ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 4

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-118-176

О классических теоретико-числовых сетках[1,2]

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, декан механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.
e-mail: chubarik2009@live.ru
Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Добровольский Михаил Николаевич — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Геофизический центр РАН.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Добровольский Николай Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе рассмотрена гиперболическая дзета-функция сеток с весами и распределение значений погрешности приближенного интегрирования при модификациях сеток.

Рассмотрены: параллелепипедальные сетки $M(\vec{a},p)$, состоящие из точек

$$M_k=\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)\qquad(k=1,2,\ldots,p);$$

неравномерные сетки $M(P)$, координаты точек которых выражаются через степенные функции по модулю P:

$$M_k=\left(\left\{\frac{k}{P}\right\},\left\{\frac{k^2}{P}\right\}\ldots,\left\{\frac{k^s}{P}\right\}\right)\qquad(k=1,2,\ldots,P),$$

где $P=p$ или $P=p^2$ и p — нечетное простое число;

обобщенные равномерные сетки $M(\vec{n})$ из $N=n_1\cdot\ldots\cdot n_s$ точек вида

$$M_{\vec{k}}=\left(\left\{\frac{k_1}{n_1}\right\},\left\{\frac{k_2}{n_2}\right\}\ldots,\left\{\frac{k_s}{n_s}\right\}\right)\quad(k_j=1,2,\ldots,n_j\,(j=1,\ldots,s));$$

алгебраические сетки, введённые К. К. Фроловым в 1976 г., и обобщенные параллелепипедальные сетки, изучение которых началось в 1984 г..

[1]Работа подготовлена по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а
[2]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №16-01-00-071

Кроме этого, в обзорном порядке рассмотрены p-ичные сетки: сетки Хэммерсли, Холтона, Фора, Соболя и Смоляка.

В заключении рассмотрены актуальные проблемы применения теоретико-числового метода в геофизике, требующие дальнейшего исследования.

Ключевые слова: гиперболическая дзета-функция сеток с весами, классические теоретико-числовые сетки.

Библиография: 48 названий.

Для цитирования:
И. Ю. Реброва, В. Н. Чубариков, Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. О классических теоретико-числовых сетках // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 4, С. 118–176.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 4

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-118-176

On classical number-theoretic nets

Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of mathematical and computer methods of analysis, dean of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik2009@live.ru
Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University.
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Dobrovolsky Mikhail Nikolaevich — candidate of candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher, Geophysical centre of RAS.
e-mail: m.dobrovolsky@gcras.ru
Dobrovolsky Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

The paper considers the hyperbolic Zeta function of nets with weights and the distribution of error values of approximate integration with modifications of nets.

Considered: parallelepipedal nets $M(\vec{a},p)$, consisting of points

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \qquad (k=1,2,\dots,p);$$

non-uniform nets $M(P)$, the coordinates of which are expressed via power functions modulo P:

$$M_k = \left(\left\{\frac{k}{P}\right\},\left\{\frac{k^2}{P}\right\}\dots,\left\{\frac{k^s}{P}\right\}\right) \qquad (k=1,2,\dots,P),$$

where $P = p$ or $P = p^2$ and p — odd prime number;

generalized uniform nets $M(\vec{n})$ of $N = n_1 \cdot \ldots \cdot n_s$ points of the form

$$M_{\vec{k}} = \left(\left\{\frac{k_1}{n_1}\right\}, \left\{\frac{k_2}{n_2}\right\} \ldots, \left\{\frac{k_s}{n_s}\right\}\right) \quad (k_j = 1, 2, \ldots, n_j\, (j = 1, \ldots, s));$$

algebraic nets introduced by K. K. Frolov in 1976 and generalized parallelepipedal nets, the study of which began in 1984.

In addition, the review of p-nets is considered: Hammersley, Halton, Faure, Sobol, and Smolyak nets.

In conclusion, the current problems of applying the number-theoretic method in geophysics are considered, which require further study.

Keywords: hyperbolic Zeta function of nets with weights, classical number-theoretic nets.

Bibliography: 48 titles.

For citation:

I. Yu. Rebrova, V. N. Chubarikov, N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, 2018, "On classical number-theoretic nets" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 118–176.

Посвящается 70-летию академика РАН,
профессора Алексея Джерменовича Гвишиани

1. Введение 121
1.1 Тригонометрические суммы сеток и решёток 122
1.2 Классы периодических функций 125
1.3 Суммы по гиперболическому кресту 127
1.4 Оценки норм 127
1.5 Квадратурные формулы 128
2. Алгоритмы приближенного интегрирования с правилом остановки 131
3. Оператор взвешенных сеточных средних 134
4. Случайные величины и многомерные квадратурные формулы 136
5. Разбиение Коробова 140
6. Первый, второй и третий гиперболические параметры сеток 142
7. Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток 145
8. Обобщенные равномерные сетки 145
9. Обобщенные неравномерные сетки 147
10. Параллелепипедальные сетки 148
11. Комбинированные сетки 150
12. Алгебраические сетки 152
13. Обобщенные параллелепипедальные сетки 153
14. Равномерное распределение, регулярные сетки 154
14.1 Функция ван дер Корпута — Хэммерсли и функции Ченя 156
14.2 Сетки Хэммерсли 158
14.3 Сетки Холтона 159
14.4 Сетки Фора 160
14.5 Сетки Соболя 161
14.6 Сетки Смоляка 165
15. Заключение 170
Список цитированной литературы 171
REFERENCES 174

1. Введение

В большой обзорной статье [7] было указано, что теоретико-числовой метод в приближенном анализе был создан в связи с разработкой отечественного атомного проекта, когда остро стояли задачи решения многомерных математических проблем, возникавших при осуществлении физических расчетов и моделировании физических процессов.

На наш взгляд, развитие теоретико-числового метода в приближенном анализе может получить дополнительный импульс, если специалисты по геофизики будут использовать в своей работе достижения теоретико-числового метода в приближенном анализе. На такую возможность указывают работы [30, 31].

В 1956 — 1960 годах при создании теоретико-числового метода в приближенном анализе Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций E_s^α $(\alpha > 1)$ с быстро убывающими коэффициентами Фурье, состоящий из функций $f(x_1, \ldots, x_s)$, имеющих по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_s$ период, равный единице, и для которых их ряды Фурье

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s) e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \tag{1}$$

удовлетворяют условиям

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \tag{2}$$

где константа C не зависит от $m_1, \ldots, m_s$, и для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$. Ясно, что такие ряды Фурье сходятся абсолютно, а поэтому для любого $(\alpha > 1)$ они представляют непрерывные функции.

Более подробно о классах периодических функций говорится далее в разделе 1.2 (см. стр. 125).

Рассмотрение классов периодических функций в теоретико-числовом методе в приближенном анализе не является случайным. Дело в том, что особая роль теории чисел в вопросах интегрирования периодических функций была выявлена ещё сто лет тому назад в знаменитой работе Г. Вейля [48], с которой начинается теория равномерного распределения по модулю 1, и в которой получил общее развитие метод тригонометрических сумм, возникший в работах К. Ф. Гаусса ещё в 1811 г. (см. [6], стр. 594). Фактически интегральный критерий Г. Вейля, доказанный сто лет тому назад, является предшественником теоретико-числового метода Н. М. Коробова в приближенном анализе, который начал создаваться на семинаре **трёх К** в 1956 году через 40 лет после работы Г. Вейля.

Позднее Н. Н. Ченцов, один из трёх руководителей семинара **трёх К**, предложил метод периодизации задач численного интегрирования, который позволил расширить класс функций, для которых можно применять методы теории чисел. С этими методами можно ознакомиться по монографиям [26], [28] и работе [17].

В этот же период появились и другие теоретико-числовые сетки: в 1960 г. сетки Хэммерсли [43] и сетки Холтона [42], в 1963 г. сетки Смоляка [33], в 1966 г. ЛП$_\tau$ сетки Соболя. Несколько позднее в 1982 г. появились сетки Фора [41]. Все эти сетки относятся к классу регулярных p-ичных сеток и дают рекордные характеристики равномерного распределения. Более подробно об этом будет сказано в разделе 14.

Цель данной статьи рассмотреть гиперболическую дзета-функцию сеток с весами, оценить распределение значений погрешности приближенного интегрирования при модификациях сеток и применить его для произведения некоторых типов сеток.

Будут рассмотрены: параллелепипедальные сетки $M(\vec{a}, p)$, состоящие из точек

$$M_k = \left(\left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\}, \ldots, \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p); \tag{3}$$

неравномерные сетки $M(P)$, координаты точек которых выражаются через степенные функции по модулю P:

$$M_k = \left(\left\{\frac{k}{P}\right\}, \left\{\frac{k^2}{P}\right\} \dots, \left\{\frac{k^s}{P}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \dots, P), \tag{4}$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число;

обобщенные равномерные сетки $M(\vec{n})$ из $N = n_1 \cdot \ldots \cdot n_s$ точек вида

$$M_{\vec{k}} = \left(\left\{\frac{k_1}{n_1}\right\}, \left\{\frac{k_2}{n_2}\right\} \dots, \left\{\frac{k_s}{n_s}\right\}\right) \quad (k_j = 1, 2, \dots, n_j\, (j = 1, \dots, s)); \tag{5}$$

алгебраические сетки, введённые К. К. Фроловым в 1976 г. [36], и обобщенные параллелепипедальные сетки, определение которых будет дано позднее, изучение которых началось в 1984 г. [16], [17];

кроме этого мы в обзорном порядке рассмотрим и p-ичные сетки, которые требуют отдельного изучения.

Так как цель данной работы — дать представление о возможностях классических теоретико-числовых сеток, то доказательства всех теорем и лемм опускаются.

1.1. Тригонометрические суммы сеток и решёток

При изучении вопросов приближенного интегрирования и интерполирования периодических функций многих переменных естественным образом возникают тригонометрические суммы. Приведем несколько необходимых определений и результатов из работ [12], [15] и [17].

Через $G_s = [0; 1)^s$ будем обозначать полуоткрытый s-мерный единичный куб. Под сеткой мы понимаем произвольное непустое конечное множество M из G_s. Под сеткой с весами будем понимать упорядоченную пару (M, ρ), где ρ —произвольная числовая функция на M. Для удобства будем отождествлять сетку M с упорядоченной парой $(M, 1)$, то есть с сеткой с единичными весами $\rho \equiv 1$.

Определение 1. *Произведением двух сеток с весами (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) из G_s называется сетка с весами (M, ρ):*

$$M = \{\, \{\vec{x} + \vec{y}\} \,|\, \vec{x} \in M_1,\, \vec{y} \in M_2 \,\}, \quad \rho(\vec{z}) = \sum_{\substack{\{\vec{x}+\vec{y}\} = \vec{z},\\ \vec{x} \in M_1,\, \vec{y} \in M_2}} \rho_1(\vec{x})\rho_2(\vec{y}),$$

где $\{\vec{z}\} = (\{z_1\}, \dots, \{z_s\})$.

Произведение сеток с весами (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) обозначается через

$$(M_1, \rho_1) \cdot (M_2, \rho_2).$$

Кроме этого, если $(M, \rho) = (M_1, \rho_1) \cdot (M_2, \rho_2)$, то будем писать $M = M_1 \cdot M_2$ и говорить, что сетка M — произведение сеток M_1 и M_2.

Определение 2. *Тригонометрической суммой сетки с весами (M, ρ) для произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется выражение*

$$S(\vec{m}, (M, \rho)) = \sum_{\vec{x} \in M} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \tag{6}$$

а нормированной тригонометрической суммой сетки с весами —

$$S^*(\vec{m}, (M, \rho)) = \frac{1}{|M|} S(\vec{m}, (M, \rho)).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{|M|} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*(\vec{m},(M,\rho))| \leqslant \frac{1}{|M|}\rho(M).$$

Легко видеть, что для любых сеток с весами (M_1,ρ_1) и (M_2,ρ_2) справедливо равенство

$$S(\vec{m},(M_1,\rho_1)\cdot(M_2,\rho_2)) = S(\vec{m},(M_1,\rho_1))\cdot S(\vec{m},(M_2,\rho_2)). \tag{7}$$

Определение 3. *Если справедливо равенство*

$$(M_1,1)\cdot(M_2,1) = (M,1),$$

то сетки M_1 и M_2 называются взаимно простыми.

Таким образом, если M_1 и M_2 — взаимно простые сетки, то равенство $\vec{z} = = \{\vec{x}+\vec{y}\}$ имеет не более одного решения для $\vec{x}\in M_1$ и $\vec{y}\in M_2$. Поэтому для взаимно простых сеток и только для них справедливо равенство $|M_1\cdot M_2| = = |M_1|\cdot|M_2|$.

При $\rho\equiv 1$ приходим к определению тригонометрической суммы сетки.

Определение 4. *Тригонометрической суммой сетки M для произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется величина*

$$S(\vec{m},M) = \sum_{\vec{x}\in M} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

а нормированной тригонометрической суммой сетки —

$$S^*(\vec{m},M) = \frac{1}{|M|}S(\vec{m},M).$$

Легко видеть, что для любых взаимно простых сеток M_1 и M_2 справедливо равенство

$$S(\vec{m},M_1\cdot M_2) = S(\vec{m},M_1)\cdot S(\vec{m},M_2). \tag{8}$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\}\in G_s$. Целой частью вектора называется вектор $[\vec{x}] = \vec{x}-\{\vec{x}\}$. Через $p(\vec{x}) = \left[\vec{x}+\left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)\right]$ обозначим ближайший целый вектор в смысле нормы $\|\vec{x}\|_1 = = \max(|x_1|,\ldots,|x_s|)$. Для нормы вектора отклонения от ближайшего целого $\delta(\vec{x})$, заданного равенством

$$\delta(\vec{x}) = p(\vec{x})-\vec{x} = \left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right) - \left\{\vec{x}+\left(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right)\right\},$$

справедливо неравенство $\|\delta(\vec{x})\|_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda\subset\mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1+\ldots+m_s\vec{\lambda}_s = \vec{m}\cdot A\,|\,\vec{m} = (m_1,\ldots,m_s)\in\mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1},\ldots,\lambda_{1\,s}),\ldots,\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1},\ldots,\lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{\lambda}_1\\ \vdots\\ \vec{\lambda}_s\end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x}\,|\,\forall\vec{y}\in\Lambda\ (\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{Z}\}$.

Определение 5. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Рассмотрим для произвольной целочисленной решётки Λ, целого вектора $\vec{m}$ и произвольного вектора $\vec{x}$ из взаимной решётки Λ^* величины:

$$\delta_\Lambda(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \vec{m} \in \Lambda, \\ 0, & \text{если} \quad \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda, \end{cases} \qquad \delta^*_\Lambda(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \vec{x} \in \mathbb{Z}^s, \\ 0, & \text{если} \quad \vec{x} \in \Lambda^* \setminus \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Символ $\delta_\Lambda(\vec{m})$ является многомерным обобщением известного теоретико-числового символа Коробова

$$\delta_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m \equiv 0 \pmod N, \\ 0, & \text{если} \quad m \not\equiv 0 \pmod N. \end{cases}$$

Для целочисленной решётки Λ её обобщенная параллелепипедальная сетка $M(\Lambda)$ является полной системой вычетов взаимной решётки Λ^* по фундаментальной подрешётке $\mathbb{Z}^s$. Отсюда следует равенсто $|M(\Lambda)| = \det \Lambda$.

Определение 6. *Полной линейной кратной тригонометрической суммой целочисленной решетки Λ называется выражение*

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \sum_{\vec{x} \in M(\Lambda)} e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda^*/\mathbb{Z}^s} e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})},$$

где $\vec{m}$ — произвольный целочисленный вектор.

Ясно, что для обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ справедливо равенство $S(\vec{m}, M(\Lambda)) = s(\vec{m}, \Lambda)$.

Определение 7. *Полной линейной кратной тригонометрической суммой взаимной решетки Λ^* целочисленной решетки Λ называется выражение*

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s/\Lambda} e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})} = \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i (\vec{m}_j, \vec{x})},$$

где $\vec{x}$ — произвольный вектор взаимной решетки Λ^* и $\vec{m}_0, \ldots, \vec{m}_{N-1}$ – полная система вычетов решетки $\mathbb{Z}^s$ по подрешетке Λ.

Справедливы следующие двойственные утверждения.

Теорема 1. *Для $s(\vec{m}, \Lambda)$ справедливо равенство*

$$s(\vec{m}, \Lambda) = \delta_\Lambda(\vec{m}) \cdot \det \Lambda.$$

Теорема 2. *Для любой целочисленной решетки Λ с $\det \Lambda = N$ и для произвольного $\vec{x} \in \Lambda^*$ справедливо равенство*

$$s^*(\vec{x}, \Lambda) = \delta^*_\Lambda(\vec{x}) \cdot \det \Lambda.$$

1.2. Классы периодических функций

Рассмотрим класс $\mathfrak{A}_s$ всех периодических функций $f(\vec{x})$ с периодом 1 по каждой переменной, у которых их ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \quad C(\vec{m}) = \int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 f(\vec{x})e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{x})}d\vec{x}$$

абсолютно сходится. Пространство $\mathfrak{A}_s$ относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |C(\vec{m})| < \infty$$

является сепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_1 — всех абсолютно суммируемых комплексно-значных последовательностей (см. [20]).

Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций $E_s^\alpha(C)$ $(\alpha > 1)$ с быстро убывающими коэффициентами Фурье. Через $E_s^\alpha(C)$ обозначается множество функций из E_s^α с нормой, не превосходящей C, то есть шар в банаховом пространстве E_s^α радиуса C с центром в нуле.

Банахово пространство периодических функций $E_s^\alpha \subset \mathfrak{A}_s$ состоит из функций $f(x_1,\ldots,x_s)$, у которых для коэффициентов Фурье выполняется оценка[3]

$$C(\vec{m}) = O\left(\frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\right).$$

Таким образом, эти функции удовлетворяют условиям

$$\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |C(m_1,\ldots,m_s)|(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha = \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} < \infty. \tag{9}$$

Ясно, что для этих функций ряды Фурье сходятся абсолютно, так как

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}(1 + 2\zeta(\alpha))^s,$$

а поэтому для любого $\alpha > 1$ они представляют непрерывные функции. Здесь и далее, как обычно, $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана.

Усеченной нормой вектора называется величина $q(\vec{x}) = \overline{x}_1\ldots\overline{x}_s$, где для вещественного x обозначаем $\overline{x} = \max(1,|x|)$. Усеченной норменной поверхностью с параметром $t \geqslant 1$ называется множество $N_s(t) = \{\vec{x}|q(\vec{x}) = t,\ \vec{x} \neq \vec{0}\}$, которое является границей гиперболического креста $K_s(t)$, заданного соотношениями $K_s(t) = \{\vec{x}|q(\vec{x}) \leqslant t\}$. Для натурального t на усеченной норменной поверхности имеется $\tau_s^*(t)$ целых ненулевых точек, где [4]

$$\tau_s^*(t) = {\sum_{\vec{m}\in N_s(t)}}' 1 \tag{10}$$

— число представлений натурального числа t в виде $t = \overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_s$.

Используя новые обозначения, можно написать другое выражение для нормы $||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha}$. Справедливо равенство

$$||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha} = \max\left(|C(\vec{0})|, \sup_{t\in\mathbb{N}}\left(t^\alpha\cdot\max_{\vec{m}\in N(t)}|C(\vec{m})|\right)\right).$$

[3]Здесь и далее для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1,|m|)$. Таким образом, величину $\overline{m}$ можно назвать усеченной нормой числа m, что согласуется с понятием усеченной нормы вектора, о которой речь пойдет дальше.

[4]Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1,\ldots,m_s) \neq (0,\ldots,0)$.

Нетрудно видеть, что произвольная периодическая функция $f(\vec{x})$ из $E_s^\alpha(C)$ по модулю ограничена величиной $C\cdot(1+2\zeta(\alpha))^s$, при этом данная оценка достижима на функции

$$f(\vec{x})=\sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty}\frac{C\cdot e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}}{(\overline{m}_1\cdot\ldots\cdot\overline{m}_s)^\alpha}$$

в точке $\vec{x}=\vec{0}$.

Очевидно, что $E_s^\alpha(C)\subset E_s^\beta(C)$ при $\alpha\geqslant\beta$. Для любой периодической функции $f(\vec{x})\in E_s^\alpha(C)\subset E_s^\beta(C)$ справедливо неравенство для норм

$$||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha}\geqslant||f(\vec{x})||_{E_s^\beta}.$$

Равенство достигается только для конечных тригонометрических многочленов вида

$$f(\vec{x})=\sum_{\vec{m}\in N(1)}C(\vec{m})\,e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

На классе E_s^α рассмотрим эквивалентную норму:

$$||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha,C_1}=\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}|C(\vec{m})|(\overline{C_1m}_1\ldots\overline{C_1m}_s)^\alpha. \tag{11}$$

Пространства E_s^α и $E_s^\alpha(\cdot,C_1)$ — несепарабельные банаховы пространства, изоморфные пространству $l_{s,\infty}$ — ограниченных комплекснозначных функций на фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$, которое в силу счётности $\mathbb{Z}^s$ изоморфно пространству l_∞ — ограниченных последовательностей комплексных чисел.

Действительно, этот изоморфизм нормированных пространств E_s^α и $l_{s,\infty}$ задается равенствами для коэффициентов Фурье

$$C(\vec{m})=\frac{c(\vec{m})}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha},\ \vec{m}\in\mathbb{Z}^s,\quad ||c(\vec{m})||_\infty=\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}|c(m_1,\ldots,m_s)|<\infty.$$

Шар радиуса $C>0$ в пространстве $E_s^\alpha(\cdot,C_1)$ с нормой (11) обозначают через $E_s^\alpha(C,C_1)$.

О свойствах класса $E_s^\alpha(C)$ подробно можно узнать в [26] и [28] (так же см. [20]).

