon}$ выполняется для всех целых чисел p, q при $q \geq q_0(\varepsilon)$.

Неоднократно оценивались показатели иррациональности различных значений функции Гаусса, в частности $\gamma_d = 2F(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{1}{d}) = \sqrt{d} \ln \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$. Много конкретных оценок было приведено в работе А. Хеймонена, В. Матала-Ахо и К. Ваананена [5]. В статье авторов [22] с помощью двух типов симметричных интегральных конструкций было получено обобщение результатов об оценках мер иррациональности чисел вида γ_d при $d = 2k, d = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$ и приведен обзор известных оценок. В данной работе продолжим исследование для случая $d = 4k + 3$.

Рассмотрим интеграл

$$I(a, b, c; \alpha, 1) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{(x - (\alpha - 1))^{an} ((\alpha + 1) - x)^{an} (x - \alpha)^{2bn}}{x^{cn+1} (2\alpha - x)^{cn+1}} dx \equiv \int_{\alpha}^{\alpha+1} R(x) dx, \quad (1)$$

где $n \in \mathbb{N}, n \rightarrow \infty, a, b, c \in \mathbb{N}, a + b - c > 0, \alpha \in \mathbb{R}$, подынтегральная функция которого обладает свойством симметрии $R(x) = R(2\alpha - x)$.

Выбор в интеграле (1) $\alpha = \sqrt{4k + 1}$ позволил получить в [22] оценки меры иррациональности чисел вида $\gamma_{4k+1}, k \in \mathbb{N}$, улучшающие при $k = 5, 7, 8, 9, 10$ аналогичные результаты работы А. А. Полянского [24], и не указанные в [5].

Выбирая $\alpha = \sqrt{4k + 3}$, получим оценки показателей иррациональности чисел $\gamma_{4k+3}, k \in \mathbb{N}$, которые при $k = 3, 4, \dots, 9$ также усиливают результаты работ А. А. Полянского [23] – [24].

Во второй части работы будет использоваться другая интегральная конструкция и другой тип симметрии. В [14] был рассмотрен интеграл

$$I_n(b) = \int_0^1 \frac{(x^2 - \frac{1}{b^2})^{sn} (1 - x^2)^{rn-sn} b^{rn+sn+1} dx}{(b^2 - x^2)^{rn+1}} \quad (2)$$

где $s, r \in \mathbb{N}, r, s$ – чётные, $r > s$. Особенностью данного интеграла является его симметричность относительно замены b на $\frac{1}{b}$, что позволяет представить его в виде (см. [14])

$$I_n(b) = R_n(b + \frac{1}{b}) + A_{1n}(b + \frac{1}{b}) \ln \frac{b+1}{b-1},$$

где $R_n(t), A_{1n}(t) \in \mathbb{Q}(t)$.

Это представление делает удобным использование в качестве параметра значения вида $b = \sqrt{k} + \sqrt{k-1}, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$, и даёт возможность оценивать показатель иррациональности чисел $\sqrt{k} \ln \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1}$. Некоторые результаты, полученные этим способом, усилили уже имеющиеся [5] – [6], а обобщение таких оценок выполнено в [22].

Рассмотрим теперь параметр вида $b = (\sqrt{k+1} + \sqrt{k})i, k \in \mathbb{N}, k > 1$. Так как $b + \frac{1}{b} = 2i\sqrt{k}$ и $\left| \frac{ai+1}{ai-1} \right| = 1$ для любого $a \in \mathbb{R}$, то, выбирая ветвь логарифма $\ln z = \ln |z| + \arctg z$ при $-\pi \leq \arg z < \pi$, имеем $\ln \left| \frac{ai+1}{ai-1} \right| = -i \arctg \frac{2a}{a^2-1} = -i \arctg \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Таким образом, эта форма параметра b позволяет получать оценки меры иррациональности чисел $\bar{\omega}_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \arctg \frac{1}{\sqrt{k}}$. Значения функции $\arctg x$ ранее исследовались разными авторами. В работах М.Хуттнера [25] и позже А.Хеймонена, К.Ваананена, Т.Матала-Ахо [4] – [5]

были построены общие методы оценки значений гипергеометрической функции Гаусса вида $F_2^1\left(1, \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k} | z\right)$, $k \in \mathbb{N}$ и получены результаты для случая $F_2^1\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} | -z^2\right) = \frac{1}{z} \operatorname{arctg} z$. В 2007 г. Е.Б.Томашевская в [12] применила комплексный симметризованный интеграл для построения оценок показателя иррациональности чисел вида $\operatorname{arctg} \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, что позволило улучшить ряд предыдущих результатов.

С помощью интегральной конструкции (2) в работе [14] было доказано неравенство $\mu(\operatorname{arctg} \frac{1}{4}) \leq 6.199\dots$, улучшающее соответствующий результат Е.Б.Томашевской $\mu(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}) \leq 6.635\dots$ и приведены некоторые другие оценки, получаемые этим способом. В данной работе будет рассмотрено обобщение результатов для чисел вида $\frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$.

