

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-103-117

Эволюционные уравнения и случайные графы¹

Лушников Алексей Алексеевич — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН.

e-mail: alex.lushnikov@mail.ru

Аннотация

На примере эволюции случайного графа обсуждается подход к стохастической динамике сложных систем на основе эволюционных уравнений. Для случая графа эти уравнения описывают временные изменения в структуре графа, связанные с процессом случайного добавления в него новых связей. Такой процесс тесно связан с коалесценцией отдельных неприводимых компонент графа и ведет к появлению сингулярностей в спектрах и их моментах в течение конечных промежутков времени. Эти сингулярности возникают вследствие появления гигантской связной компоненты, порядок которой сравним с полным порядком всего графа. В работе демонстрируется метод анализа динамики процесса эволюции случайного графа, основанный на точном решении эволюционного уравнения, которое описывает зависимость от времени производящего функционала для вероятности застать в системе заданное распределение связных компонент графа. Дан вывод нелинейного интегрального уравнения для производящей функции распределения по числу связных компонент и обрисованы методы его анализа. В заключительной части обсуждены возможности применения изложенного подхода для решения ряда эволюционных проблем статистической геодинамики.

Ключевые слова: эволюционные уравнения, конечные случайные графы, циклы.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:

А. А. Лушников, Эволюционные уравнения и случайные графы // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 103–117.

¹Исследование выполнено в рамках Государственного задания ГЦ РАН.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 519.1

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-103-117

Evolutionary equations and random graphs

Lushnikov Alexey Alekseevich — D.Sc., Principal research scientist, Geophysical Center RAS.
e-mail: alex.lushnikov@mail.ru

Abstract

An example of the evolution of a random graph is used to discuss the approach to stochastic dynamics of complex systems based on evolutionary equations. For the case of a graph, these equations describe temporal changes in the structure of the graph associated with the process of randomly adding new bonds to it. Such a process is closely related to the coalescence of individual irreducible components of the graph and leads to the appearance of singularities in the spectra and their moments during finite time intervals. These singularities arise due to the appearance of a giant connected component whose order is comparable with the total order of the entire graph. The paper demonstrates a method for analyzing the dynamics of the process of evolution of a random graph based on the exact solution of an evolutionary equation that describes the time dependence of the generating functional for the probability of finding in the system a given distribution of connected components of the graph. A derivation of the nonlinear integral equation for the generating function distribution on the number of connected components is given and outlined the methods of its analysis. In the concluding part, the possibilities of applying this approach to solving a number of evolutionary problems of statistical geodynamics are discussed.

Keywords: evolutionary equations, finite random graphs, cycles.

Bibliography: 22 titles.

For citation:

A. A. Lushnikov, 2018, "Evolutionary equations and random graphs", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 103–117.

1. Введение

Многие геофизические процессы управляются случайными факторами и поэтому являются привлекательными объектами для использования аппарата эволюционных уравнений. Речь идет о необратимых процессах, в которых состояния системы меняются случайными скачками. Самый простой пример такой системы – обыкновенная диффузия частицы, которая под влиянием внешних факторов совершает случайные скачки в пространстве. В более общем случае состояния задаются векторами в фазовом пространстве, а динамика такой системы описывается уравнением вида

$$\partial_t W(Q, t) = \sum_{Q^+} A(Q^+, Q) W(Q^+, t) - W(Q, t) \sum_{Q^-} A(Q, Q^-), \quad (1)$$

где $A(Q_1, Q_2)$ скорости переходов системы из точки Q_1 фазового пространства в точку Q_2 . В простейшем случае диффузии Q – это точки обычного пространства. Величины скоростей полностью определяются физическими процессами, которые мы хотим рассмотреть. Уравнение (1) мы будем называть эволюционным уравнением. Совершенно ясно, что описанная общая схема может быть применена для решения многих задач дискретного математического анализа [1].

Мы продемонстрируем как такая общая схема может быть применена к решению знаменитой задачи об эволюции случайного графа. Речь пойдет о множестве точек, случайным образом соединяемых ребрами. Ребра добавляются по одному (в среднем) в единицу времени. Такая задача всегда решалась с использованием аппарата комбинаторного анализа, но, как оказалось, аппарат эволюционного уравнения оказался более эффективным для решения этой задачи [2, 3, 4, 5].

Для случая графа уравнение (1) описывает временные изменения в структуре графа, связанные с процессом случайного добавления в него новых ребер. Этот процесс тесно связан с коалесценцией дисперсных частиц и также ведет к появлению сингулярностей в поведении спектров и их моментов в течение конечных промежутков времени. Такие сингулярности возникают вследствие появления гигантских агломератов. В случае графа – это гигантский связный суперграф, порядок которого сравним с полным числом вершин во всем графе.