Для дальнейшего мы будем рассматривать класс $E_s=\bigcup\limits_{\alpha>1}E_s^\alpha$. Очевидно $E_s\subset\mathfrak{A}_s$. Ясно, что класс E_s незамкнут в пространстве $\mathfrak{A}_s$ относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{l_1}$, но является всюду плотным множеством.

Наряду с нормой (9) рассмотрим нормы

$$||f(\vec{x})||_C=\sup_{\vec{x}\in G_s}|f(\vec{x})| \tag{12}$$

и

$$||f(\vec{x})||_{l_1}=\sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty}|c(\vec{m})|,\quad ||f(\vec{x})||_{l_2}=\left(\sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty}|c(\vec{m})|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Относительно норм (12) и (13) класс E_s^α становится незамкнутым линейным подмногообразием пространств непрерывных периодических функций и периодических функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье соответственно (см. [20]).

Нетрудно видеть, что справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered}||f(\vec{x})||_{l_2}\leqslant||f(\vec{x})||_C,\quad ||f(\vec{x})||_C\leqslant||f(\vec{x})||_{l_1},\\ ||f(\vec{x})||_{l_1}\leqslant||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(\alpha))^s.\end{gathered} \tag{14}$$

Последнее неравенство (14) можно уточнить при дополнительном ограничении, что $C(\vec{m})=0$ при $\vec{m}\in K(t)$. Предварительно сформулируем несколько лемм из работ [10, 9].

1.3. Суммы по гиперболическому кресту

Для натурального $t > 1$ положим:

$$A_j(t) = \sum_{m_1 \ldots m_j > t} \frac{1}{(m_1 \ldots m_j)^\alpha} \quad (\alpha > 1), \tag{15}$$

$$B_j(t) = \sum_{m_1 \ldots m_j \leqslant t} 1, \quad C_j(t) = \sum_{m_1 \ldots m_j \leqslant t} \frac{1}{m_1 \ldots m_j}, \tag{16}$$

суммирование проводится только по натуральным $m_1, \ldots, m_j$.

Так как t – натуральное, то

$$A_1(t) = \sum_{m>t} \frac{1}{m^\alpha} < \int\limits_t^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}, \quad B_1(t) = t, \quad C_1(t) \leqslant \ln t + 1. \tag{17}$$

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$C_j(t) \leqslant \sum_{k=0}^{j} \frac{C_j^k \ln^k t}{k!}. \tag{18}$$

Лемма 2. *Справедливо неравенство*

$$B_j(t) \leqslant t \sum_{k=0}^{j-1} \frac{C_{j-1}^k \ln^k t}{k!}. \tag{19}$$

В работе [9] доказана следующая оценка, которая является уточнением известной леммы из книги Н. М. Коробова [26] (см. с. 125, лемма 28).

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$A_j(t) \leqslant \frac{1}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{\ln^{j-1} t}{(\alpha-1)(j-1)!} + \sum_{m=0}^{j-2} \frac{\ln^m t}{m!} \left(\sum_{k=m}^{j-2} \zeta(\alpha)^{j-2-k} C_k^m \frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1} + \frac{C_{j-1}^m}{\alpha-1} \right) \right). \tag{20}$$

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$|KZ_s(t)| \leqslant \frac{2^s}{(s-1)!} t \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1. \tag{21}$$

Теорема 4. *Справедливо неравенство*

$$|KZ_s(t)| \geqslant t \frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!} + t(1 - (-1)^s) + (-1)^s. \tag{22}$$

1.4. Оценки норм

Теорема 5. *Пусть натуральное $t > 1$ и разложение периодической функции $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ имеет вид:*

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m} \notin K_s(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})}. \tag{23}$$

Справедливо неравенство

$$||f(\vec{x})||_{l_1} \leqslant \frac{||f(\vec{x})||_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s \ln^{s-1} t}{(s-1)!(\alpha-1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{s-2} \frac{\ln^m t}{m!} \sum_{k=m}^{s-1} \frac{C_k^m}{\zeta(\alpha)^k} \left(\sum_{j=k+2}^{s} C_s^j 2^j \zeta(\alpha)^{j-2} + \sum_{j=k+1}^{s} C_s^j 2^j \frac{\zeta(\alpha)^{j-1}}{\alpha-1} \right) \right). \tag{24}$$

Рассмотрим для любого натурального t конечномерное подпространство $P^{(t)}$ всех тригонометрических полиномов вида:

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in K_s(t)} c(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}. \tag{25}$$

Тригонометрический полином

$$f_0(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in K_s(t)} e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \tag{26}$$

очевидно, имеет следующие нормы:

$$\|f_0(\vec{x})\|_{l_0} = \sup_{\vec{m}\in|K_s(t)|} |c(\vec{m})| = 1, \quad \|f_0(\vec{x})\|_C = |KZ_s(t)|,$$
$$\|f_0(\vec{x})\|_{l_1} = |KZ_s(t)|, \quad \|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = t^\alpha. \tag{27}$$

Из теоремы 3 и равенств (27) вытекает, что

$$\|f_0(\vec{x})\|_{l_0} = \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^\alpha},$$
$$\|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} \leqslant \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \left(\ln t + \frac{3s}{2} \right)^{s-1} + 1 \right). \tag{28}$$

Из оценки снизу (22) и равенства (27) следует оценка снизу для норм:

$$\|f_0(\vec{x})\|_C = \|f_0(\vec{x})\|_{l_1} \geqslant \frac{\|f_0(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}}{t^{\alpha-1}} \left(\frac{2^s}{(s-1)!} \ln^{s-1} t + 1 + (-1)^{s-1} + \frac{(-1)^s}{t} \right). \tag{29}$$

Таким образом, оценка сверху (28) и оценка снизу (29) совпадают по порядку относительно t.

1.5. Квадратурные формулы

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - R_N[f]. \tag{30}$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s$$

средним взвешенным значением функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1 \ldots N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [8]). [5]

[5] Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

Теорема 6. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$

$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \qquad (31)$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда, и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

Из этой теоремы непосредственно следует, что для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования $R_N[f]$ на классе $\mathfrak{A}_s$ справедливо равенство

$$\|R_N[\cdot]\|_{\mathfrak{A}_s} = \max\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|, \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\vec{0}\}} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|\right). \qquad (32)$$

Анализ формулы (32) позволяет сделать вывод, что класс $\mathfrak{A}_s$ слишком широк для рассмотрения вопросов о скорости сходимости погрешности квадратурной формулы к нулю. Как показали Н. М. Коробов и его последователи уже на классе E_s^α этот вопрос становится содержательным.

Обобщая работу [22], в работе [8] дано следующее определение дзета-функции сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geqslant 1$.

Определение 8. *Дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ и параметром $p \geqslant \geqslant 1$ называется функция $\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha = \sigma + it$ ($\sigma > 1$) рядом Дирихле*

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S^*(p, M, \vec{\rho}, n)}{n^\alpha}, \qquad (33)$$

где

$$S^*(p, M, \vec{\rho}, n) = \sum_{\vec{m}\in N(n)} |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p. \qquad (34)$$

Непосредственно из определения следует неравенство

$$\zeta(p\alpha, p|M, \vec{\rho}) \leqslant \zeta^p(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \quad (\alpha > 1). \qquad (35)$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто дзета-функция сетки M с параметром p и писать $\zeta(\alpha, p|M)$.

Справедливы две обобщенные теоремы Коробова о погрешности квадратурных формул — это теорема 6 (см. стр. 129) и следующая теорема:

Теорема 7. *Если $f(x_1, \ldots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]| \leq C\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{C}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} =$$

$$= C\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + C\cdot\zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}), \qquad (36)$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (6). На классе $E_s^\alpha(C)$ эту оценку нельзя улучшить.

Другими словами теорему 7 можно сформулировать так:

Для нормы $\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (30) справедливо равенство

$$\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha} = \left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} =$$
$$= \left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \tag{37}$$

Если рассмотреть класс $E_s^{\alpha,q}$ с нормой

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}} = \left(|C(\vec{0})|^q + \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(\vec{m})|^q(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{\frac{q\alpha}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Если $f(\vec{x}) \in E_s^{\alpha,q}$ и $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]| \le$$
$$\leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}}\left(\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \frac{1}{N^p}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \|f(\vec{x})\|_{E_s^{\alpha,q}}\left(\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|^p + \zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho})\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{38}$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (6). На классе $E_s^{\alpha,q}$ эту оценку нельзя улучшить.

Из теорем 7 и 8 следует, что на классах E_s^α и $E_s^{\alpha,q}$ оценка погрешности приближенного интегрирования сводится к оценке гиперболической дзета-функции сеток. Проводя аналогию с гиперболической дзета-функцией решетки, которая равна гиперболической дзета-функции сеток в случае параллелепипедальной сетки, можно высказать гипотезу, что для гиперболической дзета-функции сеток должен быть справедлив аналог теоремы Бахвалова об оценке гиперболической дзета-функцией решетки через гиперболический параметр решетки.

Цель разделов 6 и 7 — ввести понятие гиперболических параметров сетки и доказать аналог теоремы Бахвалова для гиперболической дзета-функции сеток.

Модифицированной сеткой $M(\vec{\beta})$ будем называть сетку, состоящую из модифицированных узлов

$$M_k(\vec{\beta}) = (\{\xi_1(k)+\beta_1\}, \ldots, \{\xi_s(k)+\beta_s\}) \qquad (k = 1, \ldots, N).$$

Линейный функционал погрешности приближенного интегрирования периодической функции $f(\vec{x})$ из класса E_s^α по квадратурной формуле с весами $\vec{\rho}$ и модифицированной сеткой $M(\vec{\beta})$ будем обозначать через $R_{M(\vec{\beta}),\vec{\rho}}[f(\vec{x})]$, а его норму — через $\left\|R_{M(\vec{\beta}),\vec{\rho}}\right\|_{E_s^\alpha}$.

В новых обозначениях утверждение (36) формулируется так: *для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования функций, принадлежащих классу E_s^α, по квадратурной формуле с весами $\vec{\rho}$ и модифицированной сеткой $M(\vec{\beta})$ выполняется равенство*

$$\left\|R_{M(\vec{\beta}),\vec{\rho}}\right\|_{E_s^\alpha} = \left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\ldots,m_s)|}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha} =$$
$$= \left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \tag{39}$$

Из этого равенства следует, что для всех модифицированных сеток $M(\vec{\beta})$ норма определяется исходной сеткой M и не зависит от вектора модификации. Это просто объяснить через понятие граничной функции класса, которое впервые встречается в работе Н. М. Коробова [27], а более подробно в его монографии [28].

Функции $f(\vec{x})$ с единичной нормой , для которых абсолютная погрешность приближенного интегрирования равна норме линейного функционала погрешности, следуя Коробову, будем называть *граничными функциями класса* E_s^α. Легко видеть, что граничной функцией класса E_s^α для сетки M с весами $\vec{\rho}$ будет функция с коэффициентами Фурье

$$C_0(\vec{m}) = \begin{cases} 0 & \text{при } S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0, \\ \dfrac{\overline{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}}{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| q^\alpha(\vec{m})} & \text{при } S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \neq 0. \end{cases} \tag{40}$$

Ясно, что если при некоторых значениях $m_1, \ldots, m_s$ тригонометрическая сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0$, то граничная функция класса сеткой определена неоднозначно.

Нетрудно видеть, что если $f(\vec{x})$ — граничная функция класса E_s^α для сетки M, то $g(\vec{x}) = f(\vec{x} - \vec{\beta})$ — граничная функция класса E_s^α для модифицированной сетки $M(\vec{\beta})$.

Так как граничная функция класса зависит от вектора модификации сетки, то приближенное интегрирование одной и той же функции по модифицированным сеткам для разных векторов модификации приводит к появлению дополнительной информации о приближенном значении искомого интеграла. Такая ситуация естественно возникает при использовании произведения сеток, если соответствующим образом организовать суммирование в квадратурной формуле, как будет видно из дальнейшего.

2. Алгоритмы приближенного интегрирования с правилом остановки

Сделаем ещё несколько замечаний по поводу приближенного интегрирования периодических функций многих переменных (см. также [18]). Согласно теореме 7 для погрешности приближенного интегрирования справедлива оценка

$$|R_N[f]| \leq \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \cdot \left(\left| S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right| + \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \right),$$

но норма функции $\|f\|_{E_s^\alpha}$, как правило, неизвестна и задача её вычисления более сложная чем задача вычисления интеграла, который является значением только одного коэффициента Фурье $C(\vec{0})$. Более того, относительно параметра гладкости α для конкретной функции может быть известна только некоторая оценка, вытекающая из дифференциальных свойств функции, что приводит ещё к большей неопределенности для решения вопроса о достигнутой точности вычисления по конкретной квадратурной формуле для этой конкретной функции. Дадим следующее определение.

Определение 9. *Будем говорить, что задан алгоритм приближенного интегрирования*

$$< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta > \ (j = 1, 2, \ldots)$$

периодической функции $f(\vec{x})$ *из класса* $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$ *с правилом остановки* $\Delta(f(\vec{x}))$, *если задана бесконечная возрастающая последовательность натуральных* N_j *с* $\lim\limits_{j\to\infty} N_j = \infty$ *и сеток с весами* $M(j), \vec{\rho}(j)$ *из* N_j *взвешенных узлов равномерно распределенных в единичном* s*–мерном кубе такая, что для правила остановки* $\Delta(f(\vec{x})) < \varepsilon$ *величина*

$$\Delta(f(\vec{x})) = \Delta\left(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)\right)$$

и выполняется равенство

$$\lim_{j\to\infty} \Delta\left(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)\right) = 0. \tag{41}$$

В этом определении предполагается, что величина $\Delta\left(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)\right)$ алгоритмически выражается через веса и значения функции в узлах сетки. Кроме того предполагается, что для любого N_j из данной последовательности сетка с весами $M(j), \vec{\rho}(j)$ алгоритмически вычисляется. В данной работе будет предложена в качестве правила остановки величины дискретной дисперсии и сеточного размаха, определение которых будет дано ниже. Таким образом, вычисление приближенного значения интеграла продолжается до тех пор, пока для заданного $\varepsilon > 0$ не будет выполнено правило остановки $\Delta\left(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)\right) < \varepsilon$.

Следуя К. И. Бабенко [1] и О. В. Локуциевскому [29], дадим следующее определение ненасыщаемого алгоритма приближенного интегрирования на классе $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$.

Определение 10. *Будем говорить, что периодическая функция $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$ принадлежит конечному показателю $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$, если $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ и $f(\vec{x}) \notin E_s^\beta$ для любого $\beta > \alpha$. В противном случае будем говорить, что периодическая функция из класса E_s принадлежит бесконечному показателю.*

Ясно, что бесконечному показателю принадлежит любой конечный тригонометрический полином. Если периодическая функция $f(\vec{x}) \in E_s$ не является конечным тригонометрическим полиномом и принадлежит бесконечному показателю, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией.

Определение 11. *Будем говорить, что алгоритм приближенного интегрирования $< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta >$ $(j = 1, 2, \ldots)$ периодических функций из класса $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$ ненасыщаемый типа (γ, λ), если для любой периодической функции $f(\vec{x})$ конечного показателя $\alpha = \alpha(f(\vec{x}))$ и погрешности приближенного интегрирования выполняется равенство*

$$R_{N_j}[f(\vec{x})] = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda\cdot\alpha}}\right). \tag{42}$$

Как известно (см. [28]), методом оптимальных коэффициентов Коробова можно построить ненасыщаемые алгоритмы типа $((s-1)\alpha, 1)$, а модифицированным методом Фролова — $((s-1), 1)$. Для случая равномерных сеток имеем тип $(0, \frac{1}{s})$.

С точки зрения трудоемкости вычислений разумно выделить класс алгоритмов приближенного интегрирования, в которых j-ая квадратурная формула полностью использует результаты вычислений по $j-1$-ой квадратурной формуле. Дадим следующее определение.

Определение 12. *Будем говорить, что задан концентрический алгоритм приближенного интегрирования $< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta >$ $(j = 1, 2, \ldots)$ периодических функций из класса $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$, если для любого $j \geqslant 1$ выполняются условия*

$$M(j) \subset M(j+1), \quad \exists \rho : \forall \vec{x} \in M(j) : \rho_{j+1}(\vec{x}) = \rho \cdot \rho_j(\vec{x}). \tag{43}$$

Наиболее простой пример концентрических алгоритмов приближенного интегрирования дают квадратурные формулы с равными весами, построенными из первых членов бесконечной равномерно распределенной по модулю 1 бесконечной последовательности точек из единичного s-мерного куба. Другой класс концентрических алгоритмов приближенного интегрирования связан с понятием произведения сеток с весами.

Пусть даны две сетки с весами $< M_1, \vec{\rho}_1 >$ и $< M_2, \vec{\rho}_2 >$. Напомним определение произведения сеток с весами из работы [21], которое здесь несколько отличается для случая $|M_3| \neq |M_1| \cdot |M_2|$ появлением нормировочного множителя.

Определение 13. *Произведением двух сеток с весами* $< M_1, \vec{\rho}_1 >$ *и* $< M_2, \vec{\rho}_2 >$ *называется третья сетка*

$$< M_3, \vec{\rho}_3 >=< M_1, \vec{\rho}_1 > \cdot < M_2, \vec{\rho}_2 >, \tag{44}$$

где

$$M_3 = \{\{\vec{x} + \vec{y}\} | \vec{x} \in M_1, \vec{y} \in M_2\}, \tag{45}$$

$$\rho_3(\vec{z}) = \frac{|M_3|}{|M_1| \cdot |M_2|} \sum_{\substack{\vec{z}=\{\vec{x}+\vec{y}\}, \\ \vec{x}\in M_1, \vec{y}\in M_2}} \rho_1(\vec{x}) \cdot \rho_2(\vec{y}), \tag{46}$$

и для любого вектора $\vec{z} = (z_1, \ldots, z_s)$ *дробной частью вектора называется вектор* $\{\vec{z}\} = (\{z_1\}, \ldots, \{z_s\})$.

Определение 14. *Будем говорить, что задан мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования* $< M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta >$ $(j = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ *периодических функций из класса* $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$, *порожденный бесконечной последовательностью* $< M(j), \vec{\rho}(j) >$ $(j \in \mathbb{N})$, *если* $M^*(1) = M(1)$, $\vec{\rho}^*(1) = \vec{\rho}(1)$ *и для любого* $j \geqslant 1$ *выполняются условия*

$$< M^*(j+1), \vec{\rho}^*(j+1) >=< M^*(j), \vec{\rho}^*(j) > \cdot < M(j+1), \vec{\rho}(j+1) > . \tag{47}$$

Нетрудно видеть, что если для каждой сетки $\vec{0} \in M(j)\,(j = 1, 2, \ldots)$, то мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования будет концентрическим, так как в этом случае всегда $M^*(j) \subset M^*(j+1)$.

Определение 15. *Мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования*

$$< M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta > \ (j = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

периодических функций из класса $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$, *порожденный бесконечной последовательностью*

$$< M(j), \vec{\rho}(j) > \ (j = 1, 2, \ldots)$$

с дополнительным условием

$$\vec{0} \in M(j)\,(j = 1, 2, \ldots),$$

будем называть мультипликативным, концентрическим алгоритмом приближенного интегрирования.

Пусть величины m_f, M_f — минимальное и максимальное значение функции $f(\vec{x})$ определены, соответственно, равенствами

$$m_f = \min_{\vec{x}\in[0;1]^s} f(\vec{x}), \quad M_f = \max_{\vec{x}\in[0;1]^s} f(\vec{x}), \tag{48}$$

а размах функции $v_f = M_f - m_f$, тогда справедливо неравенство

$$v_f \leqslant \|f\|_{E_s^\alpha} 2\left((1 + 2\zeta(\alpha))^s - 1\right). \tag{49}$$

Очевидно, что для любого алгоритма приближенного интегрирования $< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta >$ $(j = 1, 2, \ldots)$ можно определить две числовые последовательности

$$m_f(j) = \min_{\vec{x}\in M(j)} f(\vec{x}), \quad M_f(j) = \max_{\vec{x}\in M(j)} f(\vec{x}), \tag{50}$$

для которых справедливы соотношения

$$m_f(j) \geqslant m_f, \quad \lim_{j\to\infty} m_f(j) = m_f, \quad M_f(j) \leqslant M_f, \quad \lim_{j\to\infty} M_f(j) = M_f. \tag{51}$$

Для любого концентрического алгоритма приближенного интегрирования $<M(j),\vec{\rho}(j),\Delta>$ $(j = 1, 2, \ldots)$ будут выполнены дополнительные соотношения монотонности:

$$\begin{aligned} m_f \leqslant \ldots \leqslant m_f(j) \leqslant \ldots \leqslant m_f(2) \leqslant m_f(1) \leqslant \\ \leqslant M_f(1) \leqslant M_f(2) \leqslant \ldots \leqslant M_f(j) \leqslant \ldots \leqslant M_f. \end{aligned} \tag{52}$$

Так как для "сеточного" размаха $v_f(j) = M_f(j) - m_f(j)$ функции $f(\vec{x})$ отличной от константы выполняется равенство $\lim\limits_{j\to\infty} v_f(j) = v_f > 0$, то величину сеточного размаха нельзя использовать как правило остановки, но в качестве правила остановки можно использовать величину приращения сеточного размаха $dv_f(j) = v_f(j) - v_f(j-1)$, которая стремится к нулю, но с оговоркой„ что если приращение сеточного размаха нулевое, то останавливаться можно только при $\frac{1}{N_j} < \varepsilon$.

