

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-215-226

Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием¹

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Аннотация

С помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий можно эффективно изменять характеристики рассеяния тел в определенных направлениях, если подобрать соответствующие законы неоднородности для механических параметров покрытия. В статье рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием. Полагается, что бесконечный круговой цилиндр с покрытием помещен в идеальную безграничную жидкость, законы неоднородности материала покрытия описываются дифференцируемыми функциями, на тело падает гармоническая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником.

В случае установившихся колебаний распространение малых возмущений в идеальной жидкости описывается скалярным уравнением Гельмгольца, а в упругом однородном изотропном цилиндре — скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца. Колебания неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя описываются общими уравнениями движения сплошной среды.

Аналитическое решение рассматриваемой задачи получено на основе известного решения аналогичной задачи дифракции плоской волны. Потенциал скорости сферической волны представляется в интегральной форме в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям. При этом подынтегральное выражение оказывается аналогичным по форме выражению потенциала скорости плоской волны. Поэтому потенциал скорости рассеянной волны в случае падения сферической волны на цилиндр с покрытием записывается в виде интеграла, подынтегральное выражение которого аналогично по форме выражению потенциала скорости рассеянной волны при падении плоской волны на тело. Для вычисления подынтегральной функции необходимо определить поле смещения в неоднородном покрытии, решая построенную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассматриваются вычислительные аспекты оценки интеграла.

Ключевые слова: дифракция, звуковые волны, однородный упругий цилиндр, неоднородное упругое покрытие.

Библиография: 22 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников. Дифракция сферической звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 215–226.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-215-226

Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating

Tolokonnikov Lev Alekseevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Abstract

By means of an continuous-non-uniform elastic coatings it is possible to change effectively scattering performances of bodies in determinate directions if to pick up corresponding the inhomogeneity laws for mechanical parametres of a coating. In paper the problem of diffraction of a spherical sound wave by a homogeneous isotropic elastic cylinder with radially non-uniform elastic coating is considered. It is believed that an infinite circular cylinder with a coating is placed in an ideal unlimited fluid, heterogeneity laws of a coating material are described by differentiable functions, on the body falls a harmonic spherical sound wave emitted by a point source.

In the case of steady state oscillations the propagation of small perturbations in ideal fluid is described by the scalar Helmholtz's equation, and in elastic homogeneous isotropic cylinder — scalar and vector Helmholtz's equations. The oscillations of an inhomogeneous isotropic elastic cylindrical layer described by general motion equations of the continuous medium.

The analytical solution of the viewed problem was obtained on the basis of the known solution for a similar problem of the diffraction of a plane wave. The velocity potential of a spherical wave is represented in integral form as a decomposition on wave cylindrical functions. The integrand turns out to be similar in form to the expression of the velocity potential of a plane wave. The velocity potential of the scattered wave in the case of a falling of a spherical wave on a cylinder with a coating is written as an integral, the integrand of which is similar in form to the expression of the potential of the scattered wave when a plane wave falls on the body. It is necessary to determine the displacement field in a non-uniform coating to calculate the integrand. For this the built boundary-value problem for the system of ordinary differential equations of the second order must be solved. The computational aspects of integral evaluation are considered.

Keywords: diffraction, sound waves, uniform elastic cylinder, non-uniform elastic coating.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, 2018, "Diffraction of a spherical sound wave by an elastic cylinder with an non-uniform coating", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 215–226.

1. Введение

Задачи дифракции плоских гармонических звуковых волн на однородных изотропных упругих цилиндрах рассматривались во многих работах. Например, случай нормального падения плоской волны исследовался в [1, 2], а случай наклонного падения — в [3,4]. Задачи о рассеянии плоских звуковых волн на неоднородных и анизотропных цилиндрических телах решены в [5-9].

Однако падающую волну можно считать плоской, если расстояние от источника звука до рассеивателя много больше длины звуковой волны. На практике часто приходится учитывать криволинейность фронта падающей волны. Расходимость падающей волны приводит не только к количественным, но и качественным изменениям рассеянного поля.