2. Рациональные приближения чисел вида $\sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1}$, $k \in \mathbb{N}$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq q_0(\mu)$, где $q_0(\mu)$ — достаточно большое число. Тогда существует такое число $\mu_0(k) \in \mathbb{R}^+$, что для любого $\mu > \mu_0(k)$ справедливо неравенство

$$\left| \sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1} - \frac{p}{q} \right| > q^{-\mu}.$$

Для доказательства теоремы 1 в интеграле (1) выбираем $\alpha = \sqrt{4k+3}$:

$$I(a, b, c; \sqrt{4k+3}, 1) = \int_{\sqrt{4k+3}}^{\sqrt{4k+3}+1} \frac{(x - (\sqrt{4k+3}-1))^{an} (\sqrt{4k+3}+1-x)^{an} (x - \sqrt{4k+3})^{2bn}}{x^{cn+1} (2\sqrt{4k+3}-x)^{cn+1}} dx. \quad (3)$$

В силу симметрии подынтегральной функции $R(x)$ справедливо следующее ее разложение в сумму простейших дробей

$$R(x) = P(x) + \sum_{j=1}^{cn+1} a_j \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(2\sqrt{4k+3}-x)^j} \right), \quad (4)$$

где

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2(a+b-c)n-2} b_i x^i, \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad P(2\sqrt{4k+3}-x) = P(x), \quad (5)$$

$$a_j = \frac{1}{(cn+1-j)!} \frac{d^{cn+1-j}}{dx^{cn+1-j}} (R(x)x^{cn+1}) \Big|_{x=0}.$$

Структура доказательства теоремы 1 в целом аналогична доказательству теоремы 3 в [22], но есть отличительные моменты, связанные со спецификой рассматриваемых далее чисел $\frac{\sqrt{4k+3}-1}{2}$ и $\frac{\sqrt{4k+3}+1}{2}$. Поэтому более подробно рассмотрим эти моменты.

Пусть везде далее $\theta_N = \left\{ \frac{N}{2} \right\}$ — дробная доля числа $\frac{N}{2}$.

ЛЕММА 1. Справедливы следующие представления для коэффициентов разложения (4):

$$2^{(2c-a)n+2} (4k+3)^{(c-b)n+1} (2k+1)^{(c-a)n} a_j = \left(\sqrt{4k+3} \right)^{j_1} 2^{j-1} (2k+1)^{j-1} A_j, \quad (6)$$

где $j = 1, \dots, cn+1$, $j \equiv j_1 \pmod{2}$, $A_j \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Число $\frac{\sqrt{4k+3}-1}{2}$ является положительным корнем уравнения $t^2+t-\frac{2k+1}{2}=0$. По индукции можно показать, что $2^{\frac{w}{2}-\theta_w} \left(\frac{\sqrt{4k+3}-1}{2}\right)^\omega = A_\omega \frac{\sqrt{4k+3}-1}{2} + B_\omega$, где $\omega \in \mathbb{N}$, $\omega \geq 2$, $A_\omega, B_\omega \in \mathbb{Z}$. Поэтому $2^{\frac{w}{2}-\theta_w+1} \left(\frac{\sqrt{4k+3}-1}{2}\right)^\omega = A_\omega (\sqrt{4k+3}-1) + 2B_\omega$. Аналогично, $2^{\frac{w}{2}-\theta_w+1} \left(\frac{\sqrt{4k+3}+1}{2}\right)^\omega = \bar{A}_\omega (\sqrt{4k+3}+1) + 2\bar{B}_\omega$, $\bar{A}_\omega, \bar{B}_\omega \in \mathbb{Z}$. Также $\left(\frac{\sqrt{4k+3}-1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{4k+3}+1}{2}\right) = 2k+1$.

Имеем

$$2^{(2c-a)n+2}(4k+3)^{(c-b)n+1}(2k+1)^{(c-a)n}a_j = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_4=cn+1-j, \\ m_i \geq 0}} c_{\bar{m}} \left(\frac{\sqrt{4k+3}-1}{2}\right)^{cn-m_1} \times \left(\frac{\sqrt{4k+3}+1}{2}\right)^{cn-m_2} 2^{an+1} 2^{cn-m_1-m_2-m_4} (\sqrt{4k+3})^{cn-m_3-m_4+1}$$

где $\bar{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4)$, $c_{\bar{m}} \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что $cn - m_1 - m_2 - m_4 \geq j - 1$.

Если $m_1 = m_2$, то $\left(\frac{\sqrt{4k+3}-1}{2}\right)^{cn-m_1} \left(\frac{\sqrt{4k+3}+1}{2}\right)^{cn-m_2} = (2k+1)^{cn-m_1} \in \mathbb{Z}$, так как $cn - m_1 \geq j - 1$, и $cn - m_3 - m_4 + 1 \equiv j \pmod{2}$.

Если $m_1 \neq m_2$, $m = \min(an - m_1; an - m_2)$, $\underline{m} = \max(an - m_1; an - m_2)$, то, группируя слагаемые при $cn - m_2 = cn - an + an - m_2 = cn - an + m + \rho$, $cn - m_1 = cn - an + an - m_1 = cn - an + m + \rho$, $\rho \geq 1$, получим для них множитель $2^{an+1}(2k+1)^{cn-an+m} \left(\left(\frac{\sqrt{4k+3}-1}{2}\right)^\rho + \left(\frac{\sqrt{4k+3}+1}{2}\right)^\rho\right) = (\sqrt{4k+3})^{\rho_1} A_\rho$, $cn - an + m \geq j - 1$, $A_\rho \in \mathbb{Z}$, $\rho \equiv \rho_1 \pmod{2}$. Так как $cn - m_3 - m_4 + 1 = 2an + j - 2m + \rho$, то $(\sqrt{4k+3})^\rho 2^{an+1}(2k+1)^{cn-an+m} \left(\left(\frac{\sqrt{4k+3}-1}{2}\right)^\rho + \left(\frac{\sqrt{4k+3}+1}{2}\right)^\rho\right) = (\sqrt{4k+3})^\rho (\sqrt{4k+3})^{\rho_1} A_\rho \in \mathbb{Z}$, и $cn - m_3 - m_4 + 1 - \rho \equiv j \pmod{2}$. Что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. *Справедливы следующие представления для коэффициентов разложения (5):*

$$2b_i = \left(\sqrt{4k+3}\right)^{i_1} 2^{(a-c)n-1-0,5(i+1)+\theta_{i+1}} C_i, \quad (7)$$

