## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК Том 19. Выпуск 4

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-177-193

# Дифракция звука на упругом шаре с неоднородным покрытием и полостью в полупространстве <sup>1</sup>

**Скобельцын Сергей Алексеевич** — кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет. e-mail: skbl@rambler.ru

**Федотов Иван Сергеевич** — аспирант, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

e-mail: fedyafed@mail.ru

**Титова Ангелина Сергеевна** — аспирант, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

e-mail: TitA-2005@yandex.ru

#### Аннотация

Рассматривается решение задачи дифракции плоской гармонической звуковой волны на упругом шаре T с полостью вблизи идеальной плоскости  $\Pi$ . Внешний слой шара является неоднородным.

Решение проводится путем расширения области задачи до полного пространства и введения дополнительного препятствия, являющегося копией T, расположенной зеркально по отношению к плоскости  $\Pi$ .

Добавление второй падающей плоской волны обеспечивает выполнение того условия в точках плоскости П, которое соответствует типу границы полупространства в начальной постановке задачи. Таким образом, задача сводится к задаче о рассеянии двух плоских звуковых волн на двух неоднородных шарах в неограниченном пространстве.

Решение проводится на основе линейной теории упругости и модели распространения малых возмущений в идеальной жидкости. Во внешней части жидкости решение ищется аналитически в форме разложения по сферическим гармоникам и функциям Бесселя. В шаровой области, включающей два шара и прилегающий слой жидкости, используется метод конечных элементов (МКЭ).

Представлены результаты расчета диаграмм направленности рассеянного звукового поля в дальней зоне, которые показывают влияние геометрических и материальных параметров неоднородного препятствия на рассеяние звука.

*Ключевые слова:* дифракция звука, полупространство, упругий шар, неоднородное покрытие, метод конечных элементов.

Библиография: 24 названия.

#### Для цитирования:

С. А. Скобельцын, И. С. Федотов, А. С. Титова. Дифракция звука на упругом шаре с неоднородным покрытием и полостью в полупространстве // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 177–193.

 $<sup>^{1}</sup>$ Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-177-193

## Diffraction of sound on an elastic sphere with a nonhomogeneous coating and cavity in semi-space

**Skobel'tsyn Sergey Alekseevich** — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

 $e ext{-}mail: skbl@rambler.ru$ 

**Fedotov Ivan Sergeevich** — postgraduate, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

e-mail: fedyafed@mail.ru

Titova Angelina Sergeevna — postgraduate, department of applied mathematics and computer

science, Tula State University. e-mail: TitA-2005@yandex.ru

#### Abstract

The problem for diffraction a plane harmonic sound wave on an elastic sphere T with cavity near ideal plane  $\Pi$  is considered. The outer ball layer is nonhomogeneous.

Решение проводится путем расширения области задачи до полного пространства The solution is carried out by expanding the scope of the problem to the full space. При этом вводится дополнительное препятствие, которое является копией T, расположенной зеркально по отношению к плоскости  $\Pi$ . In this case, an additional obstacle is introduced, which is a copy of T, which is located mirror with respect to the  $\Pi$ .

A second incident plane wave is also added. This wave ensures the fulfillment of that condition at the points of the plane  $\Pi$ , which corresponds to the type of the half-space boundary in the initial formulation of the problem. Thus, the problem is transformed into the problem of scattering of two plane sound waves on two inhomogeneous spheres in unbounded space.

The solution is based on the linear theory of elasticity and the model of propagation of small vibrations in an ideal fluid. In the outer part of the liquid, the solution is sought analytically in the form of an expansion in spherical harmonics and Bessel functions. In the spherical region, which includes two elastic balls and an adjacent layer of liquid, the finite element method (FEM) is used.

The results of the calculation of the directivity patterns of the scattered sound field in the far zone are presented. These dependencies show the influence of the geometric and material parameters of the obstacle on the diffraction of sound.

Keywords: sound diffraction, half-space, inhomogeneous elastic ellipsoid, finite element method.

Bibliography: 24 titles.

#### For citation:

S. A. Skobel'tsyn, I. S. Fedotov, A. S. Titova, 2018, "Sound diffraction on an elastic sphere with a nonhomogeneous coating and cavity in semi-space", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 177–193.

#### 1. Введение

Ряд работ академика А. Д. Гвишиани посвящен проблемам динамических процессов в теле Земли (например, [1, 2, 3]). Такие исследования предусматривают использование моделей распространения упругих волн как существенной части самих природных процессов, так и инженерных средств диагностики состояния массивов земной породы.

Простейшие модели упругих волн используются и в акустике. Решения задач дифракции акустических волн на упругих телах могут быть применены при разработке методов исследования в ультразвуковой диагностике, дефектоскопии и гидроакустике, а также могут служить основой решений задач в сейсмологии.

Значительный интерес для теории и практики представляют исследования дифракции звуковых волн на телах сферической формы, так как многие реальные объекты достаточно хорошо могут быть аппроксимированы такими телами. Кроме того, результаты решения задач дифракции звука на таких объектах служат основой для изучения дифракции звуковых волн на телах более сложной формы.

Первыми работами о дифракции звука на упругих телах сферической формы были работы [4, 5]. В работе [4] рассмотрено рассеяние плоских волн сплошным шаром. Статья [5] посвящена изучению рассеяние плоской волны тонкой сферической оболочкой, движение которой описано по безмоментной теории.

В статье [6] приведено решение задачи рассеяния плоской звуковой волны сплошным упругим шаром и определена сила, действующая на шар.

Дифракция сферической звуковой волны на упругой сферической оболочке рассматривалась в [7]. Проведен теоретический анализ распределения звукового давления вблизи поверхности оболочки на расстояниях, сравнимых с ее радиусом.

Дифракция звука на упругих сферических телах с произвольно расположенными сферическими полостями изучалась в работах [8, 9, 10, 11].