Рассеяние цилиндрической звуковой волны на упругом цилиндре изучалось в [10]. Задачи дифракции сферических звуковых волн на упругих цилиндрических телах с математической точки зрения являются значительно более сложными по сравнению с задачами дифракции плоских и цилиндрических волн. Такие задачи рассматривались в [11-13]. В [11] получено приближенное решение дифракционной задачи в предположении, что один из компонентов векторного потенциала смещения равен нулю. Поэтому это решение имеет ограниченную область применения. В [12] показано, что решение задачи дифракции сферической волны можно получить, используя известное решение задачи дифракции плоской волны. Поэтому нет необходимости решать сложные дифференциальные уравнения с соответствующими граничными условиями. В [13] задача решается с помощью потенциалов Дебая.

В ряде работ исследовалась возможность изменения звукоотражающих свойств тел с помощью непрерывно-неоднородных упругих покрытий путем выбора соответствующих законов неоднородности для механических параметров покрытия. Задачи дифракции плоской и цилиндрической звуковых волн на упругом цилиндре с радиально-неоднородным упругим покрытием решены в [14-15]. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами осуществлено в [16]. Радиально-неоднородное покрытие цилиндра можно реализовать с помощью системы однородных упругих слоев с различными значениями механических параметров [17].

В настоящей работе рассматривается задача дифракции сферической звуковой волны на однородном изотропном упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим бесконечный однородный изотропный упругий цилиндр радиуса r_0 , материал которого характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Цилиндр имеет покрытие в виде радиально-неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя с внешним радиусом r_1 . Полагаем, что плотность материала покрытия ρ является непрерывной функцией радиальной координаты r , а модули упругости λ и μ — дифференцируемыми функциями координаты r цилиндрической системы координат r, φ, z , связанной с цилиндрическим телом. Ось вращения цилиндра совпадает с координатной осью z . Окружающая цилиндр жидкость является идеальной. Ее плотность и скорость звука соответственно равны ρ_1 и c .

Пусть из внешнего пространства на цилиндр падает гармоническая сферическая звуковая волна, излучаемая точечным источником, координаты которого (r_i, φ_i, z_i) . Потенциал скорости падающей волны

$$\Psi_i = \frac{e^{i(kR - i\omega t)}}{R},$$

где $k = \omega/c$ — волновое число жидкости; ω — круговая частота; $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$; $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_i$ — векторы, соединяющие начало координат с точкой наблюдения (r, φ, z) и с точечным источником (r_i, φ_i, z_i) соответственно; t — время. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Определим акустическое поле, рассеянное упругим цилиндром с непрерывно-неоднородным покрытием.

3. Аналитическое решение задачи

Распространение малых возмущений в идеальной жидкости в случае установившихся колебаний описывается уравнением Гельмгольца [18]

$$\Delta \Psi^{(1)} + k^2 \Psi^{(1)} = 0, \quad (1)$$

где $\Psi^{(1)} = \Psi_i + \Psi_s$ — потенциал скорости полного акустического поля во внешней области, Ψ_s — потенциал скорости рассеянной волны. При этом скорость частиц $\mathbf{v}$ и акустическое давление p в жидкости определяются по формулам

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Psi^{(1)}, \quad p = i\rho_1\omega \Psi^{(1)}.$$

Распространение малых возмущений в упругом однородном изотропном цилиндре в случае гармонического движения описывается скалярным и векторным уравнениями Гельмгольца [18]

$$\Delta \Psi^{(2)} + k_l^2 \Psi^{(2)} = 0, \quad \Delta \Phi + k_\tau^2 \Phi = 0, \quad (2)$$

где $\Psi^{(2)}$ и Φ — скалярный и векторный потенциалы смещения $\mathbf{u}^0$;

$$\mathbf{u}^0 = \text{grad } \Psi^{(2)} + \text{rot } \Phi;$$

$k_l = \omega/c_l$ — волновое число продольных упругих волн; $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновое число поперечных упругих волн; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + 2\mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно.

Представляя вектор Φ в виде

$$\Phi = \text{rot } L\mathbf{e}_z + k_\tau M\mathbf{e}_z,$$

переходим от векторного уравнения (2) к двум скалярным уравнениям

$$\Delta L + k_\tau^2 L = 0, \quad \Delta M + k_\tau^2 M = 0, \quad (3)$$

где L и M — скалярные функции координат r, φ, z ; $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор координатной оси z .