Рассмотрим набор точек соединенных между собой случайным образом линиями. Такой объект называется случайным конечным графом. Точки называются вершинами, а линии их соединяющие – ребрами. Полная классификация случайных графов и методы их анализа могут быть найдены в работах [7, 8]

Пусть M – полное число вершин в графе, а сам граф состоит из неприводимых компонент, которые не распадаются на независимые части при устранении одного ребра. Каждая реализация графа может быть охарактеризована $\{n_{g,\nu}\}$ – числом неприводимых компонент имеющих в своем составе g вершин (порядок компоненты) и ν ребер. Удобный метод генерации случайного графа – это добавление одного ребра в единицу времени к графу уже содержащему g вершин. Конечно, есть и другие способы генерации, но этот самый простой. Вновь появляющееся ребро меняет состояние графа. Ребро может соединить две неприводимые компоненты, и тогда возникнет одна компонента, порядок которой равен сумме порядков материнских компонент

$$(l, \lambda) + (m, \mu) \longrightarrow (l + m, \lambda + \mu + 1), \quad (2)$$

или ребро может соединить две вершины принадлежащие одной компоненте. Тогда на единицу изменится число ребер в этой компоненте

$$(g, \nu) \longrightarrow (g, \nu + 1). \quad (3)$$

Любая реализация случайного графа задается набором чисел заполнения $\{n_{g,\nu}\}$, числом связных компонент порядка g с ν ребрами. Задача об эволюции графа ставится следующим образом. Нужно найти зависящую от времени вероятность обнаружить граф в заданном состоянии. Комбинаторное решение этой проблемы дано в классических работах Эрдеша и Реньи [6], а также в более поздних работах [7, 9, 10].

Кинетический подход [3, 4] предполагает изменение состояния случайного графа со временем. В этих работах использовалось уравнение Смолуховского описывающее в самом примитивном виде процессы слияния частиц в коллоидных системах и полимерах (см. [11, 12, 13]). Примечательно, что все эти авторы рассматривали эволюцию бесконечных графов, т.е. полное число вершин в графе никак не ограничивалось. Далее, если скорость слияния двух объектов зависела от произведения их масс (для графов это произведение порядков связных компонент), то соответствующее кинетическое уравнение теряет смысл после некоторого конечного критического интервала времени. Этому эффекту было придумано объяснение. Предполагалось, что в критический момент времени в системе образуется бесконечный кластер, который способен поглощать более мелкие объекты. Существование такого кластера никак не следовало из кинетического уравнения Смолуховского, прекрасно описывающего эволюцию системы в докритический период. Хотя такая модель качественно описывала процессы полимеризации, ее неудовлетворительность оставалась очевидной.

Конечные случайные графы рассматривались настоящим автором на основе теории конечных коагулирующих систем [14, 17, 18, 19]. В рамках этой теории рассмотрение ведется на основе эволюционного уравнения для изменения со временем вероятности застать систему в заданном состоянии. Это уравнение в качестве переменных помимо времени содержит бесконечный набор чисел заполнения. Далее, на основе этого уравнения формулируется уравнение для производящего функционала: вместо чисел заполнения вводится набор формальных переменных, линейные операции над которыми позволяют вычислять средние по вероятности. Уравнение для производящего функционала – линейное уравнение второго порядка с бесконечным числом переменных (см. ниже). Это уравнение доступно для анализа и получения внятных аналитических результатов несмотря на то, что число переменных в уравнении бесконечно.

2. Основные уравнения

Пусть есть граф порядка M , содержащий N связных компонент. Каждая компонента характеризуется ее порядком g и степенью заполнения ν . Ясно, что $g - 1 \leq \nu \leq g(g - 1)/2$. Минимальное значение ν соответствует дереву порядка g , а максимальное – полному графу того же порядка.

Любое состояние графа задается набором чисел заполнения

$$Q = (n_{1,0}, n_{2,1}, n_{3,2}, n_{3,3}, \dots, n_{g,\nu}, \dots) = \{n_{g,\nu}\}, \quad (4)$$

где $n_{g,\nu}$ – число связных компонент порядка g с ν ребрами.

Удобный метод генерации случайного графа – добавление одного ребра в единицу времени к графу уже содержащему g вершин. Конечно, есть и другие способы генерации, но этот самый простой.