Широкие возможности для исследования задач дифракции дает использование метода конечных элементов [12, 13, 14]. В монографии [14] подробно изложены различные аспекты применения МКЭ при решении задач о рассеянии звука объектами различного типа: жесткими, мягкими, упругими. В работах автора [15, 16] используется подход, в котором во внешней области решение представляется в виде разложения по ортогональной системе волновых функций. Поэтому искусственная внешняя граница рассматривается как поверхность, на которой устанавливаются обычные граничные условия согласования звуковых колебаний в двух областях жидкости: внешней (с аналитическим представлением решения) и внутренней, в которой для решения используется МКЭ.

В данной работе представлено решение задачи об отражении плоской звуковой волны упругим шаром с внешним неоднородным слоем и полостью на основе метода конечных элементов. Предполагается, что шар расположен вблизи плоской поверхности идеальной жидкости. Сама граница жидкости является жесткой или идеально мягкой. Такого рода задачи решались для однородных тел и тел, имеющих другую форму, [17, 18, 19, 20, 16]. Здесь, как и в указанных работах используется метод замены границы полупространства на симметрично расположенную копию препятствия и решения задачи с двумя телами в неограниченной области.

## 2. Постановка задачи

Пусть у границы полупространства  $\Pi$ , заполненного идеальной жидкостью с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$  находится упругий шар T. Внешний слой шара фиксированной толщины h является неоднородным: плотность и модули упругости в нем являются функциями координат. Упругий материал внутренней части шара радиуса  $R_1$  является однородным, но

в этой части находится полость радиуса  $R_2$ . В общем случае центр полости не совпадает с центром всего шара  $O_1$ . Смещение центра полости относительно центра шара известно. Считается заданным d – расстояние от центра шара O до  $\Pi$ . Также известны модули упругости Ламе и плотности для однородной части шара –  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\rho_1$  и для внешнего слоя –  $\lambda(\mathbf{r})$ ,  $\mu(\mathbf{r})$ ,  $\rho(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки пространства.

Граница полупространства является идеально жесткой или идеально мягкой. На шар набегает гармоническая плоская звуковая волна с потенциалом смещения

$$\Psi_0 = \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)],\tag{1}$$

где  $\mathbf{k}_0$  — волновой вектор падающей волны ( $|\mathbf{k}_0| = k_0 = \omega/c_0$ );  $\omega$  — круговая частота; t — время. Далее множители  $\exp(-i\omega t)$  у величин, зависящих от времени будем опускать. Без ограничения общности полагается  $|\Psi_0| = 1$ .

Геометрическая схема задачи представлена на рис. 1. Символом  $\Psi_s$  на нем условно показан потенциал смещений в рассеянной волне, который требует определения в задаче. Точка O на рисунке — проекция центра шара  $O_1$  на плоскость  $\Pi$ .

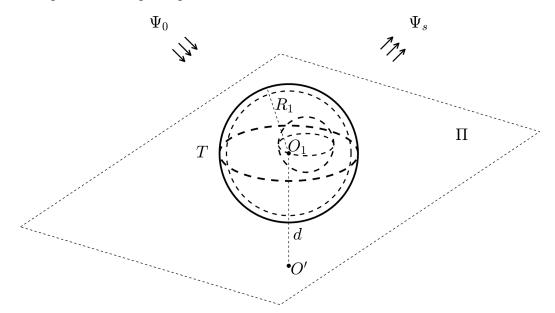


Рис. 1: Геометрия задачи

Введем глобальную ортогональную декартову систему координат x, y, z так, чтобы ее начало было в точке O, а плоскость  $\Pi$  совпадала с координатной поверхностью z=0. Направление оси x выберем так, чтобы волновой вектор  $\mathbf{k_0}$  лежал в плоскости xOz. Наклон вектора  $\mathbf{k_0}$  будем задавать углом  $\theta_0$  между осью z и  $\mathbf{k_0}$  так, что

$$\mathbf{k_0} = k_0 \sin \theta_0 \mathbf{i}_x + k_0 \cos \theta_0 \mathbf{i}_z$$

где  $\mathbf{i}_x$ ,  $\mathbf{i}_z$  — единичные координатные векторы.

Также введем локальную систему координат  $x_1, y_1, z_1$ , оси которой направлены так же, как x, y, z, но центр находится в точке  $O_1$ . Связь между координатами будет описываться соотношениями

$$x_1 = x,$$
  $y_1 = y,$   $z_1 = z - d.$ 

При этом внутренняя поверхность неоднородного слоя  $\Gamma_1$  будет задаваться уравнением

$$\Gamma_1: \qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R_1^2;$$
 (2)

внешняя поверхность неоднородного слоя  $\Gamma_{11}$  –

$$\Gamma_{11}: \qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (R_1 + h)^2;$$
 (3)

а поверхность полости –  $\Gamma_{11}$  – уранением

$$\Gamma_{12}$$
:  $(x_1+a)^2+(y_1+b)^2+(z_1+c)^2=R_2^2$ ,

где a, b, c обозначены известные смещения по осям координат x, y, z центра полости относительно  $O_1$ .

Схематично, геометрия задачи после введения систем координат представлена на рис. 2.

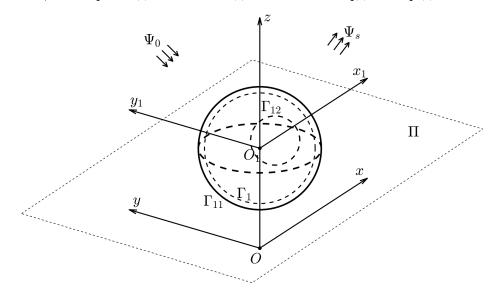


Рис. 2: Введение систем координат

Обозначим области, занимаемые различными средами так:  $\Omega_0$  — область полупространства z>0, занятая идеальной жидкостью;  $\Omega_1$  — область шара, занятая однородной упругой средой  $\{(x_1,y_1,z_1): (x_1+a)^2+(y_1+b)^2+(z_1+c)^2\geqslant R_2^2\ \&\ x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R_1^2\};\ \Omega_{11}$  — неоднородный слой упругого шара  $\{(x_1,y_1,z_1): R_1^2< x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant (R_1+h)^2\}.$ 

В области  $\Omega_0$  движение частиц идеальной жидкости определяется потенциалами смещений в падающей  $\Psi_0$  и рассеянной  $\Psi_s$  волнах. Смещение  $\mathbf{u}_0$  и давление  $p_0$  в области  $\Omega_0$  определяются через эти потенциалы так [22]:

$$\mathbf{u}_0 = \operatorname{grad}(\Psi_0 + \Psi_s), \qquad p_0 = \rho_0 \omega^2 (\Psi_0 + \Psi_s). \tag{4}$$

При этом потенциал  $\Psi_s$  должен удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta\Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0 \tag{5}$$

и условиям излучения на бесконечности [23].