Выражения компонентов $u_r^0, u_\varphi^0, u_z^0$ вектора смещения $\mathbf{u}^0$ и компонентов тензора напряжений σ_{ij}^0 в однородном цилиндре через функции $\Psi^{(2)}, L$ и M приведены в [14].

Уравнения движения неоднородного изотропного упругого цилиндрического слоя в случае установившихся колебаний в цилиндрической системе координат имеют вид [19]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} &= -\omega^2 \rho(r) u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} &= -\omega^2 \rho(r) u_\varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} = -\omega^2 \rho(r) u_z,$$

где u_r, u_φ, u_z — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}$ частиц неоднородного слоя; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений в неоднородном слое.

Решения дифференциальных уравнений (1)–(4) должны удовлетворять граничным условиям.

Граничные условия на внешней поверхности неоднородного покрытия заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц упругой неоднородной среды и жидкости, равенстве на ней нормального напряжения и акустического давления, отсутствии касательных напряжений

$$r = r_1 : -i\omega u_r = v_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0.$$

На внутренней поверхности покрытия при переходе через границу раздела упругих сред должны быть непрерывны составляющие вектора смещения частиц, а также нормальные и тангенциальные напряжения

$$r = r_0 : u_r = u_r^0, \quad u_\varphi = u_\varphi^0, \quad u_z = u_z^0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}^0, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rz}^0.$$

Для решения рассматриваемой задачи применим подход, предложенный в работе [12].

Воспользуемся известным решением задачи дифракции наклонно падающей плоской звуковой волны на упругом цилиндре с неоднородным покрытием [14]. Согласно [14] потенциал скорости плоской волны, падающей на цилиндр $\Psi_{i\text{plane}}$, потенциал скорости рассеянной волны $\Psi_{s\text{plane}}$ и компоненты вектора смещения в неоднородном покрытии $u_{r\text{plane}}, u_{\varphi\text{plane}}, u_{z\text{plane}}$ определяются по формулам

$$\Psi_{i\text{plane}} = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A i^n J_n(\beta r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (5)$$

$$\Psi_{s\text{plane}} = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(\beta r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (6)$$

$$u_{r\text{plane}} = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{1n}(r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad u_{\varphi\text{plane}} = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{2n}(r) e^{in(\varphi-\varphi_0)},$$

$$u_{z\text{plane}} = e^{i\alpha z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{3n}(r) e^{in(\varphi-\varphi_0)},$$

где A — амплитуда плоской волны; θ_0 и φ_0 — полярный и азимутальный углы падения плоской волны; $\alpha = k \cos \theta_0$; $\beta = k \sin \theta_0$; J_n — цилиндрическая функция Бесселя порядка n ; $H_n^{(1)}$ — цилиндрическая функция Ганкеля первого рода порядка n ;

$$A_n = \frac{A i^n \beta J_n'(\beta r_1) + i\omega u_{1n}(r_1)}{\beta H_n^{(1)'}(\beta r_1)}.$$

Здесь и далее штрихи означают дифференцирование по аргументу.

Функции $u_{jn}(r)$ ($j = 1, 2, 3$) являются решением краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [14]

$$\begin{aligned} \hat{A}_n \mathbf{U}_n'' + \hat{B}_n \mathbf{U}_n' + \hat{C}_n \mathbf{U}_n &= 0, \\ \left(\frac{1}{r_2} \hat{A}_n \mathbf{U}_n' + \hat{E}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=r_1} &= \hat{G}_n, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \hat{A}_n \mathbf{U}'_n + \hat{F}_n \mathbf{U}_n \right)_{r=r_0} = 0,$$

где $\mathbf{U}_n = (u_{1n}, u_{2n}, u_{3n})^T$; $\hat{A}_n = (a_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{B}_n = (b_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{C}_n = (c_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{E}_n = (e_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{F}_n = (f_{nij})_{3 \times 3}$, $\hat{G}_n = (g_{ni})_{3 \times 1}$ — матрицы, выражения для элементов которых приведены в [14].