где $i = 0, 1, \dots, 2(a+b-c)n-2$, $i \equiv i_1 \pmod{2}$, $C_i \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Из (4) и (5) следует, что $P(x)$ – часть разложения функции $R(x)$ в ряд в окрестности точки $x = \infty$, содержащая все неотрицательные степени x . Имеем из (3)

$$R(x) = (-1)^{(a-c)n-1} x^{2(a+b-c)n-2} \left(1 - \frac{\sqrt{4k+3}-1}{x}\right)^{an} \left(1 - \frac{\sqrt{4k+3}+1}{x}\right)^{an} \times \left(1 - \frac{\sqrt{4k+3}}{x}\right)^{2bn} \left(1 - \frac{2\sqrt{4k+3}}{x}\right)^{-cn-1}.$$

Тогда

$$b_i = \sum_{\substack{m_1+\dots+m_4=2(a+b-c)n-2-i, \\ m_j \geq 0}} d_{\bar{m}} \left(\frac{\sqrt{4k+3}-1}{2}\right)^{m_1} \left(\frac{\sqrt{4k+3}+1}{2}\right)^{m_2} 2^{0,5m_1+0,5m_2-\theta_{m_1}-\theta_{m_2}} \times 2^{0,5m_1+0,5m_2+m_4+\theta_{m_1}+\theta_{m_2}} (\sqrt{4k+3})^{m_3+m_4}, \quad \bar{m} = (m_1, m_2, m_3, m_4), \quad d_{\bar{m}} \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим показатель степени с основанием 2. Так как $m_3 \leq 2bn$, то

$$0,5m_1+0,5m_2+m_4+\theta_{m_1}+\theta_{m_2} \geq 0,5m_1+0,5m_2+0,5m_4+\theta_{m_1+m_2+m_4} \geq (a-c)n-1-0,5(i+1)+\theta_{i+1}.$$

Далее доказательство леммы 2 проводится аналогично доказательству леммы 1.

ЛЕММА 3. Пусть $Q_1 = \max\{c, 2(a+b-c)\}$, $s_1 = \max\{0, c-b\}$, $s_2 = \max\{0, c-a\}$, тогда справедливо представление вида

$$q_{Q_1 n} 2^{(2c-a)n+4} (4k+3)^{s_1 n+1} (2k+1)^{s_2 n} I = A \sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1} + B, \text{ где } A, B \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Доказательство. Из (4) при $j=1$ имеем

$$I_1 = a_1 \int_{\sqrt{4k+3}}^{\sqrt{4k+3}+1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{4k+3}-x} \right) dx = a_1 \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1}.$$

Тогда согласно (6) получим

$$2^{(2c-a)n+2} (4k+3)^{(c-b)n+1} (2k+1)^{(c-a)n} I_1 = A_1 \sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1}, \quad A_1 \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Далее при $j=2, \dots, cn+1$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{j=2}^{cn+1} a_j \int_{\sqrt{4k+3}}^{\sqrt{4k+3}+1} \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(2\sqrt{4k+3}-x)^j} \right) dx = \sum_{j=2}^{cn+1} \frac{a_j}{(j-1)(2k+1)^{j-1}} \\ &\times \left(\left(\frac{\sqrt{4k+3}+1}{2} \right)^{j-1} + \left(\frac{\sqrt{4k+3}-1}{2} \right)^{j-1} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (6) имеем

$$q_{cn} 2^{(2c-a)n+3} (4k+3)^{(c-b)n+1} (2k+1)^{(c-a)n} I_2 \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Далее проинтегрируем (5).

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{\sqrt{4k+3}}^{\sqrt{4k+3}+1} P(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2(a+b-c)n-2} b_i \int_{\sqrt{4k+3}-1}^{\sqrt{4k+3}+1} x^i dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2(a+b-c)n-2} \frac{b_i}{i+1} \left(\left(\sqrt{4k+3}+1 \right)^{i+1} - \left(\sqrt{4k+3}-1 \right)^{i+1} \right). \end{aligned}$$

Значит, согласно (7)

$$q_{2(a+b-c)n} 2^{(c-a)n+4} I_3 \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Таким образом, (8) выполняется в силу (4), (9) – (11).

Рассмотренные леммы позволяют доказать следующую.

ЛЕММА 4. Пусть числа Q_1, s_2, s_3 определены как в лемме 3, $Q_2 = \max\{a, 2b\}$, $Q = \max\{Q_1, Q_2\}$, $\frac{B_n}{A_n} = \frac{(an)!(2bn)!((a+b-c)n)!}{(bn)!(cn)!(2(a+b-c)n)!}$, $A_n, B_n \in \mathbb{N}$, $(A_n, B_n) = 1$,

$$l_n = B_n^{-1} q_{Qn} 2^{(2c-a)n+4} (4k+3)^{s_1 n+1} (2k+1)^{s_2 n} I = g_n \sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1} + p_n.$$

Тогда $g_n, p_n \in \mathbb{Z}$.