Будем считать, что движение частиц в шаре подчиняется законам линейной теории упругости [24]. Обозначим вектор смещения и тензор напряжения в области  $\Omega_1$  через  $\mathbf{u_1}$  и  $\sigma_1$  соответственно. Тогда гармонические колебания частиц в однородной части тела T описываются уравнениями движения

$$\frac{\partial \sigma_{1xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{1xz}}{\partial z} = -\rho_1 \omega^2 u_{1x}, 
\frac{\partial \sigma_{1yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{1yz}}{\partial z} = -\rho_1 \omega^2 u_{1y}, 
\frac{\partial \sigma_{1zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{1zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{1zz}}{\partial z} = -\rho_1 \omega^2 u_{1z},$$
(6)

где  $u_{1j}$ ,  $\sigma_{1jk}$  — компоненты вектора  $\mathbf{u_1}$  и тензора  $\sigma_1$  в декартовой системе координат (x, y, z) или  $x_1, y_1, z_1$ .

Аналогично в неоднородном слое шара уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\rho_1 \omega^2 u_x, 
\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = -\rho_1 \omega^2 u_y, 
\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho_1 \omega^2 u_z,$$
(7)

где  ${\bf u}$  и  $\sigma$  — вектор смещения и тензор напряжения в области  $\Omega_{11}$ .

Тензор напряжения выражается через компоненты вектора смещения посредством закона Гука, так что уравнения (6), (7) можно рассматривать как системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент векторов смещения  $\mathbf{u_1}$  и  $\mathbf{u}$ .

На свободной поверхности полости –  $\Gamma_{12}$  должен обращаться в ноль вектор напряжения:

$$\sigma_{nn}|_{\Gamma_{12}} = 0, \quad \sigma_{n\tau}|_{\Gamma_{12}} = 0 \quad (\tau = 1, 2);$$
 (8)

здесь индекс n соответствует проекции вектора напряжений на нормаль к сферической поверхности  $\Gamma_{12}$  (индекс  $\tau$  на касательные).

На поверхности (2) соединения неоднородного слоя и однородной части шара должны быть непрерывными смещения и вектор напряжений:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{u_1}, \quad \sigma_{rr}|_{\Gamma_1} = \sigma_{1rr}, \quad \sigma_{rk}|_{\Gamma_1} = \sigma_{1rk} \quad (k = \theta_1, \varphi_1), \tag{9}$$

где  $\sigma_{rk}$ ,  $\sigma_{1rk}$  — компоненты скалярных произведений  $\sigma \cdot \mathbf{r}_1/r_1$ ,  $\sigma_1 \cdot \mathbf{r}_1/r_1$ ;  $r_1$ ,  $\theta_1$ ,  $\varphi_1$  — сферические координаты, связанные с декартовой системой координат  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ;  $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ .

На внешней поверхности тела –  $\Gamma_{11}$  – поверхности соприкосновения жидкости и упругого материала должны быть непрерывными нормальная компонента вектора смещения и вектор напряжений:

$$u_r|_{\Gamma_{11}} = u_{0r}, \quad \sigma_{rr}|_{\Gamma_{11}} = p_0, \quad \sigma_{rk}|_{\Gamma_{11}} = 0 \quad (k = \theta, \varphi);$$
 (10)

здесь величины  $u_{0r}$ ,  $p_0$  выражаются через потенциалы  $\Psi_0$ ,  $\Psi_s$  в соответствии с (4).

Наконец, на границе полупространства  $\Pi$  в зависимости от ее типа должно выполнятся условие

$$a$$
)  $u_{0z}|_{z=0} = 0$ , или  $b$ )  $p_0|_{z=0} = 0$ , (11)

где случай a) соответствует варианту жесткой поверхности  $\Pi$ , а b) – абсолютно мягкой.

Таким образом, требуется решить уравнения (5), (6), (7) с учетом граничных условий (8), (9), (10), (11) и условий излучения на бесконечности.

#### 3. Решение задачи

Для решения задачи применим подход, использованный в [21] при решении задачи о рассеянии звука сфероидом в присутствии подстилающей поверхности. Исключим из рассмотрения границу полупространства  $\Pi$ , расширив область  $\Omega_0$  до полного пространства, введя в рассмотрение второй рассеиватель T', являющийся зеркальным отражением исходного T относительно плоскости z=0, и вторую падающую плоскую волну  $\Psi_1$ , распространяющуюся в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}_1=(k_0\sin\theta_0\cos\varphi_0,\,k_0\sin\theta_0\sin\varphi_0,\,-k_0\cos\theta_0)$  (см. рис. 3).

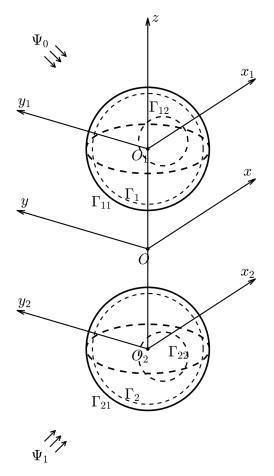


Рис. 3: Введение второго тела

На рисунке  $O_2$  — центр шара T' (глобальные координаты — (0,0,-d)),  $x_2,y_2,z_2$  — локальная система координат с началом в точке  $O_2$  в которой поверхность однородной части T' имеет вид, аналогичный (2)

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = R_1^2.$$

Эту поверхность будем обозначать  $\Gamma_2$ , область однородного материала во втором шаре –  $\Omega_2$ . Внешнюю поверхность тела T', которая определяется уравнением вида (3), обозначим  $\Gamma_{21}$ , а область неоднородного слоя между  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_{21}$  –  $\Omega_{21}$ .