Запишем сферическую волну в виде разложения по цилиндрическим волновым функциям [20]

$$\Psi_i = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(h) dh, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_i(h) &= \frac{i}{2} e^{ih(z-z_i)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} J_n(k_h r_i) H_n^{(1)}(k_h r) \quad \text{при } r > r_i, \\ \tilde{\Psi}_i(h) &= \frac{i}{2} e^{ih(z-z_i)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\varphi-\varphi_i)} J_n(k_h r) H_n^{(1)}(k_h r_i) \quad \text{при } r < r_i, \end{aligned} \quad (9)$$

$$k_h = \sqrt{k^2 - h^2}.$$

Здесь и в дальнейшем знаком "тильда" будем обозначать величины, зависящие от h .

Без ограничения общности положим $z_i = 0$.

При удовлетворении граничных условий на поверхности покрытия $r = r_1$ следует для сферической волны использовать разложение (9), которое запишем в виде

$$\tilde{\Psi}_i(h) = e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(h) i^n J_n(k_h r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (10)$$

где

$$I_n(h) = \frac{1}{2} (-i)^{n-1} H_n^{(1)}(k_h r_i).$$

Сравнивая формулы (10) и (5) и учитывая, что $\beta = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$, замечаем, что подынтегральное выражение в (8), определяемое (10), аналогично по форме выражению плоской волны (5). При этом h соответствует α , а $I_n(h)$ — A . Следовательно, при рассеянии первичного поля возмущений, определяемого $\tilde{\Psi}_i(h)$, потенциал скорости рассеянной волны $\tilde{\Psi}_s(h)$ определяется формулой, которая аналогична формуле (6). При этом в (6) следует сделать замены α на h и A на $I_n(h)$.

Получаем

$$\tilde{\Psi}_s(h) = e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_n(h) H_n^{(1)}(k_h r) e^{in(\varphi-\varphi_0)}, \quad (11)$$

где

$$\tilde{A}_n(h) = \frac{I_n(h) i^n k_h J'_n(k_h r_1) + i\omega \tilde{u}_{1n}(r_1, h)}{k_h H_n^{(1)'}(k_h r_1)}.$$