Далее для линейной формы l_n применим следующую лемму:

ЛЕММА 5. *[1], лемма 3.1] Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ - иррационально, $l_n = g_n\gamma + p_n$, где $g_n, p_n \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |l_n| = -\delta$, $\delta > 0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |g_n| \leq \tau$, тогда $\mu(\gamma) \leq 1 + \frac{\tau}{\delta}$.*

Рассмотрим функцию $f(t(k)) = \frac{t^b(1-t)^a}{1 - \left(\frac{t}{4k+3}\right)^c}$. Обозначим через $t_1(k)$ меньший корень уравнения $\frac{d}{dt} \ln(f(t(k))) = 0$, причем, $t_1(k) \in (0; 1)$, через $t_2(k)$ – больший корень.

Как показали исследования, для любого $k \geq 1$ (в частности, при выборе в (3) $a = 4$, $b = 5$, $c = 5$) существуют

$$\delta(k) = - \left(Q - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln B_n + (2c - a) \ln 2 + (s_1 - c) \ln(4k + 3) + s_2 \ln(2k + 1) + \ln |f(t_1(k))| \right),$$

$$\tau(k) = Q - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln B_n + (2c - a) \ln 2 + (s_1 - c) \ln(4k + 3) + s_2 \ln(2k + 1) + \ln |f(t_2(k))|,$$

а, следовательно, и $\mu_0(k)$.

И теорема 1 доказана.

В таблице 1 приведем некоторые частные оценки мер иррациональности чисел вида $\underline{\omega}_k = \sqrt{4k+3} \ln \frac{\sqrt{4k+3}+1}{\sqrt{4k+3}-1}$.

Таблица 1

k	$\mu(\underline{\omega}_k) \leq$	k	$\mu(\underline{\omega}_k) \leq$
1	8.1979...	6	4.4752...
2	6.1005...	7	4.3335...
3	5.3383...	8	4.2222...
4	4.9266...	9	4.1314...
5	4.6624...		

Начиная с $k = 3$ происходит усиление аналогичных неравенств работы [24]. Рассмотрим эти случаи более подробно:

1) выбирая в интеграле (3) $k = 3$, $a = 6$, $b = 7$, $c = 7$, имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 3.6928\dots$, $t_1 = 0.5476\dots$, $t_2 = 31.9523\dots$, $\delta = 9.8723\dots$, $\tau = 42.8298\dots$;

2) при $k = 4$, $a = 7$, $b = 8$, $c = 8$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 3.8353\dots$, $t_1 = 0.5405\dots$, $t_2 = 40.1737\dots$, $\delta = 13.0898\dots$, $\tau = 51.3998\dots$;

3) при $k = 5$, $a = 8$, $b = 9$, $c = 9$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 3.9601\dots$, $t_1 = 0.5352\dots$, $t_2 = 48.3397\dots$, $\delta = 16.3935\dots$, $\tau = 60.0409\dots$;

4) при $k = 6$, $a = 8$, $b = 9$, $c = 9$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 3.9601\dots$, $t_1 = 0.5343\dots$, $t_2 = 56.8406\dots$, $\delta = 17.7012\dots$, $\tau = 61.5156\dots$;

5) при $k = 7$, $a = 9$, $b = 10$, $c = 10$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 4.0711\dots$, $t_1 = 0.5306\dots$, $t_2 = 64.9138\dots$, $\delta = 21.0498\dots$, $\tau = 70.1717\dots$;

6) при $k = 8$, $a = 10$, $b = 11$, $c = 11$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 4.1710\dots$, $t_1 = 0.5275\dots$, $t_2 = 72.9724\dots$, $\delta = 24.4946\dots$, $\tau = 78.9282\dots$;

7) при $k = 9$, $a = 10$, $b = 11$, $c = 11$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln B_n = 4.1710\dots$, $t_1 = 0.5272\dots$, $t_2 = 81.3727\dots$, $\delta = 25.5910\dots$, $\tau = 80.1358\dots$.

Замечание: Наилучшие оценки достигаются при условии $b = c$ на параметры интеграла (3). Следует отметить, что ранее при таком соотношении результаты Е. С. Золотухиной в [9] – [10] совпадали с аналогичными оценками, полученными в работах [4] и [5]. Но конкретные результаты о мерах иррациональности чисел вида $\underline{\omega}_k$ в [5] не приведены.

3. Оценка меры иррациональности значений вида $\frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 3$

Рассмотрим интеграл (2)

$$I_n(b) = \int_0^1 \frac{(x^2 - \frac{1}{b^2})^{sn} (1 - x^2)^{rn-sn} b^{rn+sn+1} dx}{(b^2 - x^2)^{rn+1}} = R_n(b + \frac{1}{b}) + A_{1n}(b + \frac{1}{b}) \ln \frac{b+1}{b-1},$$

где $s, r \in \mathbb{N}, r, s$ — чётные, $r > s$.

Справедливо равенство: $R_n(b) = - \sum_{j=2}^{2rn+1} \frac{A_{jn}(b)}{j-1} \left(\frac{1}{(b+1)^{j-1}} - \frac{1}{(b-1)^{j-1}} \right), A_{1n}(b) \in \mathbb{Q}(b)$.

Обозначим для всех $j = 1, \dots, rn+1$

$M_j = \{\bar{m} = (m_1, \dots, m_5) | m_\alpha \in \mathbb{Z}^+, \alpha = 1, \dots, 5; m_1, m_2 \leq sn, m_3, m_4 \leq rn-sn, m_1 + \dots + m_5 = rn+1-j\}$.