В случае абсолютно жесткой плоскости  $\Pi$  потенциал смещений во второй падающей плоской волне должен быть равен [18]

$$\Psi_1 = \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})].$$

В случае акустически мягкой плоскости потенциал  $\Psi_1$  должен иметь вид

$$\Psi_1 = -\exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})].$$

Тогда граничные условия (11) на плоскости z=0 будут выполнены автоматически.

Таким образом, исходная задача сводится к задаче дифракции двух плоских волн на двух идентичных телах, находящихся в безграничном пространстве  $\Omega_0$ , заполненном однородной идеальной жидкостью.

В силу линейной постановки задачи следует найти решение задачи дифракции каждой из двух плоских волн на двух неоднородных шарах, а затем полученные результаты просуммировать.

Рассмотрим корректировку математической постановки задачи о дифракции плоской звуковой волны  $\Psi_0$  на двух упругих шарах с неоднородными внешними слоями. Уравнения (6), (7) должны быть продублированы для областей  $\Omega_2$  и  $\Omega_{21}$  соответственно. Будем обозначать векторы смещений и тензоры напряжений в областях  $\Omega_2$  и  $\Omega_{21}$  через  $\mathbf{u}_2$ ,  $\sigma_2$  и  $\mathbf{u}'$ ,  $\sigma'$ .

На поверхностях  $\Gamma_{22}$ ,  $\Gamma_{2}$ ,  $\Gamma_{21}$  должны быть введены граничные условия, подобные (8), (9), (10):

$$\sigma_{nn}|_{\Gamma_{22}} = 0, \quad \sigma_{n\tau}|_{\Gamma_{22}} = 0 \quad (\tau = 1, 2);$$
 (12)

$$\mathbf{u}'\big|_{\Gamma_2} = \mathbf{u_2}, \quad \sigma'_{rr}\big|_{\Gamma_2} = \sigma_{2rr}, \quad \sigma'_{rk}\big|_{\Gamma_2} = \sigma_{2rk} \quad (k = \theta_2, \varphi_2);$$
 (13)

$$u'_r|_{\Gamma_{21}} = u_{0r}, \quad \sigma'_{rr}|_{\Gamma_{21}} = p_0, \quad \sigma'_{nk}|_{\Gamma_{21}} = 0,$$
 (14)

здесь индекс n соответствует проекции вектора напряжений на нормаль к сферической поверхности  $\Gamma_{22}$  (индекс  $\tau$  на касательные);  $\sigma'_{rk}$ ,  $\sigma_{2rk}$  — компоненты скалярных произведений  $\sigma' \cdot \mathbf{r}_2/r_2$ ,  $\sigma_2 \cdot \mathbf{r}_2/r_2$ ;  $r_2$ ,  $\theta_2$ ,  $\varphi_2$  — сферические координаты, связанные уже с декартовой системой координат  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ ;  $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ .

В новой постановке условия (11) на поверхности  $\Pi$  исключаются.

Заметим, что в общем случае зависимостей  $\rho(\mathbf{r})$ ,  $\lambda(\mathbf{r})$ ,  $\mu(\mathbf{r})$  для неоднородного слоя рассеивателя аналитическое решение поставленной задачи невозможно. Значительно осложняется поиск аналитического решения и тем, что граничные поверхности  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{22}$  не являются координатными поверхностями сферических систем координат, связанных с  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  и  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ .

Будем решать сформулированную задачу численно с использованием метода конечных элементов на основе подхода, предложенного в работах [15, 16, 21].

В соответствии с этим подходом в области жидкости, прилегающей к телам T и T', выделим сферическую поверхность  $\Gamma_0$  радиуса  $R_0$  такого, чтобы внутри этой поверхности оказались оба препятствия и некоторая область жидкости  $\Omega'_0$ , содержащая упругие тела. При этом минимальное расстояние от упругих тел до поверхности  $\Gamma_0$  должно иметь порядок характерного размера упругого тела.

Тогда совокупность областей жидкой и упругих сред  $\Omega = \Omega'_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_{11} \cup \Omega_2 \cup \Omega_{21}$  можно рассматривать как некоторое неоднородное сферическое препятствие для падающей волны  $\Psi_0$  (см. рис. 4).

Решение уравнений движения во всей области такого неоднородного препятствия будем выполнять с помощью МКЭ. Для этого, к уравнениям вида (6), (7) для упругих областей  $\Omega_1$ ,  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_{21}$  надо добавить уравнения, описывающие колебания жидкости в  $\Omega'_0$ . Введем новую переменную – потенциал смещений в  $\Omega'_0$  –  $\Psi$ . Поскольку в  $\Omega'_0$  находится та же жидкость, что и во всем  $\Omega_0$ , то  $\Psi$  должен удовлетворять волновому уравнению вида (5)

$$\Delta\Psi + k_0^2\Psi = 0. \tag{15}$$

Немного изменится вид граничных условий (10), (14) на поверхностях  $\Gamma_{11}$ ,  $\Gamma_{21}$ . В них надо заменить  $u_{0n}$  и  $p_0$  на

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}}$$
  $p = \rho_0 \omega^2 \Psi,$ 

соответственно.

На сферической внешней поверхности области  $\Omega'_0$  надо ввести условия согласования параметров движения жидкости в  $\Omega'_0$  и во внешней среде  $\Omega_0$ 

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r}\Big|_{r=R_0} = \frac{\partial (\Psi_0 + \Psi_s)}{\partial r}, \qquad \Psi|_{r=R_0} = \Psi_0 + \Psi_s.$$
 (16)

Здесь первое условие выражает требование равенства нормальных смещений в частицах, расположенных по обе стороны  $\Gamma_0$ , а второе – требование равенства давлений.