Кроме того, указанные выше замены следует произвести в выражениях для элементов матриц краевой задачи (7). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} a_{n11} &= (\lambda + 2\mu)r^2, \quad a_{n22} = a_{n33} = \mu r^2, \quad a_{nij} = 0, \quad (i \neq j), \\ b_{n11} &= (\lambda' + 2\mu')r^2 + (\lambda + 2\mu)r, \quad b_{n12} = \hat{b}_{n21} = in(\lambda + \mu)r, \\ b_{n13} &= b_{n31} = i h (\lambda + \mu)r^2, \quad b_{n22} = b_{n33} = \mu' r^2 + \mu r, \quad b_{n23} = b_{n32} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{n11} &= \lambda' r - \lambda - (n^2 + 2 + h^2 r^2) \mu + \omega^2 \rho r^2, \\
c_{n12} &= i n (\lambda' r - \lambda - 3\mu), \quad c_{n13} = i h \lambda' r^2, \quad c_{n21} = i n (\mu' r + \lambda + 3\mu), \\
c_{n22} &= -\mu' r - n^2 \lambda - (2n^2 + h^2 r^2 + 1) \mu + \omega^2 \rho r^2, \quad c_{n23} = \tilde{c}_{n32} = -n h (\lambda + \mu) r, \\
c_{n31} &= i h (\mu' r + \lambda + \mu) r, \quad c_{n33} = -(n^2 + 2h^2 r^2) \mu' r - h^2 \lambda r^2 + \omega^2 \rho r^2, \\
e_{n11} &= \frac{\lambda}{r} + \frac{\omega^2 \rho_1 H_n^{(1)}(k_h r)}{k_h H_n^{(1)'}(k_h r)}, \quad e_{n12} = \frac{i n \lambda}{r}, \quad e_{n13} = i h \lambda, \\
e_{n21} &= \frac{i n \mu}{r}, \quad e_{n22} = -\frac{\mu}{r}, \quad e_{n31} = i h \mu, \quad e_{n23} = e_{n32} = e_{n33}, \\
g_{n1} &= \frac{i \omega \rho_1 H_n^{(1)}(k_h r)}{\pi k_h r H_n^{(1)'}(k_h r)}, \quad g_{n2} = g_{n3} = 0, \\
f_{n11} &= \frac{\lambda}{r} - (\gamma_{1n} b_{1n} + \gamma_{2n} c_{1n} + \gamma_{3n} d_{1n}) q_n^{-1}, \quad f_{n12} = \frac{i n \lambda}{r} - (\gamma_{1n} b_{2n} + \gamma_{2n} c_{2n} + \gamma_{3n} d_{2n}) q_n^{-1}, \\
f_{n13} &= i h \lambda - (\gamma_{1n} b_{3n} + \gamma_{2n} c_{3n} + \gamma_{3n} d_{3n}) q_n^{-1}, \quad f_{n21} = \frac{i n \mu}{r} - (\gamma_{4n} b_{1n} + \gamma_{5n} c_{1n} + \gamma_{6n} d_{1n}) q_n^{-1}, \\
f_{n22} &= -\frac{\mu}{r} - (\gamma_{4n} b_{2n} + \gamma_{5n} c_{2n} + \gamma_{6n} d_{2n}) q_n^{-1}, \quad f_{n23} = -(\gamma_{4n} b_{3n} + \gamma_{5n} c_{3n} + \gamma_{6n} d_{3n}) q_n^{-1}, \\
f_{n31} &= i h \mu - (\gamma_{7n} b_{1n} + \gamma_{8n} c_{1n} + \gamma_{9n} d_{1n}) q_n^{-1}, \quad f_{n32} = -(\gamma_{7n} b_{2n} + \gamma_{8n} c_{2n} + \gamma_{9n} d_{2n}) q_n^{-1}, \\
f_{n33} &= -(\gamma_{7n} b_{3n} + \gamma_{8n} c_{3n} + \gamma_{9n} d_{3n}) q_n^{-1}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
q_n &= k_\tau k_{2h}^2 r_0^2 J_n'(k_{2h} r_0) [k_{1h} k_{2h} J_n'(k_{1h} r_0) J_n(k_{2h} r_0) + h^2 J_n(k_{1h} r_0) J_n'(k_{2h} r_0)] - \\
&\quad - n^2 k_\tau^3 J_n(k_{1h} r_0) J_n^2(k_{2h} r_0), \\
k_{1h} &= \sqrt{k_l^2 - h^2}, \quad k_{2h} = \sqrt{k_\tau^2 - h^2}, \\
b_{1n} &= k_\tau k_{2h}^3 r_0^2 J_n(k_{2h} r_0) J_n'(k_{2h} r_0), \quad b_{2n} = i n k_\tau k_{2h}^2 r_0 J_n^2(k_{2h} r_0), \\
b_{3n} &= i h k_\tau [n^2 J_n^2(k_{2h} r_0) - (k_{2h} r_0)^2 J_n'^2(k_{2h} r_0)], \\
c_{1n} &= -i h k_\tau k_{2h} r_0^2 J_n(k_{1h} r_0) J_n'(k_{2h} r_0), \quad c_{2n} = n h k_\tau r_0 J_n(k_{1h} r_0) J_n(k_{2h} r_0), \\
c_{3n} &= [q_n - i h J_n(k_{1h} r_0) b_{3n}] / [k_{2h}^2 J_n(k_{2h} r_0)], \quad d_{1n} = i n k_\tau^2 r_0 J_n(k_{1h} r_0) J_n(k_{2h} r_0), \\
d_{2n} &= -k_{2h} r_0^2 [k_{1h} k_{2h} J_n'(k_{1h} r_0) J_n(k_{2h} r_0) + h^2 J_n(k_{1h} r_0) J_n'(k_{2h} r_0)], \\
d_{3n} &= n h r_0 [k_{2h} J_n(k_{1h} r_0) J_n'(k_{2h} r_0) - k_{1h} J_n'(k_{1h} r_0) J_n(k_{2h} r_0)], \\
\gamma_{1n} &= 2 \mu_2 k_{1h}^2 J_n''(k_{1h} r_0) - \lambda_2 k_l^2 J_n(k_{1h} r_0), \quad \gamma_{2n} = 2 i \mu_2 h k_{2h}^2 J_n''(k_{2h} r_0), \\
\gamma_{3n} &= 2 i r_0^{-2} \mu_2 n k_\tau [k_{2h} r_0 J_n'(k_{2h} r_0) - J_n(k_{2h} r_0)], \\
\gamma_{4n} &= 2 i r_0^{-2} \mu_2 n [k_{1h} r_0 J_n'(k_{1h} r_0) - J_n(k_{1h} r_0)], \\
\gamma_{5n} &= -2 r_0^{-2} \mu_2 n h [k_{2h} r_0 J_n'(k_{2h} r_0) - J_n(k_{2h} r_0)], \\
\gamma_{6n} &= r_0^{-2} \mu_2 k_\tau [-(k_{2h} r_0)^2 J_n''(k_{2h} r_0) + k_{2h} r_0 J_n'(k_{2h} r_0) - n^2 J_n(k_{2h} r_0)], \\
\gamma_{7n} &= 2 i \mu_2 h k_{1h} J_n'(k_{1h} r_0), \quad \gamma_{8n} = \mu_2 k_{2h} J_n'(k_{2h} r_0) (k_\tau^2 - 2h^2), \\
\gamma_{9n} &= -r_0^{-1} \mu_2 k_\tau n h J_n(k_{2h} r_0).
\end{aligned}$$