Вновь появляющееся ребро меняет состояние графа. Ребро может соединить две неприводимые компоненты и тогда возникнет одна компонента, порядок которой равен сумме порядков материнских компонент (уравнение (2)) или ребро может соединить две вершины принадлежащие одной компоненте (уравнение (3)). Тогда на единицу изменится число ребер в этой компоненте.

Данному состоянию Q предшествует два типа состояний,

$$Q^- = \{n_{1,0}, n_{2,1}, n_{3,2}, n_{3,3}, \dots, n_{l,\lambda} + 1 \dots n_{m,\mu} + 1 \dots n_{g,\lambda+\mu} - 1, \dots\} \quad (5)$$

и

$$\tilde{Q}^- = \{n_{1,0}, n_{2,1}, n_{3,2}, n_{3,3}, \dots, n_{g,\nu-1} + 1, n_{g,\nu} - 1, \dots\}. \quad (6)$$

Для помеченных графов эффективность процесса коалесценции пропорциональна lm — числу способов соединить две связные компоненты ребром. Эффективность заполнения связной компоненты пропорциональна $g(g-1)/2 - \nu$ — числу свободных мест, на которые можно поместить ребро.

На этом этапе мы введем вероятность $W(Q, t)$ обнаружить граф в состоянии Q в момент времени t . Для этой вероятности можно написать эволюционное уравнение,

$$\begin{aligned} \frac{dW(Q, t)}{dt} = & \sum_{Q^-} A(Q, Q^-) W(Q^-, t) - \sum_{Q^+} A(Q^+, Q) W(Q, t) \\ & + \sum_{\tilde{Q}^-} B(Q, \tilde{Q}^-) W(\tilde{Q}^-, t) - \sum_{\tilde{Q}^+} B(\tilde{Q}^+, Q) W(Q, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $(Q^+)^- = (Q^-)^+ = Q$ и $(\tilde{Q}^+)^- = (\tilde{Q}^-)^+ = Q$, т.е. состояние Q предшествует состояниям Q^+ и $\tilde{Q}^+$. Скорости переходов A и B выражаются через числа заполнения,

$$A(Q, Q^-) = \frac{1}{2T} n_{l,\lambda}(Q^-) (n_{m,\mu}(Q^-) - \delta_{l,m} \delta_{\lambda,\mu}) \quad (8)$$

и

$$B(Q, \tilde{Q}^-) = \frac{1}{T} \left(\frac{g(g-1)}{2} - \nu + 1 \right) n_{g,\nu-1}(\tilde{Q}^-). \quad (9)$$

Здесь $1/T$ скорость подачи новых ребер и $\delta_{l,m}$ — дельта символ Кронекера. Начальное условие к уравнению (7) считается заданным.

Введем производящий функционал для вероятности

$$\Psi(X, t) = \sum_Q W(Q, t) \prod_{g,\nu} x_{g,\nu}^{n(g,\nu|Q)}, \quad (10)$$

где обозначение $n(g, \nu|Q)$ используется для набора чисел заполнения $n_{g,\nu}$, принадлежащих заданному состоянию Q и $X = \{x_{g,\nu}\}$ — набор независимых формальных переменных.

Уравнение для Ψ легко выводится из (7), (8) и (9),

$$T \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{\mathcal{L}}_f + \hat{\mathcal{L}}_c) \Psi, \quad (11)$$

В правой части этого уравнения стоят два оператора $\hat{\mathcal{L}}_f$ и $\hat{\mathcal{L}}_c$. Оператор $\hat{\mathcal{L}}_f$ отвечает за эволюцию заполнения связного кластера,

$$\hat{\mathcal{L}}_f = \sum_{l,\lambda} \left(\frac{l(l-1)}{2} - \lambda + 1 \right) x_{l,\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{l,\lambda-1}} - \sum_{l,\lambda} \left(\frac{l(l-1)}{2} - \lambda \right) x_{l,\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{l,\lambda}}. \quad (12)$$

Пределы суммирования в первой сумме в правой части включают интервал от $\lambda_{min} = g$ до $\lambda_{max} = [g(g-1)/2 + 1]$, а во второй сумме соответствующие пределы меняются от $\lambda_{min} = g-1$ до $\lambda_{max} = g(g-1)/2$. Более удобно переписать этот оператор так,

$$\hat{\mathcal{L}}_f = \sum_{l,\lambda} \left(\frac{l(l-1)}{2} - \lambda \right) (x_{l,\lambda+1} - x_{l,\lambda}) \frac{\partial}{\partial x_{l,\lambda}}. \quad (13)$$

Теперь суммирование по λ идет от $\lambda_{min} = g - 1$ до $\lambda_{max} = g(g - 1)/2$.