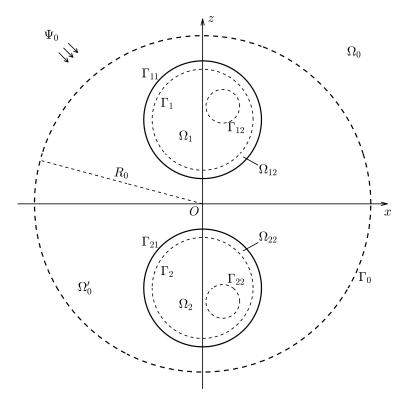


Рис. 4: Сечение области неоднородного шара  $\Omega$ 

Разобьем все подобласти шара  $\Omega$  на конечные элементы в форме тетраэдров. Двумерная иллюстрация этой процедуры представлена на рис. 5.

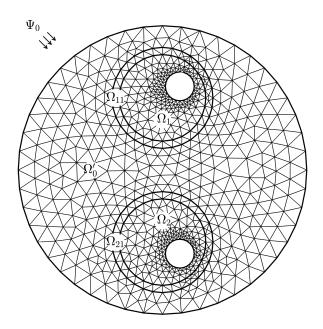


Рис. 5: Схема разбиения  $\Omega$  на конечные элементы

функций узлов [14]. В частности для потенциала  $\Psi$  можно записать

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{K} \psi_k f_k(\mathbf{r}),\tag{17}$$

где  $\psi_k$  — узловые значения потенциала в области  $\Omega$ ;  $f_k(\mathbf{r})$  — координатные функции конечноэлементной модели; K — количество узлов; будем считать, что множество значений  $k=\overline{1...K}$ охватывает узлы всей КЭ-сетки области  $\Omega$ , просто в узлах, не относящихся к  $\Omega_0'$ , положим  $\psi_k \equiv 0$ .

Во внешней области содержащей жидкости потенциал смещений  $\Psi_s$  в рассеянной волне будем искать в виде разложения по сферическим гармоникам с учетом условий излучения

$$\Psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} h_n(k_0 r) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \tag{18}$$

где  $h_n(x)$  — сферическая функция Ханкеля первого рода порядка n;  $P_n^m(x)$  — присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m; r,  $\theta$ ,  $\varphi$  — координаты сферической системы координат, связанной с системой x, y, z;  $A_{nm}$  — неизвестные коэффициенты подлежащие определению из граничных условий.

Разложим также по сферическим гармоникам и потенциал смещений в падающей плоской волне [23]

$$\Psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \gamma_{nm} j_n(k_0 r) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \tag{19}$$

где  $\gamma_{nm}=\frac{i^n(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta_0)\exp(-im\varphi_0);\ j_n(x)$ — сферическая функция Бесселя первого рода порядка n.

Подставляя (17), (18), (19) во второе граничное условие (16) и, используя ортогональность сферических гармоник, получим выражения  $A_{nm}$  через узловые значения  $\psi_k$  на поверхности  $r=R_0$ 

$$A_{nm} = -\gamma_{nm} \frac{j_n(k_0 r)}{h_n(k_0 r)} + \frac{1}{h_n(k_0 r) N_{nm}} \sum_{j=1}^{M} \psi_j(f_j, Y_{nm}), \tag{20}$$

где  $N_{nm} = \frac{4\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}$  — норма сферической гармоники  $Y_{nm}(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta) \exp(im\varphi);$ 

$$(f_j,Y_{nm})=\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}f_j(R_0, heta,arphi)ar{Y}_{nm}( heta,arphi)\sin heta\,darphi d heta -$$
 скалярное произведение на поверхности  $\Gamma_0$ 

координатной функции  $f_k(R_0, \theta, \varphi)$  и сферической гармоники  $Y_{nm}(\theta, \varphi)$ ; здесь множество значений  $j = \overline{1...M}$  соответствует множеству узлов, расположенных на поверхности  $\Gamma_0$ .

Затем подставим выражение (20) для  $A_{nm}$  в первое граничное условие (16).

В форме, аналогичной (17), будем искать и смещение в упругой части препятствия (в областях  $\Omega_1$ ,  $\Omega_{11}$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_{21}$ )

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{U}_k f_k(\mathbf{r}).$$

Здесь **u** рассматривается как общее обозначение для смещений  $\mathbf{u}, \mathbf{u_1}, \mathbf{u'}, \mathbf{u_2}$ , введенных выше.

В результате граничные условия (9), (10), (13), (14) и первое из (16) будут содержать в качестве неизвестных только узловые значения функций  $\Psi$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}$  из ограниченной области  $\Omega$ . Далее можно решать краевую задачу для уравнений (6), (7), аналогичных для T'

и (15) с указанными граничными условиями стандартной технологией МКЭ [14]. В результате решения находим все узловые значения неизвестных функций  $\psi_k$ ,  $U_k$  ( $k=1,2,\ldots K$ ). Подставляя найденные значения  $\psi_j$  ( $j=1,2,\ldots M$ ) в (20), найдем коэффициенты в разложении потенциала смещения в рассеянном поле (18).

Аналогично решим задачу о рассеянии второй падающей волны  $\Psi_1$  и найдем коэффициенты  $A'_{nm}$  в разложении потенциала смещения в рассеянном поле, подобном (18). Тогда потенциал смещения в рассеянном поле, полученном от действия двух волн, можно представить в виде

$$\Psi_s(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} B_{nm} h_n(k_0 r) Y_{nm}(\theta,\varphi), \tag{21}$$

где  $B_{nm} = A_{nm} + A'_{nm}$ .