Таким образом, простейшее правило остановки для концентрического алгоритма можно определить как

$$\begin{aligned} \Delta\left(f(\vec{x}), M(j), \vec{\rho}(j)\right) = \max\Bigg(\frac{1}{|M(j)|}, \max_{\vec{x}\in M(j)} f(\vec{x}) + \min_{\vec{x}\in M(j-1)} f(\vec{x}) - \\ - \max_{\vec{x}\in M(j-1)} f(\vec{x}) - \min_{\vec{x}\in M(j)} f(\vec{x})\Bigg) \quad (j = 2, 3, \ldots). \end{aligned} \tag{53}$$

3. Оператор взвешенных сеточных средних

Для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ рассмотрим на пространстве периодических функций E_s^α линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x}) = A_{M,\vec{\rho}} f(\vec{x}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \rho_k f[x_1 + \xi_1(k), \ldots, x_s + \xi_s(k)]. \tag{54}$$

Обозначим через $A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m})$ действие линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

Лемма 4. *Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \tag{55}$$

справедливо равенство

$$A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m}) = \frac{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}{N} C(\vec{m}) = S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) C(\vec{m}) \tag{56}$$

где $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\left\|A_{M,\vec{\rho}} f(\vec{x})\right\|_{E_s^\alpha} \leqslant \frac{\rho(M)}{N} \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}. \tag{57}$$

Определение 16. *Назовем линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних нормальным, если он не увеличивает норму любой функции.*

Очевидно, что необходимым и достаточным условием нормальности линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является ограниченность сверху единицей модуля всех нормированных тригонометрических сумм с весами: $\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})\right| \leqslant 1$ ($\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$).

Из последней леммы следует, что собственными функциями линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является набор базисных функций $e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$ ($\vec{m} \in \mathbb{Z}^s$) за исключением тех гармоник, которые переходят в ноль, то есть принадлежат ядру оператора. Собственными значениями являются соответствующие нормированные тригонометрические сумм сеток с весами $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ отличные от нуля.

Таким образом, нормальные линейные операторы $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних выделяются условием, что все собственные значения этих операторов не превосходят по модулю единицу.

Если сетка с весами $< M, \vec{\rho} >$ порождает нормальный линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних, то для её дзета-функции будет выполнена оценка сверху

$$\zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}) \leqslant \zeta_H(\alpha|\mathbb{Z}^s) = ((1 + 2\zeta(\alpha))^s - 1)\,. \tag{58}$$

Отсюда следует, что для образа $g(\vec{x}) = A_{M,\vec{\rho}} f(\vec{x})$ справедливы более точные неравенства чем (49).

$$\begin{aligned} M_g - C(\vec{0})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) &\leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}\,\zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}),\\ C(\vec{0})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - m_g &\leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}\,\zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}),\\ v_g &\leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}\,2\zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \end{aligned} \tag{59}$$

Из теорем 6 и 7 следует, что для любого алгоритма приближенного интегрирования $< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta >$ ($j = 1, 2, \ldots$) периодической функции $f(\vec{x})$ из класса $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$ выполняется равенство

$$\lim_{j\to\infty} \zeta(\alpha, 1|M(j), \vec{\rho}(j)) = 0, \tag{60}$$

поэтому величину усредненного взвешенного сеточного размаха $v_{g(j)}(j+1)$, где $g(j) = A_{M(j),\vec{\rho}(j)} f(\vec{x})$ — j-ый образ функции $f(\vec{x})$ под действием j-ого оператора $A_{M(j),\vec{\rho}(j)}$, можно использовать как правило остановки с одной оговоркой, что если усредненный взвешенный сеточный размах нулевой, то останавливаться можно только при $\frac{1}{N_j} < \varepsilon$.

Наиболее компактно правило остановки можно сформулировать для мультипликативного, концентрического алгоритма приближенного интегрирования $< M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta >$ ($j = 1, 2, \ \ldots, n, \ldots$) периодических функций из класса $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$, порожденный бесконечной последовательностью $< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta >$ ($j = 1, 2, \ldots$) с дополнительным условием $\vec{0} \in M(j)$ ($j = 1, 2, \ldots$), если положить $< M(0) = \{\vec{0}\}$, $\vec{\rho}(0) = (1)$, тогда $A_{M(0),\vec{\rho}(0)} f(\vec{x}) = f(\vec{x})$ и

$$\begin{gathered} \Delta\left(f(\vec{x}), M^*(j), \vec{\rho}^*(j)\right) = \max\left(\frac{1}{|M^*(j)|},\ \max_{\vec{x}\in M(j)} \frac{1}{|M^*(j-1)|} \sum_{\vec{y}\in M^*(j-1)} \rho(\vec{y}) f(\vec{x} + \vec{y}) - \right.\\ \left. - \min_{\vec{x}\in M(j)} \frac{1}{|M^*(j-1)|} \sum_{\vec{y}\in M^*(j-1)} \rho^*(j-1, \vec{y}) f(\vec{x} + \vec{y})\right) \quad (j = 1, 2, \ldots). \end{gathered} \tag{61}$$

Если правило остановки выполнено, то в качестве приближенного значения интеграла берется величина

$$I = \frac{1}{|M^*(j)|}\sum_{\vec{y}\in M^*(j)}\rho^*(j,\vec{y})f(\vec{y}) = A_{M^*(j),\vec{\rho}^*(j)}f(\vec{0}) =$$
$$= \frac{1}{|M(j)|}\sum_{\vec{y}\in M(j)}\rho(j,\vec{y})\frac{1}{|M^*(j-1)|}\sum_{\vec{y}\in M^*(j-1)}\rho^*(j-1,\vec{y})f(\vec{x}+\vec{y}) =$$
$$= A_{M(j),\vec{\rho}(j)}A_{M^*(j-1),\vec{\rho}^*(j-1)}f(\vec{0}). \tag{62}$$

Теорема 9. *Для любых двух сеток с весами* $< M_1,\vec{\rho}_1 >$ *и* $< M_2,\vec{\rho}_2 >$ *и произведения соответствующих линейных операторов взвешенных сеточных средних справедливо равенство*

$$A_{M_1,\vec{\rho}_1}A_{M_2,\vec{\rho}_2} = A_{M_3,\vec{\rho}_3} \tag{63}$$

и сетка с весами $< M_3,\vec{\rho}_3 >=< M_1,\vec{\rho}_1 > \cdot < M_2,\vec{\rho}_2 >$.

Кроме того нормированные тригонометрические суммы сетки с весами мультипликативны, то есть

$$S^*_{M_1,\vec{\rho}_1}(\vec{m})\cdot S^*_{M_2,\vec{\rho}_2}(\vec{m}) = S^*_{M_3,\vec{\rho}_3}(\vec{m}). \tag{64}$$

4. Случайные величины и многомерные квадратурные формулы

Возьмем произвольную равномерно распределенную случайную точку $\vec{x}$ из единичного s-мерного полуоткрытого куба $G_s = [0;1)^s$, тогда определена случайная величина $X_f = f(\vec{x})$, для математического ожидания и дисперсии которой справедливы равенства

$$M(X_f) = \int_0^1\ldots\int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x}, \tag{65}$$

$$D(X_f) = \int_0^1\ldots\int_0^1\left|f(\vec{x}) - \int_0^1\ldots\int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x}\right|^2 d\vec{x}. \tag{66}$$

Пусть характеристическая функция $\chi_t(x)$ промежутка $[0;t)$ задается равенством

$$\chi_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0\leqslant x < t,\\ 0 & \text{при } x\geqslant t,\end{cases} \tag{67}$$

тогда интегральная функция распределения $F_f(x)$ случайной величины $X_f = f(\vec{x})$ имеет следующее интегральное представление

$$F_f(x) = P(X_f < x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x\leqslant m_f,\\ \int_0^1\ldots\int_0^1\chi_x\left(f(\vec{t}) - m_f\right)d\vec{t} & \text{при } m_f < x\leqslant M_f,\\ 1 & \text{при } x > M_f.\end{cases} \tag{68}$$

Лемма 5. *Для дисперсии случайной величины X_f периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α справедливо равенство*

$$D(X_f) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 |f(\vec{x})|^2 d\vec{x} - \left| \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} \right|^2. \tag{69}$$

Из равенства Парсеваля следует, что

$$D(X_f) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(\vec{m})|^2. \tag{70}$$

Для дисперсии справедлива оценка через норму функции:

$$\begin{aligned} D(X_f) \leqslant \|f(\vec{x})\|^2_{E_s^\alpha} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{-2\alpha} = \\ = \|f(\vec{x})\|^2_{E_s^\alpha} \left((1 + 2\zeta(2\alpha))^s - 1\right). \end{aligned} \tag{71}$$

Нетрудно видеть, что значение в произвольной точке образа функции $f(\vec{x})$ под действием линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является статистикой для значения интеграла от $f(\vec{x})$. Пользуясь таким взглядом на линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних дадим следующее определение.

Определение 17. *Линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних называется несмещенным, если для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α справедливо равенство*

$$M(X_{A_{M,\vec{\rho}}f}) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x}. \tag{72}$$

Теорема 10. *Линейный оператор взвешенных сеточных средних является несмещенным тогда и только тогда, когда для весов сетки справедливо равенство*

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k = 1, \tag{73}$$

то есть

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1. \tag{74}$$

Замечание 1. *Для любой интегрируемой по Риману функции справедливо равенство*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\left[\{\vec{x} + \vec{w}\}\right] d\vec{x}, \tag{75}$$

так как отображение $\vec{x} \to \{\vec{x} + \vec{w}\}$ отображает s-мерный полуоткрытый куб $G_s = [0;1)^s$ на себя и является кусочно гладким с единичной матрицей Якоби. Отсюда следует, что несмещенный линейный оператор взвешенных сеточных средних обладает свойством несмещенности на классе всех интегрируемых по Риману функций.

Сетки с весами $< M, \vec{\rho} >$, задающие несмещенный линейный оператор взвешенных сеточных средних, обладают важным свойством: у них в формуле (39) исчезает член $\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right|$ и для нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования функций, принадлежащих классу E_s^α, по квадратурной формуле с весами $\vec{\rho}$ и модифицированной сеткой $M(\vec{\beta})$ выполняется равенство

$$\left\|R_{M(\vec{\beta}),\vec{\rho}}\right\|_{E_s^\alpha} = \zeta(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \tag{76}$$

Из мультипликативности нормированных тригонометрических сумм сетки с весами и доказанной теоремы следует, что произведение несмещенных линейных операторов взвешенных сеточных средних является несмещенным линейным оператором взвешенных сеточных средних.

Нетрудно видеть, что для дисперсии случайной величины $X_{A_{M,\vec{\rho}}f} = A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x})$ справедливо равенство

$$D\left(X_{A_{M,\vec{\rho}}f}\right) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(\vec{m})|^2 |S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^2. \tag{77}$$

Переходя к оценкам коэффициентов Фурье через норму, получим неравенство

$$D\left(X_{A_{M,\vec{\rho}}f}\right) \leqslant \|f\|^2_{E_s^\alpha} \cdot \zeta(2\alpha, 2|M, \vec{\rho}) \leqslant \|f\|^2_{E_s^\alpha} \cdot \zeta^2(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \tag{78}$$

Как правило, норма функции $\|f\|_{E_s^\alpha}$ неизвестна и задача её вычисления более сложная чем задача вычисления интеграла, который является значением только одного коэффициента Фурье $C(\vec{0})$. Поэтому целесообразно оценивать дисперсию $D\left(X_{A_{M,\vec{\rho}}f}\right)$, которая убывает вместе с величиной линейного функционала погрешности приближенного интегрирования $R_{M(\vec{\beta}),\vec{\rho}}[f(\vec{x})]$. Так как саму дисперсию вычислить в общем виде не представляется возможным, то дадим следующее определение.

Определение 18. *Сеточной дисперсией с весами периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α будем называть величину $D_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})]$, заданную равенством*

$$\begin{aligned} D_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})] &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\rho_k\left|f\left[\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k)\right] - \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\rho_l f\left[\xi_1(l),\ldots,\xi_s(l)\right]\right|^2 = \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\rho_k|f\left[\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k)\right]|^2 - \left|\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\rho_l f\left[\xi_1(l),\ldots,\xi_s(l)\right]\right|^2. \end{aligned} \tag{79}$$

Лемма 6. *Для сеточной дисперсии с весами периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α если линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является несмещенным, то справедливо равенство*

$$D_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})] = D(X_f) - D\left(X_{A_{M,\vec{\rho}}f}\right) + DR_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})], \tag{80}$$

где [6]

$$DR_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})] = \sum_{\vec{m},\vec{n}=-\infty}^{\infty}{}^{*} C(\vec{m})\overline{C(\vec{n})}\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}-\vec{n}) - S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(-\vec{n})\right). \tag{81}$$

[6] Здесь и далее $\sum^*$ означает суммирование по системам $\vec{m} \neq \vec{0}$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, $\vec{m} \neq \vec{n}$.

Нетрудно видеть из доказанной леммы, что для любого алгоритма приближенного интегрирования $< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta >$ $(j = 1, 2, \ldots)$ сеточную дисперсию с весами периодической функции $f(\vec{x})$ нельзя использовать как правило остановки, так как она будет сходиться к дисперсии $D(X_f) > 0$. Поэтому дадим следующее определение.

Определение 19. *Дискретной дисперсией погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с сеткой M и весами $\vec{\rho}$ периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α будем называть величину $D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})]$, заданную равенством*

$$D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})] = D_{M,\vec{\rho}}[A_{M,\vec{\rho}} f(\vec{x})]. \tag{82}$$

Следующая лемма показывает, что в принципе в случае несмещенного, нормального линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних дискретная дисперсия $D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})]$ может выполнять функции правила остановки в алгоритме приближенного интегрирования.

Лемма 7. *Если линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является несмещенным и нормальным, то для его дискретной дисперсии $D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})]$ справедливо неравенство*

$$D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})] \leqslant 2\|f\|^2_{E_s^\alpha} \cdot \zeta^2(\alpha, 1|M, \vec{\rho}). \tag{83}$$

Другим важным критерием возможности использования дискретной дисперсии в качестве правила остановки является её трудоемкость вычисления. В следующей лемме дается явное выражение для дискретной дисперсии, из которого видно, что необходимо учитывать конкретные свойства используемой сетки, чтобы провести дальнейшее упрощение выражения для дискретной дисперсии.

Лемма 8. *Для дискретной дисперсии $D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})]$ справедливо равенство*

$$D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})] = A_{M,\vec{\rho}} \left| A_{M,\vec{\rho}} f\left(\vec{0}\right)\right|^2 - \left| A_{M,\vec{\rho}} A_{M,\vec{\rho}} f\left(\vec{0}\right)\right|^2. \tag{84}$$

Из последней леммы видно, что вычисление дискретной дисперсии произвольной сетки с весами требует $O(N^2)$ операций, что является существенно более трудоемким чем вычисление приближенного значения интеграла. Поэтому дадим модифицированное определение дискретной дисперсии для случая мультипликативного, концентрического алгоритма приближенного интегрирования. Фактически эта модификация применима для любого произведения двух сеток с весами. Поэтому назовем такую дисперсию мультипликативной дискретной дисперсией.

Определение 20. *Если сетка M с весами $\vec{\rho}$ является произведением двух сеток с весами $< M, \vec{\rho} > = < M_1, \vec{\rho}_1 > \cdot < M_2, \vec{\rho}_2 >$, то мультипликативной дискретной дисперсией погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле с сеткой M и весами $\vec{\rho}$ периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α будем называть величину $D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})]$, заданную равенством*

$$D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})] = A_{M_2,\vec{\rho}_2} \left| A_{M_1,\vec{\rho}_1} f\left(\vec{0}\right)\right|^2 - \left| A_{M,\vec{\rho}} f\left(\vec{0}\right)\right|^2. \tag{85}$$

Из определения видно, что функция мультипликативной дискретной дисперсии не является симметричной относительно сомножителей, но зато она по трудоемкости вычислений сравнима с трудоемкостью вычисления приближенного значения интеграла.

Лемма 9. *Если сетка M с весами $\vec{\rho}$ является произведением двух сеток с весами $< M, \vec{\rho} > = < M_1, \vec{\rho}_1 > \cdot < M_2, \vec{\rho}_2 >$ и операторы $A_{M_1,\vec{\rho}_1}$ и $A_{M_2,\vec{\rho}_2}$ — нормальные и несмещенные, то для мультипликативной дискретной дисперсии $D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})]$ справедливо равенство*

$$D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})] =$$
$$= \frac{1}{N_2}\sum_{\vec{x}\in M_2}\rho_2(\vec{x})\left|\frac{1}{N_1}\sum_{\vec{y}\in M_1}\rho_1(\vec{y})f(\vec{y}+\vec{x}) - \frac{1}{N}\sum_{\vec{z}\in M}\rho(\vec{z})f(\vec{z})\right|^2. \tag{86}$$

Лемма 10. *Если сетка M с весами $\vec{\rho}$ является произведением двух сеток с весами $< M, \vec{\rho} > = < M_1, \vec{\rho}_1 > \cdot < M_2, \vec{\rho}_2 >$ и операторы $A_{M_1,\vec{\rho}_1}$ и $A_{M_2,\vec{\rho}_2}$ — нормальные и несмещенные, то для мультипликативной дискретной дисперсии $D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})]$ справедливо неравенство*

$$|D^*_{M,\vec{\rho}}[f(\vec{x})]| \leqslant \|f\|^2_{E_s^\alpha}\times$$
$$\times\left(\zeta(\alpha,1|M,\vec{\rho}) + \zeta^2(\alpha,1|M_1,\vec{\rho}_1) + \zeta(\alpha,1|M_1,\vec{\rho}_1)\zeta(\alpha,1|M,\vec{\rho})\right). \tag{87}$$

Из последней леммы вытекает, что для мультипликативного, концентрического алгоритма приближенного интегрирования

$$< M^*(j), \vec{\rho}^*(j), \Delta > \ (j = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

периодических функций из класса $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$, порожденного бесконечной последовательностью $< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta >$ $(j = 1, 2, \ldots)$ с дополнительным условием $\vec{0} \in M(j)\,(j = 1, 2, \ldots)$, правило остановки (61) будет более строгим, если добавить в него ещё величину мультипликативной дискретной дисперсии.

5. Разбиение Коробова

Пусть задана сетка с весами $< M, \vec{\rho} >$ определим пять подмножеств фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ следующим образом:

$$K_0 = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \,|\, S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = 0\}, \tag{88}$$
$$K_1 = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \,|\, S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = |M|\}, \tag{89}$$
$$K_2 = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \,|\, S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \neq |M|,\ |S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| = |M|\}, \tag{90}$$
$$K_3 = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \,|\, |S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| < |M|\}, \tag{91}$$
$$K_4 = \{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \,|\, |S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| > |M|\}. \tag{92}$$

Таким образом $\mathbb{Z}^s = K_0 \bigcup K_1 \bigcup K_2 \bigcup K_3 \bigcup K_4$.

Множества K_0, K_1, K_2, K_3 и K_4 порождают разбиение пространства периодических функций E_s^α на подпространства E_s^{α,K_j} $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$, где для произвольного подмножества $K \subset \mathbb{Z}^s$

$$E_s^{\alpha,K} = \left\{ f(\vec{x}) \in E_s^\alpha \,\middle|\, f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in K} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \right\}. \tag{93}$$

Такое разбиение будем называть разбиением Коробова. Оно фактически возникало в его работах, когда он проводил оценки погрешности приближенного интегрирования по различным сеткам и естественным образом область суммирования разбивалась в зависимости от величины тригонометрической суммы сетки.

Из определения множеств K_0, K_1, K_2, K_3 и K_4 следует, что:

- подпространство E_s^{α,K_0} является ядром линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних;
- E_s^{α,K_1} — неподвижное подпространство, то есть все функции из этого подпространства переходят сами в себя под действием оператора $A_{M,\vec{\rho}}$;
- E_s^{α,K_2} — подпространство постоянной нормы, то есть все функции из этого подпространства сохраняют свою норму под действием оператора $A_{M,\vec{\rho}}$;
- E_s^{α,K_3} — подпространство сжатия, то есть все ненулевые коэффициенты Фурье уменьшаются на множители равные соответствующим нормированным тригонометрическим суммам сетки с весами;
- E_s^{α,K_4} — подпространство растяжения, то есть все ненулевые коэффициенты Фурье изменяются на множители равные соответствующим нормированным тригонометрическим суммам сетки с весами, которые по модулю больше 1.

Отсюда следует, что каждая периодическая функция $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α представима в виде суммы соответствующих компонент из разбиения Коробова:

$$f(\vec{x}) = f_0(\vec{x}) + f_1(\vec{x}) + f_2(\vec{x}) + f_3(\vec{x}) + f_4(\vec{x}).$$

Если некоторое подпространство E_s^{α,K_j} $(j = 0, 1, 2, 3, 4)$ пустое, то соответствующая функция представления полагается равной нулю.

Для любого несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних имеем

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f_j(\vec{x})d\vec{x} = 0 \quad (j \neq 1), \quad \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\vec{x})d\vec{x} = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f_1(\vec{x})d\vec{x}. \tag{94}$$

В силу линейности функционала погрешности приближенного интегрирования имеем равенство

$$R_N[f] = R_N[f_1] + R_N[f_2] + R_N[f_3] + R_N[f_4], \tag{95}$$

так как на подпространстве E_s^{α,K_0} этот функционал тождественно равен нулю.

Согласно первой теореме Коробова, применяя разбиение Коробова, получим

$$R_N[f] = {\sum_{\vec{m}\in K_1}}' C(\vec{m}) + \sum_{j=2}^{4} \sum_{\vec{m}\in K_j} C(\vec{m}) S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}). \tag{96}$$

Согласно второй теореме Коробова отсюда следует оценка

$$|R_N[f]| \leqslant C \left({\sum_{\vec{m}\in K_1 \bigcup K_2}}' \frac{1}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha} + \sum_{j=3}^{4} \sum_{\vec{m}\in K_j} \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha} \right) \tag{97}$$

для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства $E_s^\alpha(C)$.