Потенциал скорости рассеянной волны, возникающей при дифракции сферической волны на цилиндре с покрытием, определяется путем интегрирования $\tilde{\Psi}_s(h)$ по h

$$\Psi_s = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}_s(h) dh. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12) получаем

$$\Psi_s = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{ihz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{k_h H_n^{(1)}(k_h r_i) J'_n(k_h r_1) + 2\omega \tilde{u}_{1n}(r_1, h)}{2k_h H_n^{(1)'}(k_h r_1)} H_n^{(1)}(k_h r) e^{in(\varphi - \varphi_0)} dh. \quad (13)$$

Для нахождения $\tilde{u}_{1n}(r_1, h)$ следует решить краевую задачу (7). Она может быть решена различными методами, например, методом сведения к задачам с начальными условиями [7], методом сплайн-коллокации [9], методом степенных рядов [21].

Оценить аналитически интеграл (13) не представляется возможным. Он подлежит только численному расчету, хотя и при этом возникают значительные трудности.

На вещественной оси отсутствуют особенности подынтегральной функции (нули знаменателя), но имеются точки ветвления $h = \pm k$, которые определяются двужанной функцией $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ аргумента h .

В (13) на участках интегрирования от $h = -\infty$ до $-k$ и от $h = k$ до $+\infty$ величина $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ становится чисто мнимой. Чтобы выполнялись условия излучения на бесконечности для потенциала Ψ_s при $r \rightarrow \infty$, необходимо потребовать, чтобы $\text{Im } k_h \geq 0$. Это следует из привлечения асимптотической формулы для функции $H_n^{(1)}(k_h r)$, стоящей в (13), при больших значениях аргумента ($k_h r \gg 1$) [22]

$$H_n^{(1)}(k_h r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_h r}} \exp \left[i \left(k_h r - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Таким образом, $k_h = \sqrt{k^2 - h^2}$ при $-k < h < k$ и $k_h = i\sqrt{h^2 - k^2}$ при $|h| > k$.

При $h \rightarrow \pm k$ возникают затруднения при вычислении подынтегрального выражения в (13).

Учитывая, что $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ и $H_{-n}^{(1)}(z) = (-1)^n H_n^{(1)}(z)$, в окрестности точек $h = \pm k$ заменим в (13) цилиндрические функции Бесселя и их производные асимптотическими формулами при малых значениях аргумента ($z \rightarrow 0$) [22]

$$J_n(z) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2} \right)^n, \quad H_n^{(1)}(z) \approx -\frac{i}{\pi} (n-1)! \left(\frac{2}{z} \right)^n, \quad n \geq 1,$$

$$J_0(z) \approx 1, \quad H_0^{(1)}(z) \approx \frac{2i}{\pi} \ln \frac{z}{2},$$

$$J'_n(z) \approx \frac{z^{n-1}}{2^n (n-1)!}, \quad H_n^{(1)'}(z) \approx \frac{2^n i n!}{\pi z^{n+1}}, \quad n \geq 1,$$

$$J'_0(z) \approx -\frac{z}{2}, \quad H_0^{(1)'}(z) \approx \frac{2i}{\pi z}.$$

Анализируя полученное асимптотическое выражение для подынтегральной функции, устанавливаем, что при $n \neq 0$ слагаемые в подынтегральном выражении в окрестности точек $h = \pm k$ стремятся к нулю, так что их следует положить равными нулю. Слагаемое при $n = 0$ имеет порядок $\ln \sqrt{k^2 - h^2}$. Следовательно, подынтегральное выражение в (13) имеет логарифмические особенности в точках $h = \pm k$. Устраним эти особенности путем обхода точек $h = \pm k$ по полуокружностям малого радиуса ε в комплексной плоскости h . Для обхода точки