Как было доказано в [14], коэффициенты $A_{jn}(b)$ имеют вид

$$A_{jn}(b) = \sum_{\bar{m} \in M_j} \gamma(\bar{m}) \left(b + \frac{1}{b}\right)^{sn-m_1} \left(\frac{1}{b} - b\right)^{sn-m_2} (1-b)^{rn-sn-m_3} (1+b)^{rn-sn-m_4} \cdot (2b)^{-rn-1-m_5} b^{rn+sn+1},$$

где $\gamma(\bar{m}) \in \mathbb{Z}$ для любого $\bar{m} \in M_j$.

Рассмотрим параметр вида $b = (\sqrt{k+1} + \sqrt{k})i, k \in \mathbb{N}, k > 1$.

ЛЕММА 6. ([14], лемма 7) При $b = (\sqrt{k+1} + \sqrt{k})i, k \in \mathbb{N}, k > 1$, существуют $\nu(k), \alpha(k) \in \mathbb{R}^+$, такие что

$$q_{rn} 2^{\nu(k)n + \alpha(k)} \left(\frac{1}{i\sqrt{k}} \right) I_n(b) = B_n + A_{1n} \frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}}, A_{1n}, B_n \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Это представление интеграла в виде линейной формы даёт возможность использовать следующую лемму:

ЛЕММА 7. [[2], замечание 2.1] Пусть $n \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{R}$ - иррационально, $l_n = g_n \gamma + p_n$, где $g_n, p_n \in \mathbb{Z}$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |g_n| = \delta, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |l_n| \leq -\tau, \tau > 0$, тогда $\mu(\gamma) \leq 1 + \frac{\delta}{\tau}$.

В результате получим следующее утверждение:

ЛЕММА 8. ([14], лемма 8) Пусть $s, r \in \mathbb{N}$ — чётные, $k \in \mathbb{N}, k > 1, r > s$, такие что $\frac{s}{r} > (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})^2$ и выполнено: $-K - \ln M > 0$, где $M = \left(\frac{s}{r}\right)^s \left(1 - \frac{s}{r}\right)^{r-s} \left(\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)^{r-s}$,
 $K = r + \nu(k) \ln 2$. Тогда справедливо неравенство:

$$\mu \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \leq 1 - \frac{K + (r+s) \ln(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{K + \ln M}.$$

Наиболее важную роль здесь играет параметр $\nu(k)$, поскольку именно он отвечает за сокращения коэффициентов вида 2^k в знаменателях дробей. Уменьшение этого показателя приводит к уменьшению коэффициентов линейной формы, что необходимо для построения лучшей оценки. При вычислении данного параметра для произвольного k потребуется выделить несколько случаев.

Случай 1: k — чётно.

ЛЕММА 9. Пусть $b = (\sqrt{k+1} + \sqrt{k})i, k = 2^t m, t \in \mathbb{N}, m > 1$, нечётное, тогда можно положить в лемме 8 $\nu(k) = r - s$.

Доказательство леммы аналогично доказательству подобного утверждения для вещественного случая [22]. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\mathbf{K}$ — кольцо целых алгебраических чисел.

1. Докажем, что $2^{(r-s)n+2} \cdot \frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = A'_{jn}$ — целое алгебраическое число.

Из представления $A_{jn}(b)$ имеем при $j = 1, \dots, rn + 1$:

$$\frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = \sum_{\bar{m} \in M_j} \gamma(\bar{m}) \left(b + \frac{1}{b}\right)^{sn-m_1} (1-b)^{rn-m_2-m_3} (1+b)^{rn-m_2-m_4-j+1} 2^{-rn-m_5-1} b^{m_2-m_5}.$$

Так как $b, \frac{1}{b} \in \mathbf{K}$, то $\frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = P_1(b)2^{d_1}$, $P_1(b) \in \mathbf{K}$, $d_1 \in \mathbb{Z}$.

Для любого нечётного m и $k = 2^t m$ выполняются соотношения:
 $b + \frac{1}{b} = 2i\sqrt{k} = 2i \cdot 2^{\frac{t}{2}} \sqrt{m} = 2^{1+\frac{t}{2}} i \sqrt{m}$; $(1 \pm b)^2 = b \cdot 2(2^{\frac{t}{2}} i \sqrt{m} \pm 1)$.

Пусть $rn - m_2 - m_3 = 2l_1 + h_1$, $rn - m_2 - m_4 - j + 1 = 2l_2 + h_2$, $h_1, h_2 \in \{0, 1\}$, $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$, тогда $l_1 \geq \frac{rn-m_2-m_3-1}{2}$, $l_2 \geq \frac{rn-m_2-m_4-j}{2}$. Получаем, используя определение M_j :

$$\begin{aligned} d_1 &\geq (1 + \frac{t}{2})(sn - m_1) - rn - m_5 - 1 + l_1 + l_2 \geq \\ &\geq (1 + \frac{t}{2})sn + (1 + \frac{t}{2})m_1 - rn - m_5 - 1 + \left(rn - m_2 - \frac{m_3}{2} - \frac{m_4}{2} - \frac{j-1}{2} - 1\right) = \\ &= (1 + \frac{t}{2})sn - (1 + \frac{t}{2})m_1 - \frac{m_3}{2} - \frac{m_4}{2} - m_5 - 2 - \left(\frac{rn-m_1-m_2-m_3-m_4-m_5}{2}\right) = \\ &= (1 + \frac{t}{2})sn - \frac{rn}{2} - (1 + \frac{t}{2})m_1 + \frac{m_1}{2} - \frac{m_5}{2} - 2 \geq (1 + \frac{t}{2})sn - \frac{t}{2}m_1 - \frac{rn}{2} - \frac{m_1}{2} - \frac{m_5}{2} - 2 \geq \\ &\geq sn - rn - 2, \text{ так как } m_1 + m_5 \leq rn, m_2 \leq sn. \end{aligned}$$

2. Докажем, что $2^{(r-s)n+2} \cdot \frac{A_{jn}(b)}{(b-1)^{j-1}} = A''_{jn}$ — целое алгебраическое число. Рассуждения здесь повторяют предыдущие.