Для любого несмещенного, нормального линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних множество K_4 пусто, а значит и подпространство растяжения тоже пусто. В этом случае формула (97) примет более простой вид

$$|R_N[f]| \leqslant C \left({\sum_{\vec{m}\in K_1 \bigcup K_2}}' \frac{1}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha} + \sum_{\vec{m}\in K_3} \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m_1} \ldots \overline{m_s})^\alpha} \right). \tag{98}$$

Определение 21. *Для произвольного подмножества K фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ гиперболическим параметром $q(K)$ назовем величину*

$$q(K) = \min_{\vec{m}\in K} \overline{m_1}\dots\overline{m_s}. \quad (99)$$

Для пустого множества K полагаем $q(K) = \infty$.

Лемма 2 (см. стр. 127) об оценке сверху суммы (15) (см. стр. 127) позволяет оценивать величину погрешности приближенного интегрирования через гиперболические параметры множеств $K_1\bigcup K_2$, K_3 и K_4.

Рассмотрим разбиение Коробова для некоторых типов сеток. В данной работе мы остановимся на наиболее известном случае несмещенных операторов $A_{M,\vec{\rho}}$, когда все веса ρ_j равны 1. В этом случае множество K_4 пусто, а значит и подпространство растяжения тоже пусто. Указанный случай является наиболее простым примером нормального, несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних.

Подводя итог обсуждения проблемы выработки правил остановки в алгоритмах численного интегрирования, дополним следующие соображения из работы [18].

"В приложениях теории многомерных квадратурных формул на практике особенную роль играет вычислительный эксперимент. Дело в том, что результаты о величине погрешности этих формул выражаются в терминах норм линейного функционала погрешности на некотором функциональном пространстве и нормы функции, определенной на нем. А, как правило, норма функции неизвестна и ее вычисление более сложная задача, чем вычисление интеграла. Таким образом, мы сталкиваемся с той самой естественной постановкой задачи, о которой писал академик С. Л. Соболев. Теория нам дает ориентиры, где надо искать удовлетворительное решение проблемы, а уже далее, на основании вычислительного эксперимента вырабатываются рекомендации для конкретного класса задач в конкретной предметной области — какой метод и с какими параметрами дает удовлетворительные, достоверные результаты."

Из предыдущего следует, что при организации численных экспериментов по приближенному вычислению кратных интегралов с целью выработки практических рекомендаций необходимо создавать базу данных интегралов, в которой наряду с функцией и значением интеграла приводятся такие характеристики как сеточный максимум и сеточный минимум, сеточный размах, дискретная дисперсия, эмпирическая функция распределения значений интегрируемой функции и тому подобное. Накопление такой базы данных позволяет ставить вопрос о статистической обработке результатов вычислений и кластерного анализа классов функций, позволяющих давать конкретные рекомендации по применению тех или иных алгоритмов приближенного интегрирования к тому или иному выявленному кластеру функций. Можно предположить, что такие кластеры будут определяться областями параметров, которые определяют функции некоторого класса, возникающего в той или иной предметной области.

6. Первый, второй и третий гиперболические параметры сеток

В работе [23] было дано такое определение.

"Гиперболическим параметром сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ назовем величину

$$q\left(M,\rho(\vec{x})\right) = \min_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\setminus\{\vec{0}\},|S(\vec{m})|>0} \overline{m_1}\dots\overline{m_s}\,.\text{ "}$$

В этой работе использовались несколько иные обозначения. Так

$$S(\vec{m}) = \frac{1}{|M|}\sum_{\vec{x}\in M}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}$$

— тригонометрическая сумма сетки M с весами $\rho(\vec{x})$;

$$\zeta_H(M,\rho(\vec{x})|\alpha)=\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}{}' \frac{|S(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}$$

— гиперболическая дзета-функции сетки M с весами $\rho(\vec{x})$.

Первое применение гиперболического параметра сетки вытекает из теоремы Абеля (см. [37], стр. 106), позволяющее представить гиперболическую дзету-функцию сетки M с весами $\rho(\vec{x})$ в интегральном виде

$$\zeta_H(M,\rho(\vec{x})|\alpha)=\alpha\int\limits_{q(M,\rho(\vec{x}))}^{\infty}\frac{D(t|M,\rho(\vec{x}))dt}{t^{\alpha+1}},$$

где

$$D(t|M,\rho(\vec{x}))=\sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s,\,\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\leqslant t}{}'|S(\vec{m})|$$

— сумматорная функция тригонометрической суммы.

В работе [8] для любой сетки M с весами $\vec{\rho}$ на пространстве периодических функций E_s^α рассмотрен линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних заданный равенством

$$g(\vec{x})=A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x})=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\rho_k f[x_1+\xi_1(k),\ldots,x_s+\xi_s(k)]. \tag{100}$$

Через $A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m})$ обозначается действие линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ на коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$.

Лемма 11. *Для любой периодической функции $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α и её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ разложения в ряд Фурье*

$$f(\vec{x})=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}C(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} \tag{101}$$

справедливо равенство

$$A_{M,\vec{\rho}}C(\vec{m})=\frac{S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})}{N}C(\vec{m})=S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})C(\vec{m}) \tag{102}$$

где $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрическая сумма сетки с весами, а $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — нормированная тригонометрическая сумма сетки с весами.

Кроме того, справедлива тривиальная оценка для нормы образа

$$\left\|A_{M,\vec{\rho}}f(\vec{x})\right\|_{E_s^\alpha}\leqslant\frac{\rho(M)}{N}\left\|f(\vec{x})\right\|_{E_s^\alpha}. \tag{103}$$

С точки зрения величины нормированной тригонометрической суммы сетки с весами естественно определить следующие пять подмножеств фундаментальной решётки $\mathbb{Z}^s$ таким образом:

$$K_0=K_0(M,\vec{\rho}) = \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\,|\,S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})=0\}, \tag{104}$$
$$K_1=K_1(M,\vec{\rho}) = \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\,|\,S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})=1\}, \tag{105}$$
$$K_2=K_2(M,\vec{\rho}) = \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\,|\,S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})\neq 1,\,|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|=1\}, \tag{106}$$
$$K_3=K_3(M,\vec{\rho}) = \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\,|\,0<|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|<1\}, \tag{107}$$
$$K_4=K_4(M,\vec{\rho}) = \{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\,|\,|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|>1\}. \tag{108}$$

Ясно что $\mathbb{Z}^s = K_0 \bigcup K_1 \bigcup K_2 \bigcup K_3 \bigcup K_4$. Такое разбиение называется разбиением Коробова. Оно фактически возникало в его работах, когда он проводил оценки погрешности приближенного интегрирования.

В работе [8] было дано определение нормального и несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних (см. [8], стр. 195 и 199). Нормальный оператор не увеличивает норму любой функции, то есть $K_4 = \varnothing$, а для несмещенного оператора имеем: $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1$.

Далее везде будем считать, что веса $\vec{\rho}$ выбраны так, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым. Для таких операторов выражение гиперболической дзета-функции сетки имеет более простой вид

$$\zeta(\alpha, p|M, \vec{\rho}) = \sum_{\vec{m}\in K_1 \bigcup K_2}{}' \frac{1}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha} + \sum_{\vec{m}\in K_3} \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|^p}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}. \tag{109}$$

Используя общее определение гиперболического параметра, в случае нормального, несмещенного линейного оператора $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних можно определить первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$.

Определение 22. *Для произвольной сетки M с весами $\vec{\rho}$ такими, что соответствующий линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ задаются равенствами*

$$q_\nu\left(M, \rho(\vec{x})\right) = q(K_\nu\left(M, \rho(\vec{x})\right)) \quad (\nu = 1, 2, 3). \tag{110}$$

Ясно, что гиперболический параметр сетки и первый, второй и третий гиперболические параметры сетки M с весами $\vec{\rho}$ связаны соотношением

$$q\left(M, \rho(\vec{x})\right) = \min_{\nu=1,2,3} q_\nu\left(M, \rho(\vec{x})\right).$$

Пусть сетка M — рациональная со знаменателем p, то есть в s-мерном кубе

$$G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_i < 1\,(i = 1, \ldots, s)\}$$

имеется N рациональных точек вида

$$\left(\frac{x_1^{(k)}}{p}, \ldots, \frac{x_s^{(k)}}{p}\right) \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{111}$$

$x_i^{(k)}$ — целые, $0 \leqslant x_i^{(k)} \leqslant p - 1$, p — натуральное.

Теорема 11. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, справедливо соотношение*

$$p \cdot \mathbb{Z}^s \subset K_1\left(M, \rho(\vec{x})\right),$$

кроме того тригонометрические суммы $S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ с весами $\vec{\rho}$ принимают конечное число различных значений, не превосходящее p^s.

Теорема 12. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, множество $K_1(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

Теорема 13. *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, множество $K_1(M, \vec{\rho}) \bigcup K_2(M, \vec{\rho})$ является целочисленной решеткой.*

7. Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток

Для формулировки обобщенной теоремы Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток нам потребуется обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функции решеток из работы [15], одна лемма из работы [9] (см. лемму 3, стр. 127) и одно новое определение.

Определение 23. *Будем говорить, что сетка M с весами $\vec{\rho}$, для которой линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, имеет тип $\Delta(N,s)<1$, если для любого $\vec{m}\in K_3(M,\vec{\rho})$ выполняется оценка*

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|\leqslant \Delta(N,s).$$

Теорема 14. **(Обобщенная теорема Бахвалова для гиперболической дзета-функции решеток)** *Для любой s-мерной решетки Λ справедливы оценки*

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha)\leqslant \begin{cases} (2+2\zeta(\alpha))^s\cdot\left(1+\left[\dfrac{1}{\lambda}\right]\right)^s, & \text{при } q(\Lambda)=1;\\[2ex] 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\dfrac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}, & \text{при } q(\Lambda)>1,\end{cases}$$

где λ — наибольшее число такое, что s-мерный куб $[-\lambda;\lambda]^s$ не содержит ни одной ненулевой точки решетки Λ.

Теорема 15. **(Обобщенная теорема Бахвалова — Коробова для гиперболической дзета-функции сеток)** *Для любой рациональной сетки M со знаменателем p и с положительными весами $\vec{\rho}$ типа $\Delta(N,s)<1$, для которых линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных средних является нормальным и несмещённым, справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\zeta(\alpha,p|M,\vec{\rho})\leqslant 2^{(\alpha+1)s+1}\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{(\ln q(\Lambda)+1)^{s-1}}{q^\alpha(\Lambda)}+\\ +\Delta^p(N,s)\frac{1}{t^{\alpha-1}}\left(\frac{\ln^{s-1}t}{(\alpha-1)(s-1)!}+\right.\\ \left.+\sum_{m=0}^{s-2}\frac{\ln^m t}{m!}\left(\sum_{k=m}^{s-2}\zeta(\alpha)^{s-2-k}C_k^m\frac{\alpha-1+\zeta(\alpha)}{\alpha-1}+\frac{C_{s-1}^m}{\alpha-1}\right)\right),\end{aligned}\tag{112}$$

где решетка $\Lambda=K_1(M,\vec{\rho})\bigcup K_2(M,\vec{\rho})$ и $t=q_3\left(M,\rho(\vec{x})\right)$.

8. Обобщенные равномерные сетки

Для обобщенной равномерной сетки $M(\vec{n})$ с равными весами $\rho_j=1$ $(j==1,2,\ldots,N)$ имеем для нормированной тригонометрической суммы равенство

$$S^*_{M(\vec{n})}(\vec{m})=\delta_{n_1}(m_1)\cdot\ldots\cdot\delta_{n_s}(m_s)\tag{113}$$

и символ Коробова $\delta_N(b)$ задан равенствами

$$\delta_N(b)=\begin{cases}0, & \text{если } b\not\equiv 0 \pmod N,\\ 1, & \text{если } b\equiv 0 \pmod N.\end{cases}\tag{114}$$

Отсюда следует, что $K_2 = K_3 = K_4 = \emptyset$, $K_1 = n_1\mathbb{Z} \times \ldots \times n_s\mathbb{Z}$ и $K_0 = \mathbb{Z}^s \setminus K_1$. Таким образом для любой модифицированной обобщенной равномерной сетки $M(\vec{n}, \vec{\beta})$ справедливо следующее равенство для погрешности приближенного интегрирования $R_{M(\vec{n},\vec{\beta})}[f(\vec{x})]$ по квадратурной формуле с модифицированной обобщенной равномерной сеткой и равными единичными весами

$$R_{M(\vec{n},\vec{\beta})}[f(\vec{x})] = \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(m_1n_1, \ldots, m_sn_s)e^{2\pi i(m_1n_1\beta_1+\ldots+m_sn_s\beta_s)}. \tag{115}$$

Для случая обобщенной равномерной сетки $M(\vec{n})$ с равными весами $\rho_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ любая периодическая функция $f(\vec{x})$ из пространства E_s^α представима в виде суммы только двух компонент из разбиения Коробова:

$$f(\vec{x}) = f_0(\vec{x}) + f_1(\vec{x}).$$

Ясно, что компонента $f_1(\vec{x}) = A_{M(\vec{n})}f(\vec{x})$ и поэтому она имеет явное выражение

$$f_1(\vec{x}) = \frac{1}{n_1\ldots n_s}\sum_{k_1=0}^{n_1-1}\ldots\sum_{k_s=0}^{n_s-1} f\left(\left\{\frac{k_1}{n_1}+x_1\right\}, \ldots, \left\{\frac{k_s}{n_s}+x_s\right\}\right). \tag{116}$$

Квадратурная формула с обобщенной равномерной сеткой $M(\vec{n})$ и равными весами $\rho_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ является частным случаем квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой с равными единичными весами, поэтому для неё граничной функцией из класса $E_s^2(1, \frac{6}{\pi^2}) \subset E_s^2(1)$ будет функция (см. [3])

$$\begin{aligned} h(x_1, \ldots, x_s) = 3^s(1-2\{x_1\})^2\ldots(1-2\{x_s\})^2 = \\ = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}}{\psi(m_1)\ldots\psi(m_s)}, \end{aligned} \tag{117}$$

где

$$\psi(m) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = 0, \\ \frac{\pi^2}{6}m^2 & \text{при} \quad m \neq 0, \end{cases} \tag{118}$$

$$\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 h(x_1, \ldots, x_s)\,dx_1\ldots dx_s = 1. \tag{119}$$

Лемма 12. *Справедливо равенство*

$$\frac{3}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-2\left\{\frac{k}{n}+x\right\}\right)^2 = 1 + \frac{2}{n^2} - \frac{12}{n^2}\{nx\}\left(1-\{nx\}\right). \tag{120}$$

Лемма 13. *Для обобщенной равномерной сетки $M(\vec{n})$, функции $h(\vec{x})$ и компоненты $h_1(\vec{x})$ из разбиения Коробова справедливо равенство*

$$h_1(\vec{x}) = \prod_{j=1}^{s}\left(1 + \frac{2}{n_j^2} - \frac{12}{n_j^2}\{n_jx_j\}\left(1-\{n_jx\}\right)\right). \tag{121}$$

Из последней леммы видно, что значение погрешности приближенного интегрирования для функции $h(\vec{x})$ по модифицированной обобщенной равномерной сетке $M(\vec{n}, \vec{\beta})$ равна $h_1(\vec{\beta})$ и пробегает несимметричный относительно 1 промежуток $\left[\prod_{j=1}^s\left(1-\frac{1}{n_j^2}\right); \prod_{j=1}^s\left(1+\frac{2}{n_j^2}\right)\right]$, хотя математическое ожидание этой погрешности равно 1.

9. Обобщенные неравномерные сетки

Классические неравномерные сетки $M(P)$ Коробова, координаты точек которых выражаются через степенные функции по модулю P:

$$M_k = \left(\left\{\frac{k}{P}\right\}, \left\{\frac{k^2}{P}\right\} \dots, \left\{\frac{k^s}{P}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \dots, P), \tag{122}$$

где $P = p$ или $P = p^2$ и p — нечетное простое число, имеют для нормированной тригонометрической суммы соотношение

$$\left|S^*_{M(P)}(\vec{m})\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{s-1}{\sqrt{P}} & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = 1, \\ 1 & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = p. \end{cases} \tag{123}$$

Поведение рациональных тригонометрических сумм достаточно сложное, поэтому мы не можем дать исчерпывающее описание разбиения Коробова для неравномерных сеток. Можно утверждать только следующее: $K_4 = \emptyset$, $K_1 = P\mathbb{Z}^s$, при $P > (s-1)^2$ имеем $K_0 \bigcup K_3 \supset \mathbb{Z}^s \setminus p\mathbb{Z}^s$. Если $P = p$, то $K_2 = \emptyset$. Если $P = p^2$, то $K_2 \subset p\mathbb{Z}^s \setminus P\mathbb{Z}^s$.

Из вида неравномерных сеток вытекает одно обобщение их, связанное с рассмотрением произвольного P. Такое обобщение приводит к необходимости использовать для оценок погрешности общие рациональные тригонометрические сумм, которые имеют другой вид оценок чем сумм по простому модулю, или по квадрату простого.

Другое обобщение неравномерных сеток возникает из использования конструкции произведения сеток.

Пусть p — нечетное простое число, тогда рассмотрим сетку $M_2(p) = M(p) \cdot M(p)$. Очевидно, что $|M_2(p)| \leqslant p^2$. Сетка $M_2(p)$ имеет вид

$$M_2(p) = \left\{\left(\left\{\frac{x+y}{p}\right\}, \left\{\frac{x^2+y^2}{p}\right\}, \dots, \left\{\frac{x^s+y^s}{p}\right\}\right) \middle| \, 0 \leqslant x, y \leqslant p-1\right\}. \tag{124}$$

Для нормированных тригонометрических сумм сетки $M_2(p)$ имеем:

$$\left|S^*_{M_2(p)}(\vec{m})\right| = \left|S^*_{M(p)}(\vec{m})\right|^2 \leqslant \begin{cases} \dfrac{(s-1)^2}{p} & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = 1, \\ 1 & \text{при } (m_1, \dots, m_s, p) = p. \end{cases} \tag{125}$$

Отсюда следует, что если $N = |M_2(p)|$, то погрешность приближенного интегрирования с помощью обобщенных неравномерных сеток $M_2(p)$ имеет $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, аналогичную оценки погрешности неравномерных сеток Коробова.

Ещё один класс неравномерных сеток получается, если брать произведение неравномерных сеток по разным модулям. Пусть $p_1, \dots, p_k$ — различные нечетные простые числа, тогда рассмотрим сетку

$$M_s(\vec{p}) = M_s(p_1, \dots, p_k) = M(p_1) \cdot \ldots \cdot M(p_k).$$

Очевидно, что $N = |M_s(p_1, \dots, p_k)| = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$. Сетка $M_s(p_1, \dots, p_k)$ имеет

$$M_s(p_1, \dots, p_k) = \left\{\left(\left\{\sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{p_j}\right\}, \left\{\sum_{j=1}^{k} \frac{x_j^2}{p_j}\right\}, \dots, \left\{\sum_{j=1}^{k} \frac{x_j^s}{p_j}\right\}\right) \middle| \begin{array}{l} 0 \leqslant x_j \leqslant p_j - 1 \\ j = 1, 2, \dots, k \end{array}\right\}. \tag{126}$$

Для нормированных тригонометрических сумм сетки $M_s(\vec{p})$ имеем:

$$\left|S^*_{M_s(\vec{p})}(\vec{m})\right| = \prod_{j=1}^{k} \left|S^*_{M(p_j)}(\vec{m})\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{(s-1)^t}{\sqrt{\prod\limits_{\nu=1}^{t} p_{j_\nu}}} & \text{при } (m_1, \dots, m_s, N) = \frac{N}{\prod\limits_{\nu=1}^{t} p_{j_\nu}}, \\ 1 & \text{при } (m_1, \dots, m_s, N) = N. \end{cases} \tag{127}$$

Теорема 16. *Для дзета-функции обобщенной неравномерной сетки $M_s(\vec{p})$ справедлива оценка*

$$\zeta(\alpha, 1|M_s(\vec{p})) \leqslant \frac{s^k(1+2\zeta(\alpha))^s}{\sqrt{N}}. \tag{128}$$

Последняя теорема позволяет сделать вывод, что наилучшая оценка погрешности получается для обычных неравномерных сеток, хотя порядок во всех этих случаях одинаковый.

10. Параллелепипедальные сетки

Рассмотрим бесконечную последовательность попарно взаимно простых чисел N_1, N_2, $\ldots$, $N_k,\ldots$. Например, можно рассмотреть последовательность различных простых чисел. Бесконечная последовательность параллелепипедальных сеток $M(\vec{a}_j, N_j)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ порождает концентрический мультипликативный алгоритм приближенного интегрирования $< M^*(\vec{b}_j, N^*_j), \Delta >$ $(j = 1, 2, \ldots)$ с правилом остановки $\Delta = \Delta(f(\vec{x}), M^*(\vec{b}_j, N^*_j))$, выражаемым через мультипликативную дискретную дисперсию и сеточный размах, а параллелепипедальная сетка $M^*(\vec{b}_j, N^*_j)$ является произведением параллелепипедальных сеток

$$M^*(\vec{b}_j, N^*_j) = \prod_{i=1}^{j} M(\vec{a}_i, N_i), \quad N^*_j = N_1 \cdot \ldots \cdot N_j. \tag{129}$$

Для произведения двух параллелепипедальных сеток можно уточнить результат об оценке мультипликативной дискретной дисперсии.