$h = k$ полуокружность берется под действительной осью, а для обхода точки $h = -k$ — над этой осью. Именно при таком обходе выполняется условие $\text{Im } k_h \geq 0$. При интегрировании по полуокружности при обходе точки $h = k$ сделаем замену переменной в $\ln \sqrt{k^2 - h^2}$ по формуле $h = k + \varepsilon \exp(i\phi)$. В результате приходим к интегралу

$$i \varepsilon \int_{\pi}^{2\pi} \left(\ln \sqrt{-2k \varepsilon} + \frac{i \phi}{2} \right) e^{i\phi} d\phi,$$

который стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогичная ситуация имеет место и при обходе точки $h = -k$. В этом случае замена переменной интегрирования h на ϕ производится по формуле $h = -k + \varepsilon \exp(i\phi)$. Таким образом, при $n = 0$ подынтегральное выражение в точках $h = \pm k$ также как и при $n \neq 0$ не вычисляется, а заменяется на ноль.

Точка наблюдения, как правило, находится далеко от рассеивателя. Так как функция Ганкеля $H_n^{(1)}(k_h r)$ стремится к нулю при $k_h r \rightarrow \infty$, то интеграл (13) можно численно оценить, рассматривая конечный и сравнительно небольшой интервал интегрирования.

4. Заключение

В настоящей работе получено точное решение задачи дифракции сферической звуковой волны на упругом цилиндре с непрерывно-неоднородным упругим покрытием на основе известного решения аналогичной задачи в случае плоской падающей волны. Подобный подход может быть использован при решении других задач дифракции неплоских волн, когда геометрии тела и фронта падающей волны различны. При этом предполагается наличие разложения падающей волны по плоским волнам и аналитического решения соответствующей задачи дифракции плоской волны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Faran J.J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. Vol. 23, № 4. P. 405-418.
2. Doolittle R.D., Uberall H. Sound scattering by elastic cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1966. Vol. 39, № 2. P. 272—275.
3. Flax L., Varadan V.K., Varadan V.V. Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. Vol. 68, № 6. P. 1832-1835.
4. Li T., Ueda M. Sound scattering of a plane wave obliquely incident on a cylinder // J. Acoust. Soc. Amer. 1989. Vol. 86, № 6. P. 2363-2368.
5. Безруков А.В., Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. Рассеяние звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами // Акустический журн. 1986. Т. 32, вып. 6. С. 762-766.
6. Коваленко Г.П. К задаче о дифракции акустической волны на неоднородном твердом теле // Акустический журн. 1987. Т. 33, вып. 6. С. 1060-1063.
7. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем // Акустический журн. 1995. Т. 41, № 1. С. 134-138.

8. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на неоднородном анизотропном полом цилиндре // Оборонная техника. 1998. № 4-5. С. 11-14.
9. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном термоупругом цилиндрическом слое, граничащем с невязкими теплопроводными жидкостями // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 3. С. 474-483.
10. Lee F. A. Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder // *Acustica*. 1963. Vol. 13, № 3. P. 26-31.
11. Piquette J. C. Spherical wave scattering by an elastic solid cylinder of infinite length // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1986. Vol. 79, № 5. P. 1248-1259.
12. Li T., Ueda M. Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1990. Vol. 87, № 5. P. 1871-1879.
13. Клещев А. А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке // *Акустический журн.* 2004. Т. 50, № 1. С. 86-89.
14. Толоконников Л. А. Рассеяние наклонно падающей плоской звуковой волны упругим цилиндром с неоднородным покрытием // *Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки.* 2013. Вып. 2. Часть 2. С. 265-274.
15. Толоконников Л. А. Дифракция цилиндрических звуковых волн на цилиндре с неоднородным упругим покрытием // *Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки.* 2013. Вып. 3. С. 202-208.
16. Толоконников Л. А., Ларин Н. В., Скобельцын С. А. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // *Прикладная механика и техническая физика.* 2017. Т. 58, № 4. С. 189-199.
17. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Рассеяние плоской звуковой волны упругим цилиндром с дискретно-слоистым покрытием // *Прикладная математика и механика.* 2015. Т. 79, вып. 2. С. 242-250.
18. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
19. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
20. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 584 с.
21. Романов А. Г., Толоконников Л. А. Рассеяние звуковых волн цилиндром с неоднородным упругим покрытием // *Прикладная математика и механика.* 2011. Т. 75, вып. 5. С. 850-857.
22. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. М.: Физматгиз, 1963. 358 с.