### 4. Численные исследования

Используя асимптотическое поведение сферической функции Ханкеля при больших значениях аргумента, представим  $\Psi_s(r,\theta,\varphi)$  при  $r\to\infty$  из (21) в виде

$$|\Psi_s|_{r\to\infty} \approx \frac{R_0 \exp(ik_0 r)}{2r} \Phi(\theta, \varphi),$$

где  $\Phi(\theta,\varphi)$  — нормированная форм-функция рассеянного поля в дальней зоне, определяющая распределение амплитуды и фазы отраженной волны вдали от препятствия,

$$\Phi(\theta,\varphi) = \frac{2}{k_0 R_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (-i)^{n+1} B_{nm} Y_{nm}(\theta,\varphi).$$

При проведении численных исследований решения анализировалось распределение по углам  $\theta$  и  $\varphi$  амплитуды рассеянного поля, поэтому расчеты выполнялись для функции

$$F(\theta,\varphi) = \frac{1}{k_0 R'} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (-i)^{n+1} B_{nm} Y_{nm}(\theta,\varphi) \right|, \tag{22}$$

где коэффициент 2 заменен на 1, поскольку нас интересует отражение одного тела;  $R' = R_1 + h$  — радиус исходного упругого препятствия.

В качестве функциональных зависимостей переменных параметров упругой среды в неоднородном слое препятствия рассматривались линейные функции, в которых независимой переменной выступает расстояние q от однородной части шара (например, для T  $q = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} - R_1$ )

$$f(q) = 1 + \alpha(2q/h - 1), \qquad g(q) = 1 + \beta(2q/h - 1).$$
 (23)

При этом функция f(q) принимают значения из интервала  $[1-|\alpha|, 1+|\alpha|]$ . В середине неоднородного слоя (q=0.5h) g(q)=f(q)=1.

Зависимость параметров материала неоднородного слоя от координат представлялась в виде

$$\rho = \rho' f(q), \qquad \lambda = \lambda' g(q), \qquad \mu = \mu' g(q),$$

где  $\rho', \lambda', \mu'$  — средние значения материального параметра по толщине слоя.

Рассматривалось препятствие, однородная часть которого представляла собой шар радиусом  $R_1$ , полость в котором имеет радиус  $R_2$  такой, что  $R_1/R_2 = 2$ . Толщина внешнего слоя h полагалась такой, что  $R_1/h = 4$ . Если не оговорено другое, то в представленных далее расчетах расстояние d установлено таким, что  $d/R_1 = 2$ .

Плотность и модули упругости в однородной эллипсоид части заданы так:  $\rho_1 = 2700 \text{ кг/м}^3$ ,  $\lambda_1 = 5.3 \cdot 10^{10} \text{ H/m}^2$ ,  $\mu_1 = 2.6 \cdot 10^{10} \text{ H/m}^2$ . В большей части экспериментов материальные свойства для внешнего слоя полагались равными:  $\rho' = \rho_1$ ,  $\lambda' = \lambda_1$ ,  $\mu' = \mu_1$ .

В качестве идеальной среды, заполняющей полупространство, использовалась жидкость с плотностью  $\rho_0=1000~{\rm kr/m^3}$  и скоростью звука  $c_0=1485~{\rm m/c}$ . Граница полупространства, занятого жидкостью полагалась абсолютно жесткой.

Частота падающей волны выбиралась такой, что  $k_0R'=3$ . Во всех, показанных далее расчетах,  $\theta_0=120^\circ$ ,  $\varphi_0=0$ . Для результатов, представленных на рис. 6–8 коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  в (23) равны 0.

На рис. 6 показано влияние на форм-функцию  $F(\theta,0)$  (см. (22)) наличия полости внутри шара. Пунктирной линией изображена диаграмма для случая, когда полость отсутствует, а сплошной – диаграмма в случае наличия полости с  $R_1/R_2=2$  и центром совпадающим с  $O_1$  (a=b=c=0).

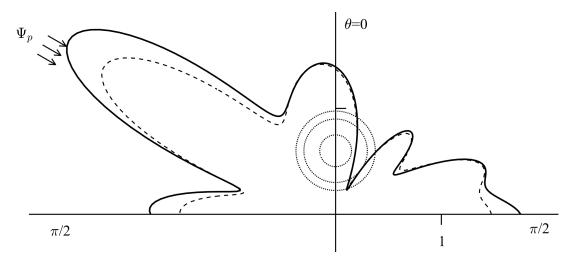


Рис. 6: Сравнение диаграммы  $F(\theta,0)$  со случаем отсутствия полости

Структура неоднородного шара на рисунке схематично представляется тремя окружностими близи начала координат, изображенными тонкой пунктирной линией. Эти окружности показывают центральные сечения поверхностей  $\Gamma_{11}$  – внешняя окружность;  $\Gamma_{1}$  – окружность среднего радиуса;  $\Gamma_{12}$  – малая окружность. Видно, что наличие полости приводит к увеличению коэффициента отражения в освещенной области и в лепестке диаграммы вблизи  $\theta = \pi/2$  теневой области.

Рис. 7 иллюстрирует влияние на процесс рассеяния положения полости относительно центра шара. Пунктирной линией изображена диаграмма для случая a=b=c=0, когда полость находится в центре. Сплошная линия представляет диаграмму для случая a=b=0, c=0.25a. Как видно, смещение полости приводит к увеличению максимумов в лепестках диаграммы  $F(\theta,0)$  на 5-7% во всех направлениях.

На рис. 8 показано влияние на форм-функцию  $F(\theta,\varphi)$  расстояния d до плоскости  $\Pi$ . Пунктирной линией, как и на рис. 7, изображена диаграмма для случая  $d/R_1=2$ , а сплошной линией показана диаграмма для случая  $d/R_1=2.5$ . Увеличение d приводит к существенным изменениям коэффициента отражения во всех направлениях. При этом минимумы диаграммы становятся более выраженными, а увеличение коэффициента отражения в максимумах составляет до 30%.