Прежде всего заметим, что для случая параллелепипедальной сетки M с равными весами нормированная тригонометрическая сумма $S^*_M(\vec{m})$ принимает только два значения 0 и 1:

$$S^*_M(\vec{m}) = \delta_\Lambda(\vec{m}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \vec{m} \in \Lambda, \\ 0 & \text{при } \vec{m} \notin \Lambda, \end{cases} \tag{130}$$

где Λ — решётка решений линейного сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N}. \tag{131}$$

Таким образом, $K_0 = \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda$, $K_1 = \Lambda$ и

- подпространство $E_s^{\alpha,K_0} = E_s^{\alpha,\mathbb{Z}^s\setminus\Lambda}$ является ядром линейного оператора A_M сеточных средних для параллелепипедальной сетки M;
- $E_s^{\alpha,K_1} = E_s^{\alpha,\Lambda}$ — неподвижное подпространство, то есть все функции из этого подпространства переходят сами в себя под действием оператора A_M;

Дзета-функция $\zeta(\alpha, p|M)$ параллелепипедальной сетки M с параметром p от этого параметра не зависит и совпадает с гиперболической дзета-функцией решетки решений соответствующего линейного сравнения: $\zeta(\alpha, p|M) = \zeta_H(\Lambda|\alpha)$.

Теорема 17. *Если параллелепипедальная сетка M является произведением двух параллелепипедальных сеток $M = M_1 \cdot M_2$, то для мультипликативной дискретной дисперсии $D^*_M[f(\vec{x})]$ справедливы неравенства*

$$0 \leqslant D^*_M[f(\vec{x})] \leqslant \|f\|^2_{E_s^\alpha} \times$$
$$\times \left(\sum_{j=1}^{t} \zeta^2_H(\Lambda + \vec{m}_j|\alpha) + (\zeta_H(\Lambda_1|\alpha) - \zeta_H(\Lambda|\alpha))\,(1 + \zeta_H(\Lambda|\alpha)) \right), \tag{132}$$

где

$$\zeta_H(\Lambda+\vec{m}_j|\alpha)=\sum_{\vec{m}\in\Lambda}\frac{1}{q^{\alpha}(\vec{m}+\vec{m}_j)}$$

— обобщенная гиперболическая дзета-функция решётки, а $\vec{0}$, $\vec{m}_1$, $\ldots$,$\vec{m}_t$ *— полная система вычетов решётки* Λ_1 *по подрешётки* $\Lambda=\Lambda_1\bigcap\Lambda_2$.

Следующая лемма объясняет почему понятия дискретной дисперсии недостаточно, а необходимо вводить понятие мультипликативной дискретной дисперсии.

Лемма 14. *Для любой параллелепипедальной сетки M и дискретной дисперсии $D^*_M[f(\vec{x})]$ справедливо равенство*

$$D^*_M[f(\vec{x})]=0. \tag{133}$$

Из доказательства леммы видно, что оператор A_M является идемпотентом, то есть $A_M A_M=A_M$ для любой параллелепипедальной сетки M. При условии положительности весов сетки верно и обратное утверждение.

Теорема 18. *Если несмещенный линейный оператор $A_{M,\vec{\rho}}$ взвешенных сеточных удовлетворяет условию идемпотентности $A_{M,\vec{\rho}}A_{M,\vec{\rho}}=A_{M,\vec{\rho}}$ и все веса $\vec{\rho}$ положительные, то сетка M является обобщенной параллелепипедальной сеткой, а веса $\vec{\rho}$ — единичными.*

Приведем ещё несколько теоретических фактов, показывающих, что выработка универсального правила остановки является сложной задачей. Пусть $M_0=\{\vec{0}\}$ — простейшая параллелепипедальная сетка из одного узла и M — произвольная параллелепипедальная сетка из $N>1$ узлов. Тогда, очевидно, $M=M_0\cdot M$, поэтому применима теорема 17. По определению дискретной мультипликативной дисперсии в этом случае имеем

$$D^*_M[f(\vec{x})]=\frac{1}{N}\sum_{\vec{x}\in M}\left|f\left(\vec{0}+\vec{x}\right)-\frac{1}{N}\sum_{\vec{z}\in M}f\left(\vec{z}\right)\right|^2. \tag{134}$$

Если во всех точках сетки M функция $f\left(\vec{x}\right)$ — постоянная величина, то дискретная мультипликативная дисперсия становится нулевой: $D^*_M[f(\vec{x})]=0$.

Для описания этого явления напомним, что $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_s)$, $(a_j,p)=1$ $(j=1,\ldots,s)$, через решётку Λ мы обозначаем решётку решений линейного сравнения (131), и справедливо представление

$$\mathbb{Z}^s=\Lambda\bigcup(\Lambda+\vec{m}_1)\bigcup\ldots\bigcup(\Lambda+\vec{m}_{p-1}), \tag{135}$$

где $\vec{m}_j=(j,0,\ldots,0)\in\mathbb{Z}^s\setminus\Lambda$ $(1\leqslant j\leqslant p-1)$.

Лемма 15. *Если $f\left(\vec{x}\right)\in E_s$ и во всех точках параллелепипедальной сетки $M(\vec{a},p)$ функция $f\left(\vec{x}\right)=C$ — постоянная величина, то для её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ справедливы равенства*

$$\sum_{\vec{m}\in\Lambda+\vec{m}_j}C(\vec{m})=0 \quad \textit{при } j=1,2,\ldots,p-1,$$

$$\sum_{\vec{m}\in\Lambda}C(\vec{m})=C. \tag{136}$$

Как известно, одну и туже парраллелепипедальную сетку можно задать многими способами, но есть общий инвариантный способ описания её как множества точек взаимной решетки Λ^* к решётке Λ, попавших в единичный s-мерный полуоткрытый куб $G_s = [0;1)^s$. Частным случаем ситуации, описанной в лемме 15, является функция $f(\vec{x})$, для которой решётка Λ^* будет множеством периодов, то есть, когда для любого $\vec{x}$ и для любого $\vec{y} \in \Lambda^*$ выполняется равенство $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x})$. В этом случае справедливо более сильное утверждение относительно коэффициентов функции $f(\vec{x})$.

Лемма 16. *Если $f(\vec{x}) \in E_s$ и решётка Λ^* будет множеством периодов функция $f(\vec{x})$, то для её коэффициентов Фурье $C(\vec{m})$ справедливы равенства*

$$C(\vec{m}) = 0 \quad \text{при } \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda, \tag{137}$$

то есть

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\Lambda} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}. \tag{138}$$

11. Комбинированные сетки

В 1992 г. Н. М. Коробов ввел новый класс сеток — комбинированные сетки, основы теории которых были опубликованы в работе [27]. В этой работе впервые Н. М. Коробов применил принципиально новую идею в методе усреднений, которым ранее доказывались теоремы о существовании оптимальных коэффициентов. А именно, если имеется какая-то функция f от оптимальных коэффициентов, для которой среднее арифметическое значение σ по множеству всех наборов коэффициентов заданного вида в количестве P совпадает с каким-то критерием оптимальности, то, перенумеровав все наборы этого вида в порядке возрастания значений этой функции, можно значение функции f от набора с номером $[(P+1)/2]$ оценить величиной 2σ, при этом данная оценка будет справедлива для $[(P+1)/2]$ наборов, по которым можно усреднять значение другой функции. Особенно эффектно эта идея работает, когда f — целочисленная функция, а $\sigma < 1$, тогда получаем более сильное утверждение о том, что для $[(P+1)/2]$ наборов значение $f = 0$. В данной работе примером применения этой идеи являются доказательства всех теорем об алгоритмах построения оптимальных коэффициентов.

Пусть $p \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, $(n,p) = 1$ и $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p.

Комбинированными сетками называются сетки вида

$$M\left(\left\{\frac{k_1}{n} + \frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k_s}{n} + \frac{a_s k}{p}\right\}\right), \tag{139}$$

$k = 1, 2, \ldots, p$; $k_\nu = 1, 2, \ldots, n$ $(1 \leqslant \nu \leqslant s)$.

В [27] доказаны следующие теоремы.

Теорема 19. *Пусть p пробегает последовательность простых чисел, больших s. Существуют оптимальные коэффициенты $a_1, \ldots, a_s$ по модулю p такие, что для любого $\alpha > 1$ выполняются оценки*[7]

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}_r \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \ll \frac{(\ln p)^{\alpha(r-1)}}{p^\alpha} \qquad (r = 1, 2, \ldots, s), \tag{140}$$

где сумма Σ_r распространена на системы целых $(m_1, \ldots, m_s)$, содержащие ровно r величин m_j, отличных от нуля.

[7] Для переменных величин A и $B > 0$ запись $A \ll B$ означает, что $|A| \leqslant CB$ с некоторой константой $C > 0$.

Теорема 20. *Пусть p – простое число, $(n,p)=1$ и $N=n^s p$. Если оптимальные коэффициенты $a_1, \ldots, a_s$ удовлетворяют условию (140), $n \ll \ln p$ и $f \in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы*

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)dx_1\ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{p}\sum_{k_1,\ldots,k_s=1}^{n} f\left(\left\{\frac{k_1}{n}+\frac{a_1 k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{k_s}{n}+\frac{a_s k}{p}\right\}\right) - R_N[f] \tag{141}$$

выполняется оценка

$$R_N[f] \ll \frac{(\ln N)^{\alpha(s-1)}}{N^\alpha}. \tag{142}$$

Из последней теоремы следует справедливость следующего результата.

Теорема 21. *Пусть для целых z функция $H^*_{pn^s}(z)$ определена равенством*

$$H^*_{pn^s}(z) = \frac{3^s}{pn^s}\sum_{k=1}^{p}\sum_{k_1,\ldots,k_s=1}^{n}\left(1-2\left\{\frac{k}{p}+\frac{k_1}{n}\right\}\right)^2\ldots\left(1-2\left\{\frac{kz^{s-1}}{p}+\frac{k_s}{n}\right\}\right)^2, \tag{143}$$

где p — простое число, большее s, и $n \ll \ln p$, $(n,p)=1$.

Если при $z=a$ достигается минимум функции $H^*_{pn^s}(z)$ на интервале $1 \leqslant z \leqslant p-1$, то целые $a_1=1$, $a_2=a$, $\ldots$, $a_s=a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p и для них справедлива оценка (142) в квадратурной формуле (141).

Заметим, что в теоремах 20, 21 используется комбинирование параллелепипедальной сетки по простому модулю и равномерной сетки из n^s точек с небольшим значением n, взаимно простым с этим модулем. Впервые комбинирование двух параллепипедальных сеток по двум различным простым модулям встречалось в теореме 3. Операцию комбинирования сеток удобно называть произведением сеток (см. [4], [21]), и вопросу изучения мультипликативного моноида сеток посвящены работы [11], [12].

О качестве оптимальных коэффициентов $a_1=1$, $a_2=a$, $\ldots$, $a_s=a^{s-1}$ можно судить по величине разности $H_p(a)-1$, которая для наиболее хороших оптимальных параллелепипедальных сеток имеет порядок $O(\ln^{2(s-1)}p/p^2)$. Аналогично о качестве комбинированной сетки с теми же оптимальными коэффициентами можно судить по разности $H^*_{pn^s}(a)-1$, которая имеет порядок $O(\ln^{2(s-1)}p/(pn^s)^2)$.

Для сравнения комбинированных сеток и параллелепипедальных, которые имеют одинаковый порядок убывания погрешности квадратурных формул в зависимости от количества точек сетки, возможно два разных подхода: или сравнивать погрешности приближенного интегрирования одних и тех же функций по квадратурным формулам с разными сетками, но с одинаковым количеством узлов, либо сравнивать величины констант в знаке $O()$ для сеток с разным количеством узлов, но с одинаковым порядком убывания погрешности приближенного интегрирования. В обоих случаях оказывается полезной периодическая функция $3(1-2\{x\})^2$ из класса E_1^2, для которой разложение в ряд Фурье в комплексной форме можно записать в виде (см. [25], с. 149):

$$3(1-2\{x\})^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i m x}}{\psi(m)}, \tag{144}$$

где

$$\psi(m) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad m=0, \\ \frac{\pi^2}{6}m^2, & \text{при} \quad m\neq 0, \end{cases} \qquad \text{и} \quad \int\limits_0^1 3(1-2\{x\})^2dx = 1. \tag{145}$$

В работе [19] построен алгоритм для вычисления оптимальных коэффициентов для комбинированных сеток за $O(N)$ арифметических операций. В работе [10] описаны два алгоритма построения оптимальных коэффициентов для параллелепипедальных сеток по простому модулю и для комбинированных сеток. Проведён численный анализ сравнения качества построенных сеток.

12. Алгебраические сетки

В 1976 году вышла работа [36] К. К. Фролова, в которой впервые появились алгебраические сетки.

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{146}$$

неприводим над полем рациональных чисел и все корни Θ_ν $(\nu = 1, \ldots, s)$ многочлена (146) действительные.

Обозначим через F чисто вещественное алгебраическое поле степени s, порожденное алгебраическим числом $\Theta = \Theta_1$ [5].

Рассмотрим алгебраическую решётку $\Lambda(F)$, которая имеет вид

$$\Lambda(F) = \left\{ \vec{x} = \left(\sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \ldots, \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) \middle| \, \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Алгебраическая решетка $\Lambda(F)$ имеет большое значение в теории обобщенных параллелепипедальных сеток и ее приложений к квадратурным формулам, так как для решетки $\Lambda(t, F) = t \cdot \Lambda(F)$ с $\det \Lambda(t, F) = t^s \det \Lambda(F)$, $N(\Lambda(t, F)) = t^s$ справедлива оценка

$$\zeta_H(\Lambda(t, F) \,|\alpha\,) \ll \frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t, F)}{(\det \Lambda(t, F))^\alpha}$$

и аналогичная оценка справедлива снизу для любой решетки.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \tag{147}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \ldots, t \sum_{\nu=1}^{s} \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \middle| \, \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t \cdot (\Theta_1^{\nu-1}, \ldots \ldots, \Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$.

В связи с этим возникает проблема приближения алгебраических решеток целочисленными. Рассмотрим целочисленную решетку

$$\Lambda Z(t,F)=\left\{\vec{x}=\left(\sum_{\nu=1}^{s}a_{1,\nu}m_\nu,\dots,\sum_{\nu=1}^{s}a_{s,\nu}m_\nu\right)\middle|\,\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\},$$

где $\left|\dfrac{a_{\mu,\nu}}{t}-\Theta_\mu^{\nu-1}\right|<\dfrac{1}{2}$, $a_{\mu,\nu}\in\mathbb{Z}$, $(1\leqslant\nu,\mu\leqslant s)$.

Спрашивается, при каких t величина $q\left(\Lambda Z(t,F)\right)$ будет наибольшей?

Существует ли бесконечная последовательность $t\to\infty$ такая, что

$$q\left(\Lambda Z(t,F)\right)>>t^s\,?$$

13. Обобщенные параллелепипедальные сетки

Согласно определения 5 (стр. 124) обобщенной параллелепипедальной сетки $M(\Lambda)$ решётки Λ мы имеем: $M(\Lambda)=\Lambda^*\cap G_s$.

Для теории квадратурных формул с обобщенными параллелепипедальными сетками принципиальное значение имеют следующие определения.

Определение 24. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s=-1}^{0}\rho(\vec{x}+(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s))=1 \text{ при } \vec{x}\in G_s, \tag{148}$$

$$\rho(\vec{x})=0 \quad \text{при} \quad \vec{x}\notin(-1;1)^s, \tag{149}$$

$$\left|\int_{-1}^{1}\dots\int_{-1}^{1}\rho(\vec{x})e^{2\pi i(\vec{\sigma},\vec{x})}d\vec{x}\right|\leqslant B(\overline{\sigma}_1\dots\overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma}\in\mathbb{R}^s. \tag{150}$$

Определение 25. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1\dots\int_0^1 f(\vec{x})d\vec{x}=(\det\Lambda)^{-1}\sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)}\rho_{\vec{x}}f(\vec{x})-R_{N'(\Lambda)}[f], \tag{151}$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}}=\sum_{\vec{y}\in M_1(\Lambda),\{\vec{y}\}=\vec{x}}\rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda)=|M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка (см. [28])

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)]=\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}|R_{N'(\Lambda)}[f]|\leqslant CB\cdot c_1(\alpha)^s\zeta_H(\Lambda|\alpha), \tag{152}$$

$$\text{где} \quad c_1(\alpha)=2^{\alpha+1}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha)={\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}'(\overline{x}_1\dots\overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Пусть целочисленная решётка Λ задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0,$$

где $a_{\nu\mu}$ — целые числа ($\nu, \mu = 1, \dots, s$). Рассмотрим взаимную решётку Λ^*, которая задается матрицей

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\det\Lambda} & \dots & \frac{A_{s1}}{\det\Lambda} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{A_{1s}}{\det\Lambda} & \dots & \frac{A_{ss}}{\det\Lambda} \end{pmatrix},$$

где величина $A_{\nu\mu}$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{\nu\mu}$ в матрице A.

Отметим, что базису $\vec{\lambda}_\nu = (a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s}) \quad (\nu = 1, \dots, s)$ решётки Λ взаимным базисом $\vec{\lambda}^*_\nu \quad (\nu = 1, \dots, s)$ взаимной решётки Λ^* будут векторы

$$\vec{\lambda}^*_\nu = \left(\frac{A_{\nu 1}}{\det\Lambda}, \dots, \frac{A_{\nu s}}{\det\Lambda}\right) \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Из определения сетки $M(\Lambda)$ следует, что

$$M(\Lambda) = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, 0 \leqslant x_\nu = \frac{k_1 A_{1\nu} + \ldots + k_s A_{s\nu}}{\det\Lambda} < 1\,(\nu = 1, \dots, s);\ \vec{k} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Нетрудно видеть, что понятие обобщенной параллелепипедальной сетки включает как частные случаи все предыдущие сетки: параллелепипедальные, комбинированные, алгебраические, равномерные и обобщенные равномерные сетки.

14. Равномерное распределение, регулярные сетки

Рассмотрим единичный $s+1$-мерный куб $G_{s+1} = [0;1)^{s+1}$. Напомним, что произвольное множество точек $X = \{\vec{x}_\nu | \vec{x}_\nu = (x_{1\nu}, \dots, x_{s+1\nu}), \nu = 1, \dots, N\}$ из G_{s+1} называется сеткой X из N точек или N узлов. Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s+1}) \in [0;1]^{s+1}$ и величина $Z(X, \vec{\alpha})$ равна количеству точек сетки X, лежащих в области $[0;\alpha_1) \times \ldots \times [0;\alpha_{s+1})$, тогда локальным отклонением сетки X называется функция

$$D(X, \vec{\alpha}) = Z(X, \vec{\alpha}) - N\alpha_1 \ldots \alpha_{s+1} \tag{153}$$

от $s+1$ переменных, определенная для всех $\vec{\alpha} \in [0;1]^{s+1}$.

О равномерности распределения узлов сетки в G_{s+1} можно судить по норме локального отклонения в той или иной метрике:

стандартное отклонение в метрике $L_q (q \geqslant 1)$

$$\|D(X)\|_q = \left(\int_0^1 \dots \int_0^1 |D(X, \vec{t})|^q d\vec{t} \right)^{1/q}; \tag{154}$$

отклонение

$$D(X) = \sup_{\vec{t} \in [0;1]^s} |D(X, \vec{t})|; \tag{155}$$

квадратичное отклонение

$$D_2(X) = \int_0^1 \dots \int_0^1 |D(X, \vec{t})|^2 d\vec{t}; \tag{156}$$

q–ое отклонение

$$D_q(X) = \int_0^1 \dots \int_0^1 |D(X, \vec{t})|^q d\vec{t}. \quad (157)$$

В 1954 году Рот [44] показал, что при любом выборе сетки для квадратичного отклонения справедлива оценка снизу

$$D_2(N) \geqslant c_1(s) \ln^s N, \quad (158)$$

где $c_1(s) > 0$. (Здесь и далее все константы положительные).

Как следствие оценки (158) Рот получил оценку снизу для отклонения

$$D(N) \geqslant c_2(s) \ln^{s/2} N. \quad (159)$$

В 1972 году В. Шмидт [46] усилил результат Рота при $s = 1$, показав, что

$$D(N) \geqslant c_3 \ln N. \quad (160)$$

В 1977 году В. Шмидт [47] обобщил оценку Рота снизу для квадратичного отклонения на случай q-ого отклонения

$$D_q(N) \geqslant c_4(s, q) \ln^{sq/2} N \quad (q > 1). \quad (161)$$

Вопрос о точности оценок (158), (160), (161) был решен положительно.

В 1956 году Давенпорт [40] построил сетки при $s = 1$ с

$$D_2(N) \leqslant c_5 \ln N. \quad (162)$$

Были даны и другие доказательства существования сеток при $s = 1$, удовлетворяющих неравенству (162). При этом доказательства были эффективные, позволяющие находить конкретные сетки.

В 1980 году для любого $s > 1$ Рот [45] доказал существование сеток Хэммерсли — Рота с

$$D_2(N) \leqslant c_6(s) \ln^s N. \quad (163)$$

Доказательство Рота неэффективно, так как использовало усреднение по непрерывному параметру сеток Хэммерсли — Рота.

Аналогичный результат для q-ого отклонения получил Чень [38] в 1980 году, опираясь на работу Рота:

$$D_q(N) \leqslant c_7(s, q) \ln^{sq/2} N \quad (q > 0). \quad (164)$$

Чень также пользовался усреднением по непрерывному параметру сеток Хэммерсли — Рота и его результат неэффективен. В работе [39] в 1983 году Ченю удалось, используя модификацию сеток Фора, получить эффективное доказательство теоремы Рота.