REFERENCES

1. Faran, J. J. 1951, "Sound scattering by solid cylinders and spheres", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 23, no 4, pp. 405-418.
2. Doolittle, R. D. & Uberall, H. 1966, "Sound scattering by elastic cylindrical shells", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 39, no 2, pp. 272-275.

3. Flax, L., Varadan, V.K. & Varadan, V.V. 1980, "Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 68, no 6, pp. 1832-1835.
4. Li T. & Ueda M. 1989, "Sound scattering of a plane wave obliquely incident on a cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 86, no 6, pp. 2363-2368.
5. Bezrukov, A. V., Prihod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1986, "Scattering of sound waves by elastic radially-layered cylindrical bodies", *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no. 6, pp. 762-766 [in Russian].
6. Kovalenko, G. P. 1987, "About a problem of diffraction of acoustic wave by an inhomogeneous solid body", *Akust. Zhurnal*, vol. 33, no. 6, pp. 1060-1063 [in Russian].
7. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1995, "Scattering of sound waves by a transversely isotropic inhomogeneous cylinder layer", *Acoustical Physics*, vol. 41, no 1, pp. 114-117.
8. Tolokonnikov, L. A. 1998, "Diffraction of sound waves by an inhomogeneous non-isotropic hollow cylinder", *Oboron. Tekh.*, no 4-5, pp. 11-14 [in Russian].
9. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2009, "Diffraction of a plane acoustic wave by a non-uniform thermoelastic cylindrical layer bounded by inviscid heat-conducting fluids", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 73, no. 3, pp. 336-343.
10. Lee F. A. 1963, "Scattering of a cylindrical wave of sound by an elastic cylinder", *Acustica*, vol. 13, no 3. pp. 26-31.
11. Piquette J. C. 1986, "Spherical wave scattering by an elastic solid cylinder of infinite length", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 79, no 5, pp. 1248-1259.
12. Li T., Ueda M. 1980, "Sound scattering of spherical wave incident on a cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 87, no 5, pp. 1871-1879.
13. Kleshchev A. A. 2004, "Diffraction of point-source-generated sound by an elastic cylindrical shell", *Acoustical physics*, vol. 50, no 1, pp. 74-76.
14. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Scattering of an obliquely incident plane sound wave by an elastic cylinder with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 2-2, pp. 265-274 [in Russian].
15. Tolokonnikov, L. A. 2013, "Diffraction of cylindrical sound waves by an cylinder with a non-uniform elastic coating", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no. 3, pp. 202-208 [in Russian].
16. Tolokonnikov, L. A., Larin, N. V. & Skobel'tsyn, S. A. 2017, "Modeling of inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, no 4, pp. 733-742.
17. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "The scattering of a plane sound wave by an elastic cylinder with a discrete-layered covering", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 79. no 2, pp. 164-169.
18. Shenderov, E. L. 1972, "Wave problems of underwater acoustics", Sudostroenie, Leningrad, 352 p. [in Russian].
19. Nowacki, W. 1975, "Teoria sprężystości", Mir, Moscow, 872 p.
20. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p. [in Russian].

21. Romanov, A. G. & Tolokonnikov, L. A. 2011, "The scattering of acoustic waves by a cylinder with a non-uniform elastic coating", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 75, no. 5, pp. 595-600.
22. Lebedev, N. N. 1963, "*Special functions and their applications*", Fizmatgiz, Moscow, 358 p. [in Russian].

Получено 20.07.2018

Принято в печать 22.10.2018