На рис. 9 показано влияние на форм-функцию  $F(\theta,0)$  неоднородности материала внеш-

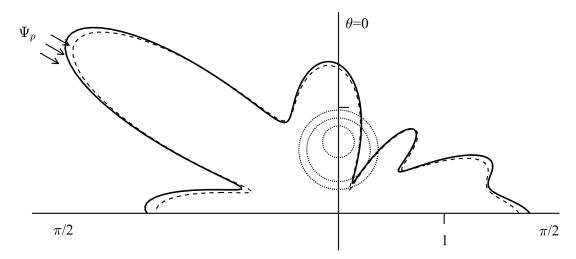


Рис. 7: Диаграмма  $F(\theta,0)$  при c/a=0.25

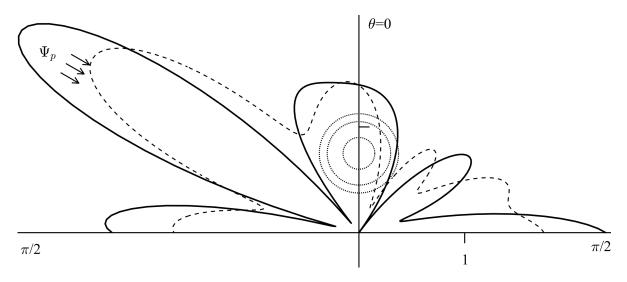


Рис. 8: Диаграмма  $F(\theta,0)$  при  $d/R_1 = 2.5$ 

него слоя шара при  $k_0R'=5$ . Пунктирной линией изображена диаграмма для случая, когда упругий материал всего тела T является однородным с параметрами  $\rho'=\rho_1, \lambda'=\lambda_1, \mu'=\mu_1$ .

Сплошной линией изображена диаграмма  $F(\theta,0)$  для случая, когда все параметры внешнего слоя являются переменными при  $\alpha=0.5,\,\beta=-0.5.$  В этом случае в пределах неоднородного слоя плотность увеличивается с ростом расстояния от поверхности  $\Gamma_1$ , а величина модулей упругости  $\lambda,\,\mu$  убывает. При такой неоднородности коэффициент отражения в направление, обратном направлению распространения волны, и при  $\theta$  в окрестности  $\pi/2$  практически не меняется. В большей части боковых лепестков коэффициент отражения уменьшается на 5-10%. И только в узком лепестке в окрестности  $\theta=70^\circ$  теневой области коэффициент отражения изменяется существенней, увеличиваясь в 2 раза. Заметим, рассмотренная неоднородность параметров внешнего слоя при  $k_0R'=3$  практически не влияет на характер рассеяния звука.

### 5. Заключение

Представленное решение показывает возможность использования метода конечных элементов для решения задач о рассеянии звука при достаточно сложных конфигураций упругих

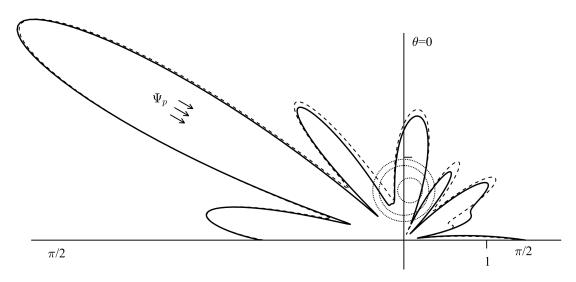


Рис. 9: Диаграмма  $F(\theta,0)$  для случая  $\alpha=0.5,\,\beta=-0.5$ 

рассеивающих объектов при наличии структурных неоднородностей и неоднородности материала препятствия.

Полученные результаты показывают, что при невысоких частотах звуковой волны структурные параметры задачи оказывают большее влияние на характер рассеянного поля, чем неоднородность упругой среды рассеивающего тела. Но при определенных сочетаниях зависимостей в изменении параметров в форм-функции рассеянного поля есть заметные изменения. Показано, что повышение частоты падающей волны приводит к более выраженным изменениям амплитуды рассеянного поля при изменении зависимостей в неоднородном покрытии шара.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Гвишиани А.Д., Жижин М.Н., Мостинский А.З., Тумаркин А.Г. Классификация сильных движений алгоритмами распознавания / Математические методы обработки геофизической информации. М.: ИФЗ АН СССР, 1986. С. 136-156.
- Bonnin J., Bottard S., Gvishiani A., Mohammadioun B., Zhizhin M. Classification of strong motion waveforms from different geological regions using syntactic pattern recognition scheme // Cahiers du Centre Europeen de Geodynamique et de Seismologie. 1992. V. 6. P. 33-42.
- 3. Gvishiani A., Dubois J. Artificial intelligence and dynamic systems for geophysical applications. Paris: Springer-Verlag, 2002. 350 p.
- Faran J.J. Sound scattering by solid cylinders and spheres // J. Acoust. Soc. Amer. 1951. V. 23. N 4. P. 405-420.
- Junger M.C. Sound scattering by thin elastic shells // J. Acoust. Soc. Amer. 1952. V. 24. N 4. P. 366-373.
- 6. Hasegawa T., Yosioka K. Acoustic-radiation force on a solid elastic sphere // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V. 46. N 5. Part 2. P. 1139-1143.
- 7. Плахов Д. Д., Саволайнен Г. Я. Дифракция сферической звуковой волны на упругой сферической оболочке // Акуст. журн. 1975. Т. 21. Вып. 5. С. 789-796.

- 8. Толоконников Л. А., Филатова Ю. М. Дифракция плоской звуковой волны на упругом шаре с произвольно расположенной сферической полостью // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2010. Вып. 1. С. 115-123.
- 9. Толоконников Л. А., Филатова Ю. М. О дифракции цилиндрической звуковой волны на упругом шаре с произвольно расположенной полостью // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2010. Вып. 2. С. 134-141.
- 10. Филатова Ю. М. О рассеянии звуковых волн упругим шаром с неконцентрической полостью // Материалы междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики". Тула: Изд-во ТулГУ, 2009. С. 295-296.
- 11. Филатова Ю. М. Рассеяние сферической звуковой волны упругим шаром с полостью // Вестник ТулГУ. Сер. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. 2010. Вып. 1. С. 87-92.
- 12. Harari I., Hughes T.J.R. Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems // Comp. Methods Appl. Mech. Eng. 1991. V. 87. P. 59-96.
- 13. Gan H., Levin P. L., Ludwig R. Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain // J. Acoust. Soc. Amer. 1993. V. 94. № 3, Pt. 1, P. 1651-1662.
- 14. Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company Inc., 2013. 226 p.
- 15. Скобельцын С. А. Подход к решению задач о рассеянии упругих волн с использованием МКЭ // Тез. докл. междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики" Тула: ТулГУ. 2004. С. 135–136.
- 16. Иванов В.И., Скобельцын С.А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2008. Вып. 2. С. 132-145.
- 17. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника. 1968. 584 с.
- 18. Клещев А. А. Рассеяние звука сфероидальными телами, находящимися у границы раздела сред // Акуст. журн. 1977. Т. 23, Вып. 3. С. 404-410.
- 19. Gaunaurd J. C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // J. Acoust. Soc. Amer. 1994. V. 96, N 6. P. 2526-2536.
- 20. Толоконников Л. А, Логвинова А. Л. Дифракция плоской звуковой волны на двух неоднородных цилиндрах с жесткими включениями // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 1. С. 54-66.
- 21. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии подстилающей поверхности // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2015. Вып. 2. С. 64-75.
- 22. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
- 23. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.
- 24. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.