Из представления $A_{jn}(b)$ имеем при $j = 1, \dots, rn + 1$

$$\frac{A_{jn}(b)}{(b-1)^{j-1}} = \sum_{\bar{m} \in M_j} \gamma(\bar{m}) \left(b + \frac{1}{b}\right)^{sn-m_1} (1-b)^{rn-m_2-m_3-j+1} (1+b)^{rn-m_2-m_4} 2^{-rn-m_5-1} b^{m_2-m_5}.$$

При этом $b, \frac{1}{b} \in \mathbf{K}$ и $\frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = P_2(b) \cdot 2^{d_2}$, $P_2(b) \in \mathbf{K}$, $d_2 \in \mathbb{Z}$.

Пусть $rn - m_2 - m_3 - j + 1 = 2l_1 + h_1$, $rn - m_2 - m_4 = 2l_2 + h_2$, $h_1, h_2 \in \{0, 1\}$, $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$, тогда $l_1 \geq \frac{rn-m_2-m_3-j}{2}$, $l_2 \geq \frac{rn-m_2-m_4-1}{2}$.

Тем же способом получаем: $d_2 \geq (1 + \frac{t}{2})(sn - m_1) - rn - m_5 - 1 + l_1 + l_2 \geq sn - rn - 2$.

Дальнейшая часть доказательства полностью повторяет [14], лемма 5, следствие 1. $\square$

Формула леммы 8 при найденной оценке $\nu(k)$ позволяет получить следующие результаты.

Таблица 2

k	Значение	$\mu(\bar{\omega}_k) \leq$	$\frac{s}{r}$
2	не применимо	-	-
4	$\arctg \frac{1}{2}$	35.327...	0.328...
6	$\frac{1}{\sqrt{6}} \arctg \frac{1}{\sqrt{6}}$	16.055...	0.277...
8	$\frac{1}{\sqrt{8}} \arctg \frac{1}{\sqrt{8}}$	11.878...	0.243...
10	$\frac{1}{\sqrt{10}} \arctg \frac{1}{\sqrt{10}}$	9.990...	0.217...
12	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{2\sqrt{3}}$	8.891...	0.197...

Случай 2: k — нечётно. В этом случае коэффициент $\nu(k)$ для двух различных видов параметра $k = 4m + 1$ и $k = 4m - 1$, $m \in \mathbb{N}$ будет отличаться.

ЛЕММА 10. Пусть $b = (\sqrt{4m+2} + \sqrt{4m+1})i$, $m \in \mathbb{N}$, тогда можно положить в лемме 8 $\nu(k) = \frac{r-s}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 9.

Для $b = (\sqrt{4m+2} + \sqrt{4m+1})i$ справедливы соотношения: $(b+1)^4 = 2^3 b^2 (\sqrt{4m+1}i - 2m)$; $(b-1)^4 = 2^3 b^2 (-\sqrt{4m+1}i - 2m)$. Применение этих соотношений к представлению коэффициентов A_{jn} даёт требуемое утверждение. В этом можно убедиться, рассмотрев [14], лемма 9, где эти же соотношения для степеней выражений $b+1, b-1$ выполнялись для частного случая $k = 9$. $\square$

ЛЕММА 11. Пусть $b = (\sqrt{4m} + \sqrt{4m-1})i, m \in \mathbb{N}$, тогда можно положить в лемме 8 $\nu(k) = 0$.

Доказательство данного случая хотя и аналогично предыдущему, соотношения степеней несколько иные, поэтому рассмотрим его более подробно. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $b = (\sqrt{4m} + \sqrt{4m-1})i$ верно $b + \frac{1}{b} = 2\sqrt{4m-1}i$,

$(b+1)^2 = 2b(\sqrt{4m-1}i + 1)$. Рассмотрим $\theta = \frac{1+\sqrt{4m-1}i}{2}$. Данное значение является корнем уравнения $x^2 - x + 2m = 0$, то есть $\theta^2 = \theta - 2m, \theta^N = A\theta + B, A, B \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}$ следовательно $2\theta^N \in \mathbf{K}$. Тогда $(\sqrt{4m-1}i + 1)^N = 2^N \theta^N$ и $(b+1)^2 = 2^2 b\theta$.

Для значения $(b-1)^2 = 2b(\sqrt{4m-1}i - 1)$ рассуждения аналогичны, поскольку $\frac{1-\sqrt{4m-1}i}{2} = \bar{\theta}$, то $(b-1)^2 = 2^2 b\bar{\theta}$.

Докажем, что $2 \cdot \frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = A'_{jn}$ — целое алгебраическое число. Имеем при $j = 1, \dots, rn+1$ $\frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = \sum_{\bar{m} \in M_j} \gamma(\bar{m}) (b + \frac{1}{b})^{sn-m_1} (1-b)^{rn-m_2-m_3} (1+b)^{rn-m_2-m_4-j+1} 2^{-rn-m_5-1} b^{m_2-m_5}$. Так

как $b, \frac{1}{b} \in \mathbf{K}$, то $\frac{A_{jn}(b)}{(b+1)^{j-1}} = P_1(b) \cdot 2^{d_1}, P_1(b) \in \mathbf{K}, d_1 \in \mathbb{Z}$.