Другое эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении было получено в работах [13, 14]. В этих работах для каждого $N \geqslant 3$ рассматривается конечная совокупность модифицированных сеток Хэммерсли — Рота. Показано, что для каждой такой сетки отклонение $D(N) = O(\ln^s N)$. Построены три алгоритма нахождения модифицированных сеток Хэммерсли — Рота, у которых квадратичное отклонение $D_2(N) = O(\ln^s N)$, и тем самым получено эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении. Второй алгоритм требует $O(N^3 \ln N)$ операций для нахождения сетки с $D_2(N) = O(\ln^s N)$. Третий алгоритм позволяет за $O(N^3 \ln N)$ операций строить модифицированные сетки Хэммерсли — Рота с "правильным" порядком квадратичного отклонения, для которых соответствующие модифицированные сетки Хэммерсли — Рота меньших размерностей имеют правильный порядок квадратичного отклонения. Даются алгоритмы построения модифицированных сеток

Хэммерсли — Рота, q-ое отклонение которых $D_q(N) = O(\ln^{\frac{sq}{2}} N)$ для любого $q > 0$. При этом, если в первом алгоритме сетка, вообще говоря, зависит от q, то второй алгоритм гарантирует единую сетку с правильным порядком $D_q(N) = O(\ln^{\frac{sq}{2}} N)$ для любого $q > 0$.

Таким образом, получено эффективное усиление теоремы Ченя о q-ом отклонении за счет устранения зависимости сетки от q.

14.1. Функция ван дер Корпута — Хэммерсли и функции Ченя

Пусть для натурального $p \geqslant 2$, произвольное целое $h \geqslant 0$ и $P = p^h$. Для произвольного натурального N определим множества:

$$A(N) = \{0, \cdots, N-1\} \quad \text{и} \quad B(N) = \left\{0, \frac{1}{N}, ..., \frac{N-1}{N}\right\}.$$

Для неотрицательного целого n, заданного в p–ичном разложении

$$n = \sum_{\nu \geqslant 0} n_\nu p^\nu, \qquad n_\nu \in A(p),$$

определим функцию ван дер Корпута–Хэммерсли равенством

$$p(n) = \sum_{\nu \geqslant 0} n_\nu p^{-\nu-1}. \tag{165}$$

Лемма 17. *Для любого целого $h \geqslant 0$ функция $p(n)$ взаимнооднозначно отображает $A(P)$ на $B(P)$.*

Лемма 18. *Для любого целого $\alpha \geqslant 0$ и целых $u \in A(p^\alpha)$, $v \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$p(u + p^\alpha v) = p(u) + p^{-\alpha} \cdot p(v).$$

Для неотрицательных целых n и t, заданных в p–ичном разложении

$$n = \sum_{\nu \geqslant 0} n_\nu p^\nu, \qquad t = \sum_{\nu \geqslant 0} t_\nu p^\nu,$$

где $n_\nu, t_\nu \in A(p)$, определим функцию Ченя равенством

$$p(n, t) = \sum_{\nu \geqslant 0} \left\{\frac{n_\nu + t_\nu}{p}\right\} \cdot p^{-\nu}. \tag{166}$$

Заметим, что для функции ван дер Корпута — Хэммерсли справедливо равенство $p(n) = p(n, 0)$.

Лемма 19. *Для любого $t \in A(P)$ функция $p(n, t)$ взаимнооднозначно отображает $A(P)$ на $B(P)$.*

Лемма 20. *Для любого целого $\alpha \geqslant 0$ и целых $u, t \in A(p^\alpha)$, $v, w \geqslant 0$ справедливо равенство*

$$p(u + p^\alpha v, t + p^\alpha w) = p(u, t) + p^{-\alpha} \cdot p(v, w).$$

Определим при фиксированном натуральном h и $P=p^h$, при целом $\alpha\geqslant 0$ и целых n,t

$$f_\alpha(n)=\left\{\begin{array}{rll} 0 & \text{при} & n\not\equiv 0(\bmod p^\alpha)\text{ или } n=0\\ p^{-\tau}\left\{\frac{m}{p}\right\}\left(1-\left\{\frac{m}{p}\right\}\right) & \text{при} & n=p^\tau m,\quad m\not\equiv 0\pmod p,\quad \tau\geqslant\alpha\end{array}\right. \tag{167}$$

$$x(n)=p\left(P\left\{\frac{n}{P}\right\}\right)$$

$$x(n,t)=p\left(P\left\{\frac{n}{P}\right\},P\left\{\frac{t}{P}\right\}\right) \tag{168}$$

Заметим, что $x(n)$, $x(n,t)$ — периодические функции целых аргументов с периодом P по каждому аргументу. Определим величины:

$$S_\alpha(k,n)=\frac{1}{p^{h-\alpha}}\sum_{t\in A(p^{h-\alpha})}(1-\max(x(k+t\cdot p^\alpha),x(n+t\cdot p^\alpha))) \tag{169}$$

$$S_\alpha(k,n,t)=\frac{1}{p^{h-\alpha}}\sum_{t\in A(p^{h-\alpha})}(1-\max(x(k,t+u\cdot p^\alpha),x(n,t+u\cdot p^\alpha))) \tag{170}$$

$$Q_\alpha(k)=\frac{1}{p^{h-\alpha}}\sum_{t\in A(p^{h-\alpha})}(1-\quad x^2(k+t\cdot p^\alpha)) \tag{171}$$

$$Q_\alpha(k,t)=\frac{1}{p^{h-\alpha}}\sum_{u\in A(p^{h-\alpha})}(1-\quad x^2(k,t+u\cdot p^\alpha)) \tag{172}$$

Лемма 21. *При $0\leqslant k,n\leqslant P-1$ справедливо равенство*

$$S_\alpha(k,n)=1+\frac{1}{2P}-\frac{1}{2p^\alpha}-\max\left(x\left(p^\alpha\left\{\frac{k}{p^\alpha}\right\}\right),x\left(p^\alpha\left\{\frac{n}{p^\alpha}\right\}\right)\right)-f_\alpha(\mid k-n\mid).$$

Лемма 22. *При $0\leqslant k,n\leqslant P-1$ справедливы равенства*

$$S_\alpha(k,n,t)=1+\frac{1}{2P}-\frac{1}{2p^\alpha}-f_\alpha(\mid k-n\mid)-$$

$$-\max\left(x\left(p^\alpha\left\{\frac{k}{p^\alpha}\right\},p^\alpha\left\{\frac{t}{p^\alpha}\right\}\right),x\left(p^\alpha\left\{\frac{n}{p^\alpha}\right\},p^\alpha\left\{\frac{t}{p^\alpha}\right\}\right)\right).$$

Лемма 23. *Справедливо равенство*

$$Q_\alpha(k)=1-\frac{1}{3p^{2\alpha}}+\frac{1}{2p^{h+\alpha}}-\frac{1}{6P^2}-x^2\left(p^\alpha\left\{\frac{k}{p^\alpha}\right\}\right)-x\left(p^\alpha\left\{\frac{k}{p^\alpha}\right\}\right)\left(\frac{1}{p^\alpha}-\frac{1}{P}\right)$$

Лемма 24. *Справедливо равенство*

$$Q_\alpha(k,t)=1-\frac{1}{3p^{2\alpha}}+\frac{1}{2p^{h+\alpha}}-\frac{1}{6P^2}-x^2\left(p^\alpha\left\{\frac{k}{p^\alpha}\right\},p^\alpha\left\{\frac{t}{p^\alpha}\right\}\right)-$$

$$-x\left(p^\alpha\left\{\frac{k}{p^\alpha}\right\},p^\alpha\left\{\frac{t}{p^\alpha}\right\}\right)\left(\frac{1}{p^\alpha}-\frac{1}{P}\right)$$

В дальнейшем будем использовать функцию

$$\delta_N(a)=\left\{\begin{array}{lll}1, & \text{если} & a\equiv 0\pmod N\\ 0, & \text{если} & a\not\equiv 0\pmod N.\end{array}\right. \tag{173}$$

Нам потребуется специальное представление характеристической функции отрезка $\left[0,\frac{a}{P}\right]$ в точках $z\in B(P)$.

Лемма 25. *Пусть* $a=\sum\limits_{\nu=0}^{h}a_\nu p^\nu, \qquad 0\leqslant a\leqslant P,$

$$\chi(z,\frac{a}{P})=\begin{cases}1, & \textit{если}\quad 0\leqslant z<\frac{a}{P}\\ 0, & \textit{если}\quad \frac{a}{P}\leqslant z\leqslant 1,\end{cases}$$

тогда для любого целого k справедливо равенство

$$\chi\left(x(k),\frac{a}{P}\right)=a_h+\sum_{\lambda\in A(h)}\sum_{y=1}^{a_{h-\lambda-1}}\delta_{p^{\lambda+1}}(k+y\cdot p^\lambda-P\cdot x(a)).$$

Зададим на множестве $A(P)$ групповую операцию $\oplus$ равенством

$$t_1\oplus t_2=P\left\{\frac{t_1+t_2}{P}\right\},$$

для любых t_1 и t_2 из множества $A(P)$ и обозначим полученную группу через $G(P)$. Очевидно, что $G(P)$ изоморфна $\mathbb{Z}_P$ — группе вычетов по модулю P.

Используя p–ичные разложения элементов множества $A(P)$, определим другую групповую операцию $\odot$ равенством

$$t_1\odot t_2=\sum_{\nu\in A(h)}\left\{\frac{t_{1\nu}+t_{2\nu}}{p}\right\}\cdot p^{\nu+1}$$

и группу с указанной операцией обозначим через $G^*(P)$. Ясно, что $G^*(P)$. изоморфна $\mathbb{Z}_p^h$.

Зададим действие группы $G(P)$ на множестве $B(P)$ с помощью периодизированной функции ван дер Корпута–Хэммерсли следующим равенством: для любых $t\in G(P)$ и $z\in B(P)$

$$t*z=x(t+P\cdot x(P\cdot z)),$$

то есть, если $z=x(n)$, то $t*z=x(n+t)$.

Такое преобразование будем называть арифметическим сдвигом, а $G(P)$ — группой арифметических сдвигов множества $B(P)$.

Аналогично зададим действие группы $G^*(P)$ на множестве $B(P)$ для любых $t\in G^*(P)$ и $z\in B(P)$ с помощью периодизированной функции Чена следующим образом

$$t\bullet z=x(P\cdot x(P\cdot z),t),$$

то есть из $z=x(n)$, следует $t\bullet z=x(n,t)$ и

$$t_1\bullet(t_2\bullet z)=x(n,t_1\odot t_2)=(t_1\odot t_2)\bullet z.$$

Данное преобразование назовем покоординатно-поразрядным сдвигом, а $G^*(P)$ — группой поразрядных сдвигов множества $B(P)$.

14.2. Сетки Хэммерсли

Перейдем к определению сеток Хэммерсли — Рота.

Пусть $p_1,\dots,p_s$ — различные попарно взаимно простые натуральные числа больше 1. Для произвольного натурального $N\geqslant 3$ определим величины

$$h_j=[\ln N/\ln p_j]+1,\ P_j=p_j^{h_j}\ (j=1,\dots,s);\ M=P_1\dots P_s;\ M_j=M/P_j\ (j=1,\dots,s). \qquad (174)$$

Тогда справедливы соотношения

$$N < P_j \leqslant Np_j,\ (M_j, P_j) = 1\ (j = 1, \ldots, s);\ N^s < M \leqslant N^s p_1 \ldots p_s. \tag{175}$$

Через $x_j(n)$ будем обозначать функцию $x(n)$ при $p = p_j$, $h = h_j$, $P = P_j$ $(j = 1, \ldots, s)$. Пусть $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_s)$ — произвольный целочисленный вектор. Для любого целого n полагаем

$$\vec{x}(n, \vec{t}) = \left(x_1(n + t_1), \ldots, x_s(n + t_s), \frac{n}{N}\right). \tag{176}$$

Определение 26. *Модифицированной сеткой Хэммерсли — Рота будем называть сетку*

$$XR(N, \vec{t}) = \{\vec{x}(n, \vec{t}) \,|\, n = 0, \ldots, N - 1\} \tag{177}$$

из N узлов.

Из периодичности $x_j(n)$ с периодом P_j следует, что сетка $XR(N, \vec{t})$ периодически зависит от t_j с периодом P_j $(j = 1, \ldots, s)$. Отсюда вытекает, что при заданном N существует ровно M различных модифицированных сеток Хэммерсли — Рота, то есть порядка N^s различных сеток.

14.3. Сетки Холтона

Пусть $p_1, \ldots, p_s$ попарно взаимно простые числа, например, первые s простых чисел.

Рассмотрим пару $\vec{p}$-ичных сеток $X = XR(N)$, $\quad Y = X(N)$, где

$$XR(N) = \left\{(x_1(n), \ldots, x_s(n), \frac{n}{N}) \mid n \in A(N)\right\} \tag{178}$$

— сетка Хэммерсли,

$$X(N) = \{(x_1(n), \ldots, x_s(n)) \mid n \in A(N)\} \tag{179}$$

— сетка Холтона.

Модифицированные сетки Хэммерсли-Рота $XR(N, \vec{t})$, предложенные Н. М. Добровольским в работах [13, 14] имеют вид

$$XR(N, \vec{t}) = \left\{(x_1(n + t_1), \ldots, x_s(n + t_s), \frac{n}{N}) \mid n \in A(N)\right\} \tag{180}$$

и их совокупность образует G-орбиту сетки Хэммерсли.

Определение 27. *Сеткой Хэммерсли-Рота-Чена будем называть сетку вида*

$$XRC(N, \vec{t}) = \left\{(x_1(n, t_1), \ldots, x_s(n, t_s), \frac{n}{N}) \mid n \in A(N)\right\}. \tag{181}$$

Очевидно, что множество всех сеток Хэммерсли-Рота-Чена образуют G^*-орбиту сетки Хэммерсли.

Определение 28. *Модифицированной сеткой Холтона будем называть сетку вида*

$$X(N, \vec{t}) = \{(x_1(n + t_1), \ldots, x_s(n + t_s)) \mid n \in A(N)\}. \tag{182}$$

Определение 29. *Сеткой Холтона-Чена будем называть сетку вида*

$$XC(N, \vec{t}) = \{(x_1(n, t_1), \ldots, x_s(n, t_s),) \mid n \in A(N)\}. \tag{183}$$

Ясно, что множества модифицированных сеток Холтона и сеток Холтона-Чена образуют соответственно G-орбиту и G^*-орбиту сетки Холтона.

14.4. Сетки Фора

Пусть $p_1 = p_2 = \ldots = p_s = p \geqslant s$ и p — простое число. В этом случае будем говорить просто о p-ичных сетках. Таким образом имеет место следующее определение.

Определение 30. *p-ичной сеткой I рода или просто p-ичной сеткой называется любая сетка X вида*

$$X = \left\{\left(x(m_{1k}), \ldots, x(m_{sk}), \frac{k}{N}\right) \mid k \in A(N)\right\} \tag{184}$$

при этом целые $m_{\nu k}$ должны удовлетворять условию

$$m_{\nu k_1} \not\equiv m_{\nu k_2} \quad (mod \quad P) \quad при \quad k_1 \neq k_2, \quad (\nu = 1, \ldots, s). \tag{185}$$

Таким образом, p-ичная сетка является N-подмножеством декартового произведения:

$$B^s(P) \times B(N), \tag{186}$$

при этом проекция сетки на любую координату состоит из N различных точек.

Определение 31. *p-ичной сеткой II рода называется сетка Y вида*

$$X = \{(x(m_{1k}), \ldots, x(m_{sk})) \mid k \in A(N)\}, \tag{187}$$

где целые $m_{\nu k}$, где $(\nu = 1, \ldots, s)$ удовлетворяют условиям (185).

Определения 30 и 31 фактически содержатся в работе Фора [41], хотя несколько отличаются в деталях. Так как в этой работе Фора речь идет о регулярных p-ичных сетках, то дадим следующие определения.

Определение 32. *Для любого $N \geqslant 2$ и $p \geqslant s$ обобщенными сетками Фора I и II рода назовем соответственно произвольные регулярные p-ичные сетки X и Y вида (184) и (187).*

Для любого целого $n \geqslant 0$ и $k \geqslant 0$ целого определим функции

$$y_k(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{\frac{1}{p} \sum_{\mu=\nu} C_\mu^\nu \cdot k^{\mu-\nu} \cdot n_\mu\right\} \cdot p^{\nu+1}, \tag{188}$$

где

$$n = \sum_{\nu=0}^{\infty} n_\nu \cdot p^\nu \qquad n_\nu \in A(p), \quad (\nu = 0). \tag{189}$$

Так как в p-ичном разложении (189) целого числа n лишь конечное число p-ичных цифр n_ν отличны от нуля, то все ряды в (188) на самом деле являются конечными суммами.

Определение 33. *Вектор $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_s)$ назовем p-вектором, если $k_j \in A(p)$, $(j = 1, \ldots, s)$ и $k_j \neq k_i$ при $j \neq i$.*

Через $K(p)$ обозначим множество всех p-векторов $\vec{k}$. Очевидно
$\mid K(p) \mid = p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-s+1)$.

Определение 34. *Для любого p-вектора $\vec{k}$ и натурального $N \geqslant 2$ сетками Фора $F(N, \vec{k})$, $F^*(N, \vec{k})$ назовем p-ичную сетку вида*

$$F(N, \vec{k}) = \left\{(x(y_{k_1}(n)), \ldots, x(y_{k_s}(n)), \frac{n}{N}) \mid n \in A(N)\right\}, \tag{190}$$

$$F^*(N, \vec{k}) = \{(x(y_{k_1}(n)), \ldots, x(y_{k_s}(n))) \mid n \in A(N)\}. \tag{191}$$

Определение 35. *Для любого p-вектора $\vec{k}$ и натурального $N \geqslant 2$, $\vec{t} \in A^s(P)$ модифицированными сетками Фора I и II рода назовем соответственно сетки $F(N,\vec{k},\vec{t})$ и $F^*(N,\vec{k},\vec{t})$ вида*

$$F(N,\vec{k},\vec{t}) = \left\{(x(y_{k_1}(n)+t_1),\ldots,x(y_{k_s}(n)+t_s),\frac{n}{N}) \mid n \in A(N)\right\}, \tag{192}$$

$$F^*(N,\vec{k},\vec{t}) = \{(x(y_{k_1}(n)+t_1),\ldots,x(y_{k_s}(n)+t_s)) \mid n \in A(N)\}. \tag{193}$$

Определение 36. *Для любого p-вектора $\vec{k}$ и натурального $N \geqslant 2$, $\vec{t} \in A^s(P)$ сетками Фора-Чена I и II рода назовем соответственно сетки $FC(N,\vec{k},\vec{t})$ и $FC^*(N,\vec{k},\vec{t})$ вида*

$$FC(N,\vec{k},\vec{t}) = \left\{(x(y_{k_1}(n),t_1),\ldots,x(y_{k_s}(n),t_s),\frac{n}{N}) \mid n \in A(N)\right\}, \tag{194}$$

$$FC^*(N,\vec{k},\vec{t}) = \{(x(y_{k_1}(n),t_1),\ldots,x(y_{k_s}(n),t_s)) \mid n \in A(N)\}. \tag{195}$$

Теорема 22. *Для любого p-вектора $\vec{k}$ и натурального $N \geqslant 2$ сетки $F(N,\vec{k})$ и $F^*(N,\vec{k})$ являются обобщенными сетками Фора I и II рода соответственно.*

Из теоремы 22 следует, что для любого $N \geqslant 2$ множество обобщенных сеток Фора непусто.

Следствие 1. *Для любого p-вектора $\vec{k}$, натурального $N \geqslant 2$ и целочисленного вектора $\vec{t} \in A^s(P)$ следующие сетки $F(N,\vec{k},\vec{t})$, $F^*(N,\vec{k},\vec{t})$, $FC(N,\vec{k},\vec{t})$ и $FC^*(N,\vec{k},\vec{t})$ являются обобщенными сетками Фора.*

Для сеток Фора I и II рода справедливы соотношения

$$\sigma_{s+1}(GF(N,\vec{k})) = \sigma_{s+1}(G^*F(N,\vec{k})) \leqslant c(s,p)\cdot \ln^s N + O(\ln^{s-1} N), \tag{196}$$

$$\sigma_{s}(GF^*(N,\vec{k})) = \sigma_{s}(G^*F^*(N,\vec{k})) \leqslant c(s,p)\cdot \ln^s N + O(\ln^{s-1} N), \tag{197}$$

где

$$c(s,p) = \frac{1}{s!}\left(\frac{p^2-1}{6\cdot \ln p}\right)^s.$$

Так как для любого $s \geqslant 2$ существует простое p с $s \leqslant p < 2s$, то для величины $c(s) = \min\limits_{p\geqslant s} c(s,p)$ получим

$$\frac{1}{s!}\left(\frac{s^2-1}{6\cdot \ln s}\right)^s < c(s) < \frac{1}{s!}\left(\frac{2(s^2-1)}{3\cdot \ln s}\right)^s.$$

14.5. Сетки Соболя

Пусть $p_1 = p_2 = \ldots = p_s = 2$. В этом случае будем говорить просто о 2-ичных сетках. Таким образом имеет место следующее определение.

Определение 37. *2-ичной сеткой I рода называется 2-ичная сетка X вида*

$$X = \left\{\left(x(m_{1k}),\ldots,x(m_{sk}),\frac{k}{N}\right) \mid k \in A(N)\right\}, \tag{198}$$

при этом целые $m_{\nu k}$ должны удовлетворять условию

$$m_{\nu k_1} \not\equiv m_{\nu k_2} \pmod{P} \quad \text{при} \quad k_1 \neq k_2, \quad (\nu = 1,\ldots,s). \tag{199}$$

Здесь и далее на протяжении всего параграфа

$$x(n) = \sum_{\nu \in A(h)} n_\nu \cdot 2^{-\nu-1} \quad \text{при} \quad n = \sum_{\nu \in A(h)} n_\nu \cdot 2^\nu, \quad n_\nu \in \{0;1\},$$
$$n \in A(P), \qquad P = 2^h, \qquad N < P \leqslant 2N. \tag{200}$$

Таким образом, 2-ичная сетка является N-подмножеством декартового произведения

$$B^s \times B(N), \tag{201}$$

при этом проекция сетки на любую координату состоит из N различных точек.