#### REFERENCES

- 1. Gvishiani, A. D., Zhizhin, M. N., Mostinskii, A. Z. & Tumarkin, A. G. 1986, "Classifikatciia sil'ny'kh dvizhenii' algoritmami raspoznavaniia", *Matematicheskie metody' obrabotki geofizicheskoi' informatcii*, M.: IFZ AN USSR, pp. 136-156.
- 2. Bonnin, J., Bottard, S., Gvishiani, A., Mohammadioun B. & Zhizhin, M. 1992, "Classification of strong motion waveforms from different geological regions using syntactic pattern recognition scheme", Cahiers du Centre Europeen de Geodynamique et de Seismologie, vol. 6, pp. 33-42.
- 3. Gvishiani A. & Dubois J. 2002, "Artificial intelligence and dynamic systems for geophysical applications", Springer-Verlag, Paris, 350 p.
- 4. Faran J.J. 1951, "Sound scattering by solid cylinders and spheres", J. Acoust. Soc. Amer., vol. 23, no 4, pp. 405-420.
- 5. Junger M.C. 1952, "Sound scattering by thin elastic shells", J. Acoust. Soc. Amer., vol. 24, no 4, pp. 226-373.
- 6. Hasegawa, T. & Yosioka, K. 1969, "Acoustic-radiation force on a solid elastic sphere", J. Acoust. Soc. Amer., vol. 46, no 5, part 2, pp. 1139-1143.
- 7. Plahov, D. D. & Savolai'nen, G. Y. 1975, "Difraktciia sfericheskoi' zvukovoi' volny' na uprugoi' sfericheskoi' obolochke", Akust. Zhurnal, vol. 21, no 5, pp. 789-796.
- 8. Tolokonnikov, L. A. & Filatova, U. M. 2010, "Difraktciia ploskoi' zvukovoi' volny' na uprugom share s proizvol'no raspolozhennoi' sfericheskoi' polost'iu", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 1, pp. 115-123.
- 9. Tolokonnikov, L. A. & Filatova, U. M. 2010, "O difraktcii tcilindricheskoi' zvukovoi' volny' na uprugom share s proizvol'no raspolozhennoi' polost'iu", *Izv. Tul. Gos. Univ.*, *Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 134-141.
- 10. Filatova, U.M. 2009, "O rasseianii zvukovy'kh voln uprugim sharom s nekoncentricheskoi' polost'iu", Materialy' mezhdunar. nauchn. konf. "Sovremenny'e problemy' matematiki, mehaniki, informatiki", Tul. Gos. Univ., Tula, pp. 295-296.
- 11. Filatova, U. M. 2010, "Рассеяние сферической звуковой волны упругим шаром с полостью", Vestnik Tul. Gos. Univ., Ser. Differentcial ny e uravneniia i pricladny e zadachi., no 1, pp. 87-92.
- 12. Harari, I. & Hughes, T.J.R. 1991, "Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems", Comp. Methods Appl. Mech. Eng. vol. 87, pp. 59-96.
- 13. Gan, H., Levin, P. L. & Ludwig, R. 1993, "Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain", *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 94, no 3, pt. 1, pp. 1651-1662.
- 14. Ihlenburg, F. 2013, "Finite element analysis of acoustic scattering", Springer Publishing Company Inc., New York, 226 p.
- 15. Skobel'tsyn, S.A. 2004, "Approach to solving problems on the scattering of elastic waves using FEM", Tez. doc. Intern. scientific. Conf. "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science", Tul. Gos. Univ., Tula, pp. 135-136.

- 16. Ivanov, V.I. & Skobel'tsyn, S.A. 2008, "Modeling solutions to acoustics using FEM", *Izv. Tul. Gos. Univ.*, Ser. Estestv. Nauki, no 2, pp. 132-145.
- 17. Ivanov, E. A. 1968, "Diffraction of electromagnetic waves by two bodies", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p.
- 18. Kleshchev, A. A. 1977, "Scattering of sound by spheroidal bodies located at the interface between media" Akust. Zhurnal, vol. 23, no. 3, pp. 404-410.
- 19. Gaunaurd, J. C. & Huang, H. 1994, "Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary", J. Acoust. Soc. Amer., vol. 96, no 6, pp. 2526-2536.
- 20. Tolokonnikov, L. A. & Logvinova, A. L. 2015, "Diffraction of a plane sound wave on two non-uniform cylinders with rigid inserts", *Izv. Tul. Gos. Univ.*, Ser. Estestv. Nauki, no 1, pp. 54-66.
- 21. Skobel'tsyn, S.A. & Tolokonnikov, L.A. 2015, "Diffraction of a plane sound wave on an elastic spheroid with an inhomogeneous coating in the presence of an underlying surface", *Izv. Tul. Gos. Univ.*, Ser. Estestv. Nauki, no 2, pp. 64-75.
- 22. Isakovich, M.A. 1973, "General acoustics", Nauka, Moscow, 496 p.
- 23. Skudryzk, E.F. 1971, "The Foundations Acoustic", Springer-Verlag, New York, 542 p.
- 24. Nowacki, W. 1975, "Teoria sprezystosci", Mir, Moscow, 872 p.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018