Пусть $rn - m_2 - m_3 = l_1, rn - m_2 - m_4 - j + 1 = l_2, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}^+$. Тогда получаем, используя определение M_j :

$d_1 \geq (sn - m_1) - rn - m_5 - 1 + l_1 + l_2 \geq sn - m_1 - rn - m_5 - 1 + (rn - m_2 - m_3 + rn - m_2 - m_4 - j + 1) = sn - m_1 - rn - m_5 - 1 + rn - m_2 - m_3 + m_1 + m_3 + m_5 = sn - m_2 - 1 \geq -1$, так как $m_2 \leq sn$.

Доказательство того что $2 \cdot \frac{A_{jn}(b)}{(b-1)^{j-1}} = A''_{jn} \in \mathbf{K}$ проводится аналогично. $\square$ Приведём таблицу получаемых оценок мер иррациональности при некоторых нечётных k : Таблица 3

k	Значение	$\mu(\bar{\omega}_k) \leq$	$\frac{s}{r}$
3	$\frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}}$	6.2097...	0.183...
5	$\frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{1}{\sqrt{5}}$	8.4207...	0.212...
7	$\frac{1}{\sqrt{7}} \arctg \frac{1}{\sqrt{7}}$	4.4802...	0.104...
9	$\arctg \frac{1}{3}$	6.199...	0.1508...
11	$\frac{1}{\sqrt{11}} \arctg \frac{1}{\sqrt{11}}$	4.0077...	0.074...
13	$\frac{1}{\sqrt{13}} \arctg \frac{1}{\sqrt{13}}$	5.4205...	0.119...

Результаты для $k = 7$ и $k = 9$ были получены в работе [14], при этом оценка для $\arctg \frac{1}{3}$ улучшает аналогичную оценку работы [12]. Некоторые другие результаты также заслуживают внимания, например при $k = 25$ имеем $\mu(\arctg \frac{1}{5}) \leq 4.479854\dots$, тогда как результат работы [12] $\mu(\arctg \frac{1}{5}) \leq 4.788\dots$. Но большинство оценок, получаемых с помощью данной интегральной конструкции, оказывается несколько хуже известных ранее. Например, результат, приведённый в работе [25] составлял $\mu(\sqrt{7} \arctg \frac{1}{\sqrt{7}}) \leq 4.0298\dots$, оценка $\mu(\arctg \frac{1}{2}) \leq 11.7116\dots$ была доказана Е.Б.Томашевской в [13]. При $k = 16$ результат, получаемый с помощью данного интеграла: $\mu(\arctg \frac{1}{4}) \leq 7.371\dots$, тогда как в [12] он составил $\mu(\arctg \frac{1}{4}) \leq 5.793\dots$.

4. Заключение

Интерес к построению оценок мер иррациональности в настоящее время проявляется в научных школах разных стран. В последние десятилетия было получено много новых результатов в этой области, улучшены предыдущие оценки для значений логарифмической и других функций, разработаны как обобщённые подходы, так и специализированные интегральные конструкции для отдельных чисел. Многие из новых оценок были получены с помощью интегральных конструкций, обладающих симметричностью различного типа. Эта область активно исследуется, и авторы надеются, что приведённые здесь результаты будут способствовать её дальнейшему развитию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hata M. Legendre type polynomials and irrationality measures // J. Reine Angew. Math. 1990. Vol. 407, № 1. P. 99-125.
2. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. Vol. LXIII. № 4. P. 325-349.
3. Amoroso F., Viola C. Approximation measures for logarithms of algebraic numbers // Ann. Scuola normale superiore (Pisa). 2001. Vol. XXX. P. 225-249.
4. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function // Manuscripta Math. 1993. Vol. 81. P. 183-202.
5. Heimonen A., Matala-aho T., Väänänen K. An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures // Bull. Austral. Math. Soc. 1994. Vol. 50, № 2. P. 225-243.
6. Rhin G. Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité // Progr. in Math. 1987. Vol. 71. P. 155-164.
7. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\ln 3$ // Доклады Академии наук. 2007. Том 417, № 6. С. 753-755.
8. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Успехи математических наук. 2008. Том 63. № 3. С. 163-164.
9. Сальникова Е. С. О мерах иррациональности некоторых значений функции Гаусса // Чебышевский сборник. 2007. Том 8, № 2. С. 88-96.
10. Сальникова Е. С. Диофантовы приближения $\log 2$ и других логарифмов // Математические заметки. 2008. Том 83. № 3. С. 428-438.
11. Сальникова Е. С. Приближения некоторых логарифмов числами из полей $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}\sqrt{d}$ // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Том 16. № 6. С. 139-155.
12. Томашевская Е. Б. О мере иррациональности числа $\ln 5 + \pi/2$ и некоторых других чисел // Чебышевский сборник. 2007. Том 8. № 2. С. 97-108.
13. Томашевская Е. Б. О диофантовых приближениях значений некоторых аналитических функций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Брянский государственный технический университет. 2009. 99 с.
14. Башмакова М. Г. О приближении значений гипергеометрической функции Гаусса рациональными дробями // Математические заметки. 2010. Т.88, № 6. С. 785-797.
15. Башмакова М. Г. Оценка мер иррациональности логарифма "золотого сечения" // Чебышевский сб. 2010. Т.11, № 1. С. 47-53.
16. Андросенко В. А. Оценка меры иррациональности значений гипергеометрической функции Гаусса // Чебышевский сб. 2010. Т.11, № 1. С. 7-14.
17. Лучин М. Ю. Оценка меры иррациональности числа $\ln \frac{7}{4}$ // Чебышевский сб. 2013. Том 14, № 2. С. 123-131.
18. Лучин М. Ю., Салихов В. Х. Приближение $\ln 2$ числами из поля $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Том 82, № 3. С. 108-135.