Определение 38. *2-ичной сеткой II рода называется сетка Y вида*

$$Y = \{(x(m_{1k}), \dots, x(m_{sk})) \mid k \in A(N)\}, \tag{202}$$

где целые $m_{\nu k}$, $\qquad (\nu = 1, \dots, s)$ удовлетворяют условиям (8.2).

В работах И. М. Соболя [35] исследуются регулярные 2-ичные сетки типа $q = 2^\tau$, поэтому дадим следующие определения.

Определение 39. *Для любых целых $N \geqslant 2$ и $\tau \geqslant 0$ рациональными $\prod_\tau$ сетками I и II рода назовем соответственно произвольные регулярные 2-ичные сетки X и Y типа $q = 2^\tau$ вида (198) и (202).*

Определение 40. *Допустимой последовательностью*

$$V = \{V_0, \dots, V_k, \dots\}$$

назовем произвольную последовательность ненулевых рациональных чисел таких, что

$$V_k \in B(2^{k+1}) \backslash B(2^k).$$

Другими словами, V_k — несократимая дробь со знаменателем 2^{k+1}.

Определение 41. *Функцией Соболя с допустимой последовательностью V назовем функцию $c(n)$, задаваемую равенствами*

$$c(n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^{\infty} n_\mu \cdot v_{\mu\nu} \right\} \cdot 2^{\nu+1}, \tag{203}$$

где

$$n = \sum_{\nu=0}^{\infty} n_\nu \cdot 2^\nu, \quad v_\mu = \sum_{\nu=0}^{\infty} v_{\mu\nu} \cdot 2^{-\nu-1} = \sum_{\nu \in A(\mu+1)} v_{\mu\nu} \cdot 2^{-\nu-1}.$$

Лемма 26. *Пусть $n \in A(2^k)$, тогда $c(n) \in A(2^k)$.*

Определение 42. *Пусть m — натуральное число и матрица B, состоящая из 0 и 1, имеет вид*

$$B = \begin{pmatrix} 1 \quad 0 & & \\ v_{10} \quad 1 & 0 & \\ \ldots\ldots & 1 \quad 0 & \\ v_{m-10} \ldots v_{m-1m-2} 1 & & \end{pmatrix} \tag{204}$$

и целое

$$a \in A(2^{m-1}), \quad a = \sum_{\nu \in A(m-1)} a_\nu \cdot 2^\nu, \tag{205}$$

тогда последовательностью типа (B, a, m) *назовем последовательность*

$$V(B, a) = \{V_0, \ldots, V_k, \ldots\},$$

задаваемую соотношениями

$$V_k = \begin{cases} \sum\limits_{\nu \in A(m)} v_{k\nu} \cdot 2^{-\nu-1}, & k \in A(m) \\ \sum\limits_{\nu \geqslant 0} v_{k\nu} \cdot 2^{-\nu-1}, & k \geqslant m \end{cases} \tag{206}$$

где для $k \geqslant m$ $v_{k\nu}$ *определяются рекуррентными соотношениями*

$$V_{k\nu} = \begin{cases} 2 \cdot \left\{ -\frac{1}{2} \left(\sum\limits_{\mu \in A(m-1)} a_\mu v_{k+\mu-m+1\,\nu} + v_{k-m\,\nu} \right) \right\} & \nu \in A(m) \\ \\ 2 \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(v_{k-m\nu-m} - \sum\limits_{\mu \in A(m-1)} a_\mu \cdot v_{k+\mu-m+1\nu} - v_{k-m\nu} \right) \right\} \text{при} \nu \geqslant m \end{cases} \tag{207}$$

Лемма 27. *Для любой матрицы* B *вида (204) и целого* a *вида (205) последовательность* $V(B, a, m)$ *является допустимой.*

Определение 43. *Для любого натурального* m *и целого* a *вида (205) линейным разностным оператором* $L = L(m, a)$ *называется оператор вида*

$$Lu_i = u_{i+m} + a_{m-1}u_{i+m-1} + \ldots + a_1 u_{i+1} + u_i, \tag{208}$$

где $\{u_i\}$ *последовательность из нулей и единиц.*

Решением линейного разностного сравнения порядка m *с постоянными коэффициентами вида*

$$Lu_i \equiv 0 \pmod 2 \tag{209}$$

называется бесконечная последовательность

$$\ldots, \quad u_{-2}, \quad u_{-1}, \quad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad ,$$

определенная для всех $-\propto < i < \propto$ *и удовлетворяющая сравнению (209).*

В работе [35] рассматривается понятие моноциклического разностного оператора $L = L(m, a)$ и изучены его свойства.

Рассмотрим s последовательностей

$$V(B_j, a_j) = \left\{ V_{jk} = \sum_{\nu \geqslant 0} v_{k\nu}^{(j)} \quad | \quad k \geqslant 0 \right\} \quad (j = 1, \ldots, s)$$

и для неотрицательных целых $\nu_1, \ldots, \nu_s$ с $\sum\limits_{j=1}^{s} \nu_j = \nu - \tau$ систему линейных сравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{\mu \in A(\nu)} n_\mu \cdot v_{\mu\lambda}^{(j)} \equiv d_{j\lambda} \pmod 2 \\ \lambda \in A(\nu_j), \quad (j = 1, \ldots, s) \\ n_\mu \in \{0; 1\} \quad \mu \in A(\nu) \end{cases} \tag{210}$$

из $\nu - \tau$ сравнений с ν неизвестными.

В той же работе доказана следующая теорема.

Теорема 23. **Теорема Соболя.** *Пусть $L(m_1, a_1), \dots, L(m_s, a_s)$ — различные моноциклические операторы, порядки которых равны $m_1, \dots, m_s$ и $B_1, \dots, B_s$ — квадратные матрицы вида (204), порядков $m_1, \dots, m_s$ соответственно. Тогда система сравнений (210) при*

$$\tau = \sum_{j=1}^{s} (m_j - 1) \quad \text{и} \quad \nu \geqslant \tau$$

имеет точно 2^τ решений при любых значениях $d_{j\lambda}$.

Определение 44. *Для любого $N \geqslant 2$ и набора $L(m_1, a_1), \dots, L(m_s, a_s)$ — различных моноциклических операторов, сетками Соболя I и II рода назовем соответственно сетки*

$$S(N, \vec{m}, \vec{a}) = \left\{ \left(x(c_1(n)), \dots, x(c_s(n)), \frac{n}{N} \right) \mid n \in A(N) \right\}, \tag{211}$$

$$S^*(N, \vec{m}, \vec{a}) = \{ (x(c_1(n)), \dots, x(c_s(n))) \mid n \in A(N) \} \tag{212}$$

где $c_j(n)$ — функция Соболя с допустимой последовательностью

$$V = V(B_j, a_j), \quad \vec{a} = (a_1, \dots, a_s)$$

Определение 45. *Для любого $N \geqslant 2$ и $\vec{t} \in A^s(P)$ модифицированными сетками Соболя I и II рода назовем соответственно сетки вида :*

$$S(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t}) = \left\{ \left(x(c_1(n) + t_1), \dots, x(c_s(n) + t_s), \frac{n}{N} \right) \mid n \in A(N) \right\}, \tag{213}$$

$$S^*(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t}) = \{ (x(c_1(n) + t_1), \dots, x(c_s(n) + t_s)) \mid n \in A(N) \}. \tag{214}$$

Определение 46. *Для любого $N \geqslant 2$ и $\vec{t} \in A^s(P)$ сетками Соболя-Чена I и II рода назовем соответственно сетки вида :*

$$SC(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t}) = \left\{ (x(c_1(n), t_1), \dots, x(c_s(n), t_s), \frac{n}{N}) \mid n \in A(N) \right\} \tag{215}$$

$$SC^*(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t}) = \{ (x(c_1(n), t_1), \dots, x(c_s(n), t_s)) \mid n \in A(N) \} \tag{216}$$

Теорема 24. *Для любого $N \geqslant 2$ и сетки Соболя-Чена I и II рода являются рациональными Π_τ сетками с $\tau = \sum\limits_{j=1}^{s} (m_j - 1)$.*

Из теоремы 24 следует, что для любого $N \geqslant 2$ множество рациональных Π_τ сеток непусто при $\tau \geqslant \tau(s)$, где $\tau(s) = min \sum\limits_{j=1}^{s} (m_j - 1)$ и минимум берется по всем наборам различных моноциклических операторов $L(m_1, a_1), \dots, L(m_s, a_s)$.

Следствие 2. *Для любого натурального $N \geqslant 2$ и $\vec{t} \in A^s(P)$ следующие сетки $S(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t})$, $S^*(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t})$, $SC(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t})$ и $SC^*(N, \vec{m}, \vec{a}, \vec{t})$ являются рациональными Π_τ сетками с $\tau = \sum\limits_{j=1}^{s} (m_j - 1)$*

Для сеток Соболя I и II рода справедливы соотношения

$$\sigma_{s+1}(GS(N, \vec{m}, \vec{a})) = \sigma_{s+1}(G^* S(N, \vec{m}, \vec{a})) \leqslant c(s) \cdot \ln^s N + O(\ln^{s-1} N), \tag{217}$$

$$\sigma_s(GS^*(N, \vec{m}, \vec{a})) = \sigma_s(G^* S^*(N, \vec{m}, \vec{a})) \leqslant c(s) \cdot \ln^s N + O(\ln^{s-1} N), \tag{218}$$

где

$$c(s) = \frac{4^\tau}{s!} \left(\frac{1}{ln 4} \right)^s = \frac{4^\tau}{s! \cdot ln^s 4} \quad \text{и} \qquad \tau = \sum_{j=1}^{s} (m_j - 1).$$

14.6. Сетки Смоляка

Рассмотрим s – мерную простейшую декартову сетку

$$M(\nu_1,\ldots,\nu_s)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)\middle|\, 0\leqslant k_j\leqslant 2^{\nu_j}-1\,(j=1,\ldots,s)\right\}$$

из $2^{\nu_1+\ldots+\nu_s}$ точек, которая является декартовым произведением одномерных равномерных сеток, вообще говоря, с различным количеством узлов:

$$M(\nu_1,\ldots,\nu_s)=M(\nu_1)\times\ldots\times M(\nu_s).$$

В случае, когда величины $\nu_1,\ldots,\nu_s$ равны, сетку $M(\nu_1,\ldots,\nu_s)$ называют равномерной, в противном случае — обобщенной равномерной сеткой.

Модифицированной обобщенной равномерной сеткой $M(\nu_1,\ldots,\nu_s;\vec\beta)$ будем называть сетку

$$M(\nu_1,\ldots,\nu_s;\vec\beta)=\left\{\left(\left\{\frac{k_1}{2^{\nu_1}}+\beta_1\right\},\ldots,\left\{\frac{k_s}{2^{\nu_s}}+\beta_s\right\}\right)\middle|\,\begin{array}{c}0\leqslant k_j\leqslant 2^{\nu_j}-1\\ (j=1,\ldots,s)\end{array}\right\},$$

полученную в результате сдвига по модулю 1 на вектор $\vec\beta$. Ясно, что различные сетки будут получаться, когда $\vec\beta$ пробегает полуоткрытый $s-$мерный прямоугольный параллелепипед $\left[0,\frac{1}{2^{\nu_1}}\right)\times\ldots\times\left[0,\frac{1}{2^{\nu_s}}\right)$.

Заметим, что модифицированная равномерная сетка $M(\nu_1,\ldots,\nu_s;\vec\beta)$ совпадает с произведением равномерной сетки $M(\nu_1,\ldots,\nu_s)$ и одноточечной сетки $M=\{\vec\beta\}$:

$$M(\nu_1,\ldots,\nu_s;\vec\beta)=M(\nu_1,\ldots,\nu_s)\cdot M.$$

Напомним, что произведение двух сеток M_1 и M_2 задается равенством

$$M_1\cdot M_2=\{\{\vec x+\vec y\}|\,\vec x\in M_1,\vec y\in M_2\}$$

и для любого вектора $\vec z=(z_1,\ldots,z_s)$ его дробная часть задается равенством

$$\{\vec z\}=(\{z_1\},\ldots,\{z_s\})\,.$$

Кроме этого имеет место разложение модифицированной равномерной сетки в декартово произведение одномерных модифицированных равномерных сеток:

$$M(\nu_1,\ldots,\nu_s;\vec\beta)=M(\nu_1;\beta_1)\times\ldots\times M(\nu_s;\beta_s).$$

Нетрудно видеть, что при $\vec\nu\leqslant\vec\mu$, то есть при $\nu_1\leqslant\mu_1$, $\nu_2\leqslant\mu_2$, …, $\nu_s\leqslant\mu_s$, справедливо вложение $M(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s)\subset M(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s)$. Для произвольных обобщенных равномерных сеток $M(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s)$ и $M(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s)$ справедливо равенство

$$M(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s)\cap M(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s)=M(\min(\nu_1,\mu_1),\min(\nu_2,\mu_2),\ldots,\min(\nu_s,\mu_s))$$

и вложение

$$M(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s)\cup M(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s)\subset$$
$$\subset M(\max(\nu_1,\mu_1),\max(\nu_2,\mu_2),\ldots,\max(\nu_s,\mu_s)).$$

Как было показано в [12], справедливо следующее равенство для произведения обобщенных равномерных сеток

$$M(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s)\cdot M(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_s)=M(\max(\nu_1,\mu_1),\max(\nu_2,\mu_2),\ldots,\max(\nu_s,\mu_s)).$$

В определении обобщенной равномерной сетки для каждой координаты все точки сетки имеют один и тот же знаменатель. Для дальнейшего полезно разбить одномерную сетку на непересекающиеся подсетки, у которых точки представлены несократимыми дробями с равными знаменателями. Положим

$$M^*(\nu)=\begin{cases}\{0\} & \text{при } \nu=0,\\ \left\{\frac{2k+1}{2^\nu}\,\middle|\, 0\leqslant k\leqslant 2^{\nu-1}-1\right\} & \text{при } \nu\geqslant 1\end{cases}=\begin{cases}\{0\} & \text{при } \nu=0,\\ M\left(\nu-1;\frac{1}{2^\nu}\right) & \text{при } \nu\geqslant 1,\end{cases}$$

тогда

$$M(\nu)=\bigcup_{\lambda=0}^{\nu}M^*(\lambda),\quad 2^\nu=|M(\nu)|=\sum_{\lambda=0}^{\nu}|M^*(\lambda)|=\sum_{\lambda=0}^{\nu}2^{\overline{\lambda}-1},$$

где для любого вещественного x полагаем $\overline{x}=\max(1,|x|)$, а для любого конечного множества A через $|A|$ обозначается количество его элементов.

Переходя к многомерному случаю и полагая $M^*(\vec{\nu})=M^*(\nu_1)\times\ldots\times M^*(\nu_s)$, получим

$$M(\vec{\nu})=\bigcup_{\vec{0}\leqslant\vec{\lambda}\leqslant\vec{\nu}}M^*(\vec{\lambda}),\quad |M^*(\vec{\lambda})|=2^{\overline{\lambda}_1+\ldots+\overline{\lambda}_s-s},$$

где $\vec{0}=(0,\ldots,0)$.

Нетрудно видеть, что за исключением особого случая, когда

$$(\beta_1-\beta_2)2^{\max(\nu_1,\nu_2)}\in\mathbb{Z},$$

две модифицированные равномерные сетки $M(\nu_1;\beta_1)$ и $M(\nu_2;\beta_2)$ не имеют общих точек. Очевидно, что и при $\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$ общего положения модифицированные равномерные сетки $M(\vec{\nu}_1;\vec{\beta}_1)$ и $M(\vec{\nu}_2;\vec{\beta}_2)$ не имеют общих точек.

Введем обозначение: для натурального $q\geqslant s$

$$A_s(q)=\{\vec{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\mathbb{N}^s\,|\,\nu_1+\ldots+\nu_s\leqslant q,\,\nu_j\geqslant 1\,(j=1,\ldots,s)\},$$
$$B_s(q)=\mathbb{N}^s\setminus A(q)=\left\{\vec{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\mathbb{N}^s\,\middle|\,\begin{array}{c}\nu_1+\ldots+\nu_s>q,\\ \nu_j\geqslant 1\,(j=1,\ldots,s)\end{array}\right\},$$
$$C_s(q)=\{\vec{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\mathbb{N}^s\,|\,\nu_1+\ldots+\nu_s=q,\,\nu_j\geqslant 1\,(j=1,\ldots,s)\}.$$

Ясно, что

$$A_s(q)=\bigcup_{k=s}^{q}C_s(k),\quad B_s(q)=\bigcup_{k=q+1}^{\infty}C_s(k).$$

Из комбинаторики известно, что для количеств элементов в множествах $C_s(q)$ и $A_s(q)$ справедливы равенства

$$|C_s(q)|=C_{q-1}^{s-1},\quad |A_s(q)|=\sum_{k=s}^{q}C_{k-1}^{s-1}=\sum_{k=s}^{q}\left(C_k^s-C_{k-1}^s\right)=C_q^s.$$

Последнее равенство становится совсем очевидным, если учесть взаимнооднозначное соответствие $(\nu_1,\ldots,\nu_s)\leftrightarrow(\nu_1,\ldots,\nu_{s+1})$, где $\nu_{s+1}=q+1-(\nu_1+\ldots+\nu_s)$, между элементами множества $A_s(q)$ и множества $C_{s+1}(q+1)$.

Сетка Смоляка $Sm(q,s)$ с параметром $q\geqslant s$ определяется как объединение всех простейших декартовых сеток $M(\nu_1,\ldots,\nu_s)$ с

$$\max(q-s+1,s)\leqslant\nu_1+\ldots+\nu_s\leqslant q,\quad \nu_1,\ldots,\nu_s\geqslant 1.$$

Таким образом

$$Sm(q,s)=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)\middle|\begin{array}{c}0\leqslant k_j\leqslant 2^{\nu_j}-1\ (j=1,\ldots,s),\ \nu_1,\ldots,\nu_s\geqslant 1,\\ \max(s,q-s+1)\leqslant \nu_1+\ldots+\nu_s\leqslant q\end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\ldots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)\middle|\, 0\leqslant k_j\leqslant 2^{\nu_j}-1\,(j=1,\ldots,s),\vec{\nu}\in\bigcup_{k=0}^{\min(q-s,s-1)}C_s(q-k)\right\}.$$

В работах [32] — [34] сетки $Sm(q,s)$ использовались для построения квадратурных и интерполяционных формул с весами, и для них на различных классах функций были получены результаты сравнимые с наилучшими из известных.

Модифицированной сеткой Смоляка будем называть сетку

$$Sm(q,s,\vec{\beta}_{\vec{\nu}}|\vec{\nu}\in A^*_s(q)),$$

полученную объеденением всех модифицированных обобщенных равномерных сеток $M(\vec{\nu};\vec{\beta}_{\vec{\nu}})$ по $\vec{\nu}\in A^*_s(q)$, где $A^*_s(q)=A_s(q)\setminus A_s(\max(s-1,q-s))$.

Ясно, что если система векторов сдвигов $\vec{\beta}_{\vec{\nu}}$ образует систему общего положения, то модифицированные обобщенные равномерные сетки $M(\vec{\nu};\vec{\beta}_{\vec{\nu}})$ попарно не пересекаются. Поэтому в общем случае имеем

$$\left|Sm(q,s,\vec{\beta}_{\vec{\nu}}|\vec{\nu}\in A^*_s(q))\right|=\sum_{k=0}^{\min(q-s,s-1)}C_{q-k-1}^{s-1}2^{q-k}=$$

$$=\sum_{k=\max(s,\,q-s+1)}^{q}C_{k-1}^{s-1}2^k=O\left(q^{s-1}2^q\right). \tag{219}$$

Естественно изучить величину отклонения этих сеток, как меры равномерности распределения их точек в s–мерном единичном кубе.

В отличии от общего случая модифицированной сетки Смоляка для сетки Смоляка входящие в объединение обобщенные равномерные сетки имеют непустое пересечение. Поэтому этот случай требует особого рассмотрения. Здесь возможно три различных подхода: с учетом кратности точек в объединении или без учета, или с весами из квадратурных формул. В первых двух случаях получаются пародоксальные результаты, согласно которым точки сеток Смоляка раномерно распределены, но величина отклонения у них порядка $O(N\ln^{-1}N)$, где N — количество точек сетки. Этот результат свидетельствует об особой роли весов в квадратурных и интерполяционных формулах, построенных по методу Смоляка.

Задача об оценки отклонения сеток Смоляка была поставлена профессором Н. М. Коробовым в 1969 году и решена Н. М. Добровольским в 1970 году в его курсовой работе. В научном архиве профессора Н. М. Коробова сохранилась рукопись этой курсовой работы Н. М. Добровольского, которую он выполнял под руководством Н. М. Коробова на третьем курсе механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Для произвольной модифицированной сетки Смоляка задача Н. М. Коробова сделана в работе [24].

В данном разделе дается прямой метод оценки погрешности квадратурных формул построенных на основе модифицированных сеток Смоляка, который отличен от методов работ [32] — [34].

Оценки отклонения будут сделаны для сетки квадратурной формулы, построенной методом С. А. Смоляка. Эти формулы строятся для класса функций E_s^α (см. раздел 1.2, стр. 125).

Метод Смоляка указывает способ перенесения квадратурных формул из одномерного случая в многомерный. Основой для метода служит теорема 25, которая дает способ приближения абсолютно сходящегося s-кратного ряда образованного путем перемножения однократных абсолютно сходящихся рядов, если даны приближения этих рядов. Предварительно докажем лемму.