-
19. Wu Q, Wang L. On the irrationality measure of $\log 3$ // Journal of Number Theory. 2014. Vol. 142. P. 264-273.
 20. Андросенко В. А. Мера иррациональности числа $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т.79, № 1. С. 3-20.
 21. Marcovecchio R. The Rhin-Viola method for $\ln 2$ // Acta Arithm. 2009. Vol. 139.2. P. 147-184.
 22. Башмакова М. Г., Золотухина Е. С. О показателях иррациональности чисел вида $\sqrt{d} \ln \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$ // Чебышевский сб. 2017. Том 18, № 1. С. 29-43.
 23. Polyanskii A. On the irrationality measure of certain numbers // Comb. and Number Theory. 2011. Vol. 1, № 4. P. 80-90.
 24. Полянский А. А. О показателях иррациональности некоторых чисел. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. 2013. 138 с.
 25. Huttner M. Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques // J. Number Theory. 1987. Vol. 26. P. 166-178.

REFERENCES

1. Hata, M. 1990, "Legendre type polynomials and irrationality measures", *J. Reine Angew. Math.*, vol. 407, № 1, pp. 99-125.
2. Hata M. 1993, "Rational approximations to π and some other numbers", *Acta Arith.*, vol. LXIII, № 4, pp. 325-349.
3. Amoroso, F., Viola, C 2001, "Approximation measures for logarithms of algebraic numbers", *Ann. Scuola normale superiore (Pisa)*, Vol. XXX, pp. 225-249.
4. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K. 1993, "On irrationality measures of the values of Gauss hypergeometric function", *Manuscripta Math.*, vol. 81, pp. 183-202.
5. Heimonen, A., Matala-aho, T., Väänänen, K. 1994, "An application of Jacobi type polynomials to irrationality measures", *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 50, № 2, pp. 225-243.
6. Rhin, G. 1987, "Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité", *Progr. in Math.*, vol. 71, pp. 155-164.
7. Salikhov, V. H. 2007, "On the irrationality measures of $\ln 3$ ", *Doklady Mathematics*, vol. 417, № 6, pp. 753-755. (Russian)
8. Salikhov, V. H. 2008, "On the irrationality measures of π ", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 63, № 3, pp. 163-164. (Russian)
9. Salnikova, E., S. 2007, "On irrationality measures of some values of the Gauss function", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 8, № 2, pp. 88-96. (Russian)
10. Salnikova E., S. 2008, "Diophantine approximations of $\log 2$ and other logarithms", *Mathematical Notes*, vol. 83, № 3, pp. 428-438. (Russian)
11. Salnikova E., S. 2010, "Approximations of some logarithms by numbers from the fields $\mathbb{Q}$ and $\mathbb{Q}\sqrt{d}$ ", *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 16, № 6, pp. 139-155. (Russian)
12. Tomashevskaya E. B., 2007, "On the irrationality measure of the number $\log 5 + \frac{\pi}{2}$ and some other numbers", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 8, no.2, pp. 97-108. (Russian)
13. Tomashevskaya E. B., 2009, "Diophantine approximations of a values of some analytic functions", *Dissertation.*, Bryansk State technical University, 99 pp. (Russian)
14. Bashmakova M. G., 2010, "Approximation of values of the Gauss hypergeometric function by rational fractions", *Mathematical Notes*, vol. 88, no. 6, pp. 785-797. (Russian)
15. Bashmakova M. G., 2010, "The estimate of the irrationality measures of logarithm of "Golden section"", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 11, no. 1, pp. 47-53. (Russian)
16. Androsenko V. A., 2010, "The estimate of the irrationality measures of values of the Gauss hypergeometric function", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 11, no. 1, pp. 7-14. (Russian)
17. Luchin M. Yu., 2013, "The estimate of the irrationality measures of number $\ln \frac{7}{4}$ ", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 14, no. 2, pp. 123-131. (Russian)
18. Luchin M. Yu., Salikhov, V. H., 2018, "Approximation of $\ln 2$ by numbers from the field $\mathbb{Q}\sqrt{2}$ ", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 82, no. 3, pp. 108-135. (Russian)

19. Wu Q, Wang L. 2014, "On the irrationality measure of $\log 3$ ", Journal of Number Theory, vol. 142, pp. 264-273.
20. Androsenko V. A., 2015, "Irrationality measure of the number $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ", Izvestiya: Mathematics, vol. 79, no. 1, pp. 3-20. (Russian)
21. Marcovecchio, R. 2009, "The Rhin-Viola method for $\ln 2$ ", Acta Arithm., vol. 139.2, pp. 147-184.
22. Bashmakova M. G., Zolotukhina E., S. 2017, "On irrationality measures of the numbers $\sqrt{d} \ln \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$ ", Chebyshevskii Sbornik, vol. 18, no. 1, pp. 29-43. (Russian)
23. Polyanskii, A. 2011, "On the irrationality measure of certain numbers", Comb. and Number Theory, vol. 1, № 4, pp. 80-90.
24. Polyanskii, A. A. On the irrationality measure of certain numbers. Dissertation. Lomonosov State University, 2013. 138 pp. (Russian)
25. Huttner, M. 1987, "Irrationalité de certaines intégrales hypergéométriques", J. Number Theory, vol. 26, pp. 166-178.

Получено 04.07.2018

Принято в печать 17.08.2018