Лемма 28. *Пусть $\rho > 1$, целые $m \geqslant s \geqslant 1$ и*

$$T(\rho) = T(\rho, m, s) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{C_{k-1}^{s-1}}{\rho^k},$$

тогда справедливо равенство

$$T(\rho, m, s) = \frac{1}{\rho^{m-1}} \sum_{k=1}^{s} \frac{C_{m-1}^{s-k}}{(\rho-1)^k}.$$

Теорема 25. *Пусть $\rho > 1$, $A > 0$, $\alpha > 1$, $\alpha_m^{(0,j)} = 0$, заданы ряды*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{|\varphi_m^{(j)}|}{\overline{m}^\alpha}, \quad \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{|\alpha_m^{(\nu,j)}|}{\overline{m}^\alpha} \quad (j = 1, \ldots, s,\ \nu \geqslant 1) \tag{220}$$

и для любого целого $\nu \geqslant 0$ и $j = 1, \ldots, s$ справедливы неравенства:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{|\varphi_m^{(j)} - \alpha_m^{(\nu,j)}|}{\overline{m}^\alpha} \leqslant \frac{A}{\rho^\nu}. \tag{221}$$

Положим $\beta_m^{(\nu,j)} = \alpha_m^{(\nu,j)} - \alpha_m^{(\nu-1,j)}$ $(\nu \geqslant 1,\ j = 1, \ldots, s)$.

При $q \geqslant s$ справедлива оценка:

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \left| \varphi_{m_1}^{(1)} \ldots \varphi_{m_s}^{(s)} - \sum_{\vec{\nu} \in A_s(q)} \beta_m^{(\nu_1,1)} \ldots \beta_{m_s}^{(\nu_s,s)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant A^s (1+\rho)^s C(\rho, s) \frac{q^{s-1}}{\rho^q}, \tag{222}$$

где положительная константа

$$C(\rho, s) = \sum_{k=1}^{s} \frac{1}{(\rho-1)^k (s-k)!}$$

зависит только от s, ρ.

Для выяснения явного вида членов приближающего ряда служит лемма 29.

Лемма 29. *Пусть $q(s) = \min(q-s, s-1)$ и*

$$\omega_{m_1,\ldots,m_s} = \sum_{\vec{\nu} \in A_s(q)} \beta_{m_1}^{(\nu_1,1)} \ldots \beta_{m_s}^{(\nu_s,s)},$$

тогда

$$\omega_{m_1,\ldots,m_s} = \sum_{k=0}^{q(s)} (-1)^k C_{s-1}^k \sum_{\vec{\nu} \in C_s(q-k)} \alpha_{m_1}^{(\nu_1,1)} \ldots \alpha_{m_s}^{(\nu_s,s)}.$$

Для дальнейшего потребуется символ Коробова

$$\delta_m(a) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} e^{2\pi i\frac{la}{m}} = \begin{cases} 1, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{m}, \\ 0, & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{m}, \end{cases}$$

который является характеристической функцией множества целых чисел кратных m на множестве всех целых чисел $\mathbb{Z}$.

Многомерные квадратурные формулы методом Смоляка будем строить на основе квадратурных формул с одномерными модифицированными равномерными сетками, которые описываются леммой 30. Заметим, что в одномерном случае мы имеем дело с обычными формулами прямоугольников со сдвигом β.

Лемма 30. *Пусть $\alpha > 1$, $C > 0$ и $f(x) \in E_1^\alpha(C)$, то есть*

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{2\pi i m x} \quad \text{и} \quad |C_m| \leqslant \frac{C}{\overline{m}^\alpha},$$

тогда при $\nu \geqslant 1$, $N = 2^\nu$ для погрешностей $R_N[f]$ квадратурной формул с модифицированной равномерной сеткой из N узлов

$$f(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{k}{N}+\beta\right\}\right)\sum_{l=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} e^{2\pi i l\left(x-\frac{k}{N}-\beta\right)} - R_N[f(x)], \tag{223}$$

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{k}{N}+\beta\right\}\right) - R_N[f] \tag{224}$$

справедливы оценки:

$$|R_N[f(x)]| \leqslant \frac{C\cdot C_1(\alpha)}{N^{\alpha-1}}, \qquad |R_N[f]| \leqslant \frac{C\cdot C_2(\alpha)}{N^\alpha}. \tag{225}$$

Таким образом из леммы 30 вытекает, что на классах периодических функций квадратурные и интерполяционные формулы с модифицированной равномерной сеткой обладают важным свойством ненасыщаемости (см. [1]. с. 371), то есть они автоматически реагируют на гладкость интегрируемых функций — чем выше гладкость, тем быстрее убывает функционал погрешности приближенного интегрирования или оператор погрешности интерполирования.

Отметим, что для периодических функций квадратурная формула прямоугольников со сдвигом β (224) получается интегрированием интерполяционной формулы (223). Действительно, для интеграла от интерполяционного тригонометрического полинома имеем

$$\int_0^1 \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{k}{N}+\beta\right\}\right)\sum_{l=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} e^{2\pi i l\left(x-\frac{k}{N}-\beta\right)}dx =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{k}{N}+\beta\right\}\right)\sum_{l=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} e^{-2\pi i\left(\frac{lk}{N}+l\beta\right)}\int_0^1 e^{2\pi i l x}dx = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{k}{N}+\beta\right\}\right).$$

Аналогично, интегрируя функцию погрешности интерполирования, получаем значение функционала погрешности приближенного интегрирования

$$\int_0^1 R_N[f(x)]dx = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}-1} C(mN+l)\int_0^1 \left(e^{2\pi i(lx+mN\beta)} - e^{2\pi i(mN+l)x}\right)dx =$$

$$= \sideset{}{'}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C(mN)e^{2\pi i mN\beta} = R_N[f].$$

Многомерные квадратурные формулы, построенные методом Смоляка из одномерных квадратурных формул с модифицированными равномерными сетками, описываются теоремой 26.

Теорема 26. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_s)\in E_s^\alpha(C)$, $q\geqslant s$, тогда для погрешности квадратурной формулы*

$$\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)dx_1\ldots dx_s=$$
$$=\sum_{k=0}^{q(s)}\frac{(-1)^kC_{s-1}^k}{2^{q-k}}\sum_{\vec{\nu}\in C_s(q-k)}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1}\ldots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1}f\left(\left\{\frac{k_1}{2^{\nu_1}}+\beta_{1,\nu_1}\right\},\ldots,\left\{\frac{k_s}{2^{\nu_s}}+\beta_{s,\nu_s}\right\}\right)-$$
$$-R_{N(q)}[f] \qquad (226)$$

справедлива оценка

$$|R_{N(q)}[f]|\leqslant C\cdot C_3(\alpha,s)\frac{q^{s-1}}{2^{\alpha q}}=O\left(\frac{\ln^{(\alpha+1)(s-1)}N(q)}{N^\alpha(q)}\right), \qquad (227)$$

где $N(q)=O\left(q^{s-1}2^q\right)$ — количество точек модифицированной сетки Смоляка

$$Sm\left(q,s,\vec{\beta}_{\vec{\nu}}\middle|\,\vec{\nu}\in A_s^*(q)\right).$$

Замечание 2. *На классе E_s^α наилучший возможный порядок погрешности приближенного интегрирования $O\left(\frac{\ln^{s-1}N}{N^\alpha}\right)$ достигается на квадратурных формулах с весами и алгебраическими сетками, предложенными в 1976 году К. К. Фроловым в работе [36]. Для параллелепипедальных сеток наилучшая оценка $O\left(\frac{\ln^{(s-1)\alpha}N}{N^\alpha}\right)$ была получена Н. С. Бахвалов в 1959 году в работе [2]. Для комбинированных сеток такая же оценка была получена Н. М. Коробовым в 1994 году в работе [27]. Таким образом мы видим, что квадратурные формулы с модифицированными сетками Смоляка сравнимы по порядку погрешности приближенного интегрирования с наилучшими известными квадратурными формулами.*

Отметим важную особенность параллелепипедальных сеток, комбинированных сеток, алгебраических сеток, обобщенных параллелепипедальных сеток и сеток Смоляка. Алгоритмы численного интегрирования по квадратурным формулам с этими классами сеток являются ненасыщаемыми на классах функций E_s^α.

15. Заключение

В данном обзоре нам удалось лишь коротко осветить некоторые вопросы, связанные с многомерными теоретико-числовыми сетками. В основном это были вопросы численного интегрирования функций многих переменных. В этом направлении научных исследований накоплен обширный массив результатов, который говорит о перспективности данного направления.

В стороне остались вопросы связанные с моделированием различных физических (в частности, геофизических процессов) с помощью многомерных теоретико-числовых сеток.

На наш взгляд, в настоящее время было бы полезно проводить такое моделирования, используя весь спектр классических теоретико-числовых сеток.

Во-первых, такой подход дал бы возможность накопить фактический материал результатов компьютерных экспериментов, что позволило бы объективно сравнивать эффективность различных методов моделирования на основе различных сеток.

Во-вторых, теоретико-числовые методы в приближенном анализе позволяют разрабатывать методы генерации равномерно распределенных последовательностей размерности $s \sim 100$ с количеством точек порядка $10^7 - 10^9$, что реально может быть реализовано только на современных суперкомпьютерах, например, на "Ломоносове".

В-третьих, проблема организации доверенных вычислений не сводится только к организации защиты от несанкционированных вмешательств из вне, искажающих результаты, но ещё в большей мере это проблема получения достоверных результатов с оценкой их точности. Наличие большого количества принципиально различных методов генерации теоретико-числовых сеток позволяет говорить о возможности объективной оценки достоверности получаемых результатов.

Наконец, мы считаем, что настало время, когда под руководством А. Д. Гвишиани можно организовать на базе ГЦ РАН совместный семинар по проблеме использования теоретико-числовых методов в геофизике с участием кафедры "Математических и компьютерных методов анализа" Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова и представителей Тульской школы теории чисел.

Авторы от всей души желают академику РАН, доктору физико-математических наук, профессору Алексею Джерменовичу Гвишиани здоровья, долгих лет жизни и неиссякаемой энергии в служении науке и Отечеству!

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

2. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. N 4. С. 3–18.

3. Бочарова Л. П. О граничных функциях некоторых классов // Наукоемкое образование. Традиции. Иновации. Перспективы. Сборник межвузовских научных статей. Тула, АНО-ВО "ТИНО", 2006. С. 198–202.

4. Быковский В. А. Экстремальные кубатурные формулы для анизотропных классов. / Хабаровск, 1995. с. 13. (Препринт.)

5. Гекке Э. Лекции по теории алгебраических чисел. М.–Л.: Гостехиздат 1940.

6. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. Перевод Б. Б. Демьянова, общая редакция И. М. Виноградова, комментарии Б. Н. Делоне. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. 978 с.

7. С. С. Демидов, Е. А. Морозова, В. Н. Чубариков, И. Ю. Реброва, И. Н. Балаба, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Л. П. Добровольская, А. В. Родионов, О. А. Пихтилькова Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2017. Том 18 № 4(64). С. 6-85.

8. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.

9. Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9, вып. 1. С. 82–90.

10. Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник, 2004. Т. 5, вып. 1(9). С. 95–121.

11. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Современные проблемы математики, механики, информатики: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Тула: ТулГУ, 2002. С. 22–23.

12. Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Киселева О. В. О произведении обобщенных параллелепипедальных сеток целочисленных решёток // Чебышевский сборник Тула. 2002. Т. 3, вып. 2(4) С. 43–59.

13. Добровольский Н. М. Эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении // УМН. Т. 39 (123). 1984. С. 155–156.

14. Добровольский Н. М. Оценки отклонений модифицированных сеток Хэммерсли — Рота // Деп. в ВИНИТИ 23.02.84, №1365–84.

15. Н. М. Добровольский Гиперболическая дзета-функция решёток // Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, №6090–84.

16. Добровольский Н. М. Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, №6089–84.

17. Н. М. Добровольский Квадратурные формулы на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$ // Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. №6091–84.

18. Добровольский Н. М., Бочарова Л. П. Пятьдесят лет теоретико-числовому методу в приближенном анализе // Наукоемкое образование. Традиции. Иновации. Перспективы. Сборник межвузовских научных статей. Тула, АНОВО "ТИНО 2006. С. 189–198.

19. Добровольский Н. М., Коробов Н. М. Оптимальные коэффициенты для комбинированных сеток.// Труды IV Международной конференции „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“ Чебышевский сборник. 2001. Т. 2. С. 41–53.

20. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.

21. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5, вып. 1. — Тула, 1999. С. 100–113.

22. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.

23. Добровольский Н. Н. ПОИВС ТМК: Гиперболический параметр сеток с весами // Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии: материалы международной научно-практической конференции. Тула, 3-7 октября 2011. Тула: изд-во ТГПУ им Л. Н. Толстого. С. 266—267.

24. О. В. Киселёва О задаче Коробова для модифицированных сеток Смоляка // Чебышевский сборник. 2007. Т. 8, вып. 4(24). С. 50–104.

25. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. №4. С. 19–25.

26. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

27. Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Мат. заметки. 1994. Т. 55, вып. 2. С. 83–90.

28. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

29. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.

30. Никитин А. Н., Русакова Е. И., Пархоменко Э. И., Иванкина Т. И., Добровольский Н. М. О реконструкции палеотектонических напряжений по данным о пьезоэлектрических текстурах горных пород. // Известия АН СССР. Физика Земли. 1988. N 9. С. 66–74.

31. Никитин А. Н., Русакова Е. И., Пархоменко Э. И., Иванкина Т. И., Добровольский Н. М. Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using Data on Piezoelectric Texstures of Rocks // Izvestiya Earth Physics Vol 24. 1988. No 9. C. 728–734.

32. Смоляк С. А. Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^α и E_s^α // ДАН СССР. 1960. Т. 131. № 5. С. 1028 – 1031.

33. Смоляк С. А. Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // ДАН СССР. 1963. Т. 148, № 5. С. 1042–1045.

34. Смоляк С.А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Дисс. ... к. ф.–м. н. М.: МГУ, 1966.

35. Соболь И. М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. / М.: Наука, 1969.

36. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.

37. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974. 188 с.

38. Chen W. W. L. On irregularities of distribution // Mathematika. 27. 1980. N 2. P. 153–170.

39. Chen W. W. L. On irregularities of distribution II // Quart. J.Math. Oxford (2). 34. 1983. P. 257–279.

40. Davenport H. Note on irregularities of distribution // Mathematika. 3. 1956. P. 131–135.

41. Faure H. Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s) // Acta Arith. 41. 1982. P. 337–351.

42. Halton J. H. On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals. // Numerische Math. 27. № 2 (1960) 84–90 Bd 2 № 2.

43. Hammersley J. M. Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems // Proc. N 4. Acad. Sci. 1960.

44. Roth K. F. On irregularities of distribution // Mathematika. 1. 1954, P. 73–79.

45. Roth K. F. On irregularities of distribution – IV, // Acta Arithm. 37. 1980. P. 65–75.

46. Schmidt W. M. Irregularities of distribution – VII, // Acfa Arithm. 21. 1972. P. 45–50.

47. Schmidt W. M. Irregularities of distribution – X // Number Theory and Algebra (H.Zassenhaus ed.) New York: Academic Press. 1977. P. 311–329.

48. Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984)

REFERENCES

1. Babenko, K.I. 1986, Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.

2. Bakhvalov, N.S. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

3. Bocharova, L.P. 2006, "On the boundary of some classes of functions", Naukoemkoe obrazovanie. Traditsii. Innovatsii. Perspektivy, Sbornik mezhvuzovskikh nauchnykh statej, pp.198–202.

4. Bykovskij, V.A 1995, Ehkstremal'nye kubaturnye formuly dlya anizotropnykh klassov [Extremal cubature formulas for anisotropic classes], Preprint, Khabarovsk, Russia.

5. Hecke E. 1940, Lectures on algebraic number theory. , M. – L.: Gostekhizdat.

6. Gauss K. 1959, The Works on the theory of numbers. Translations of B. B. Demyanov, under the General editorship of I. M. Vinogradov, comments bn. Delaunay. - Moscow: Publishing house of the USSR, 978 p.

7. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol'skii N. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovol'skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil'kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.

8. Dobrovol'skaya, L. P., Dobrovol'skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, "On the error of approximate integration over modified grids", Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

9. Dobrovol'skii, M. N. 2003, "Estimates of sums over a hyperbolic cross", Izvestie Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, vol.9, no. 1, pp. 82-90.

10. Dobrovol'skii, M. N. 2004, "The optimum coefficients of the combined meshes", Chebyshevskij sbornik, vol. 5, no. 1(9), pp. 95–121.

11. Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Kiseleva, O.V. 2002, "On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices", Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki:Tezisy dokladov Vserossijskoj nauchnoj konferentsii, Tula, Russia, pp. 22–23.

12. Dobrovol'skii, M. N., Dobrovol'skii, N. M. & Kiseleva, O.V. 2002, "On the product of generalized parallelepipedal grids of integer lattices", Chebyshevskij sbornik, vol. 3, no. 2(4), pp. 43–59.

13. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "An effective proof of Roth's quadratic deviation theorem", Uspekhi matematicheskikh nauk, vol. 39(123), pp. 155–156.

14. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Estimates of variance of modified grids Hammersly Rota", Dep. v VINITI, no. 1365– 84.

15. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.

16. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.

17. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", Dep. v VINITI, no. 6091–84.

18. Dobrovol'skii, N. M. & Bocharova, L.P. 2006, "Fifty years of the number-theoretic method in the approximate analysis", Naukoemkoe obrazovanie. Traditsii. Innovatsii. Perspektivy, Sbornik mezhvuzovskikh nauchnykh statej, pp.189–198.

19. Dobrovol'skii, N. M. & Korobov, N. M. 2001, "The optimal coefficients for mixed meshes", Chebyshevskij sbornik, vol. 2, pp. 41–53.

20. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.

21. Dobrovol'skii, N. M., Manokhin, E.V., Rebrova, I. YU. & Akkuratova, S.V.1999, "On some properties of normed spaces and algebras of nets", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 5, no. 1, pp. 100–113.

22. Dobrovolsky N. M. Manokhin E. V., Rebrov I. Yu., Rosena A. L. 2001, "Of the continuity of the Zeta function of mesh with weights", Izvestiya TulGU. Ser. Mathematics. Mechanics. Informatics. Vol. 7, no. 1. — Tula, pp. 82–86.

23. Dobrovolsky N. N. 2011, "PODPS TMK: Hyperbolic parameter of grids with weights", Multiscale modeling of structures and nanotechnology: proceedings of the international scientific-practical conference. Tula, 3-7 October 2011. Tula: publishing house of Tula state pedagogical University named after L. N. Tolstoy. P. 266-267.

24. Kiseleva O. V. 2007, "The challenge Korobov for modified grids of Smolyak", Chebyshevskii sbornik. Vol. 8, issue. 4 (24). P. 50–104.

25. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

26. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

27. Korobov, N.M. 1994, "Quadrature formulas with combined grids", Matematicheskie zametki, vol. 55, no. 2, pp. 83–90.

28. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

29. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, Nachala chislennogo analiza [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.

30. Nikitin, A.N., Rusakova, E.I., Parkhomenko, EH.I., Ivankina, T.I. & Dobrovol'skij, N.M. 1988, "On the reconstruction of the paleotectonic stress according to the piezoelectric texture of the rocks", Izvestiya AN SSSR. Fizika Zemli, no. 9, pp. 66–74.

31. Nikitin, A.N., Rusakova, E.I., Parkhomenko, EH.I., Ivankina, T.I. & Dobrovol'skij, N.M. 1988, "Reconstruction of Paleotectonic Stresses Using. Data on Piezoelectric Texstures of Rocks", Izvestiya Earth Physics, vol 24, no 9. pp. 728–734.

32. Smolyak, S.A. 1960, "Interpolation and quadrature formulas on classes W_s^α and E_s^α", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 131, no. 5, pp. 1028–1031.

33. Smolyak, S.A. 1963, "Quadrature and interpolation formulas on tensor products of some classes of functions", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 148, no. 5, pp. 1042–1045.

34. Smolyak, S.A. 1966, On optimal recovery of functions and functionals from them, Ph.D. Thesis, Moscow State University, Moscow, USSR.

35. Sobol', I.M. 1969, Mnogomernye kvadraturnye formuly i funktsii Khaara [Multidimensional quadrature formulas and Haar functions], Nauka, Moscow, USSR.

36. Frolov, K.K. 1976, "Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

37. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

38. Chen, W.W.L. 1980, "On irregularities of distribution II", Mathematika, vol. 27, no. 2. P. 153–170.

39. Chen, W.W.L. 1983, "On irregularities of distribution II", Quart. J.Math. Oxford (2). 34, pp. 257–279.

40. Davenport, H. 1956, "Note on irregularities of distribution", Mathematika, vol. 3, pp. 131–135.

41. Faure, H. 1982, "Discrepance de suites associees a un systeme denumeration (en dimention s)", Acta Arith, vol. 41, pp. 337–351.

42. Halton, J. H. 1960, "On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals", Numerische Math, vol. 27, no. 2, pp. 84–90.

43. Hammersley, J.M. 1960, "Monte-Carlo methods for sobving multivariable problems", Ann. New York Acad. Sci., vol. 86, 844–874.

44. Roth, K.F. 1954, "On irregularities of distribution", Mathematika, 1, pp. 73–79.

45. Roth, K.F. 1980, "On irregularities of distribution - IV", Acta Arithm, 37. pp. 65–75.

46. Schmidt Wolfgang, M. 1972, "Irregularities of distribution -VII", Acfa Arithm, 21, pp. 45–50.

47. Schmidt Wolfgang M. 1977, "Irregularities of distribution - X", Number Theory and Algebra (H.Zassenhaus ed.), pp. 311–329.

48. Weyl H. 1916, "On the uniform distribution of Numbers mod. one", Math. Ann., vol. 77, pp. 313–352.

Получено 23.07.2018
Принято в печать 22.10.2018