Оператор ответственный за коалесценцию имеет вид,

$$\hat{\mathcal{L}}_c = \frac{1}{2} \sum_{l,\lambda;m,\mu} lm(x_{l+m,\lambda+\mu+1} - x_{l,\lambda}x_{m,\mu}) \frac{\partial^2}{\partial x_{l,\lambda} \partial x_{m,\mu}}. \quad (14)$$

Уравнение (11) заменяет уравнение (7) для вероятности $W(Q, t)$.

Уравнение (11) необходимо дополнить начальными условиями,

$$\Psi(X, t = 0) = \Psi_0(X), \quad (15)$$

где $\Psi_0(x)$ — известный функционал. Например,

$$\Psi_0(X) = x_{1,0}^M \quad (16)$$

для первоначально пустого графа порядка M .

Разумеется,

$$\Psi(X = 1, t) = 1, \quad (17)$$

что соответствует нормировке $W(Q, t)$ на единицу, $\sum_Q W(Q, t) = 1$.

Мы введем операторы чисел заполнения, оператор полного числа связных компонент и оператор полного порядка графа. Эти операторы выглядят следующим образом,

$$\hat{n}_{l,\lambda} = x_{l,\lambda} \frac{\partial}{\partial x_{l,\lambda}}, \quad \hat{N}_l = \sum_{\lambda} \hat{n}_{l,\lambda}, \quad \hat{N} = \sum_{l,\lambda} \hat{n}_{l,\lambda}, \quad \hat{M} = \sum_l l \hat{n}_{l,\lambda}. \quad (18)$$

Любое среднее по вероятности выражается через Ψ . Например, средний спектр неприводимых компонент в графе имеет вид, $\bar{n}_{g,\nu}(t) = \sum_Q n_{g,\nu}(Q) W(Q, t)$,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = \hat{n}_{g,\nu} \Psi(X, t)|_{X=1}. \quad (19)$$

3. Решение эволюционного уравнения

Так как полный порядок графа не меняется в течение эволюционного процесса, мы попытаемся найти решение эволюционного уравнения (14) в виде собственного функционала оператора полного порядка графа $\hat{M}\Psi_M = M\Psi_M$.

$$\Psi_M = \frac{M!}{2\pi i} \oint z^{-(M)} \exp \left(\sum_{g,\nu} a_{g,\nu}(t) x_{g,\nu} z^g \right) dz. \quad (20)$$

Интеграл берется по контуру окружающему точку $z = 0$.

Подстановка (20) в уравнение (14) дает систему уравнений для $a_{g,\nu}(t)$,

$$\begin{aligned} T \frac{da_{g,\nu}}{dt} = & \left[\frac{1}{2} g(g-1) - \nu + 1 \right] a_{g,\nu-1} - \left[\frac{1}{2} g(g-1) - \nu \right] a_{g,\nu} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l,\lambda;m,\mu} l m a_{l,\lambda} a_{m,\mu} \delta_{g,l+m} \delta_{\nu,\lambda+\mu+1} - \frac{1}{2} M g a_{g,\nu} + \frac{g^2}{2} a_{g,\nu}. \end{aligned} \quad (21)$$

Начальные условия к этой системе (21) выбираем в виде:

$$a_{g,\nu}(0) = \delta_{g,1} \delta_{\nu,0}. \quad (22)$$

Легко проверить что это начальное условие соответствует первоначально пустому графу $\Psi(X, 0) = x_{1,0}^M$. Далее, все $a_{g,\nu}(t) = 0$, вне разрешенного интервала $(g-1) \leq \nu \leq g(g-1)/2$.

Для решения уравнения (22) введем производящую функцию для $a_{g,\nu}(t)$.

$$G(z, \zeta; t) = \sum_{g,\nu} z^g \zeta^\nu a_{g,\nu}(t). \quad (23)$$

Уравнение для $G(z, \zeta; t)$ следует из (22),

$$T \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\zeta}{2} \left[\left(z \frac{\partial G}{\partial z} \right)^2 + z \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial G}{\partial z} \right] - (\zeta - 1) \left(\zeta \frac{\partial G}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} z \frac{\partial G}{\partial z} \right) - \frac{M}{2} z \frac{\partial G}{\partial z}. \quad (24)$$

Подстановка $D(z, \zeta; t) = \exp[G(ze^{t/2T}, \zeta; t)]$ сводит это уравнение к линейному,

$$\frac{1}{T} \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\zeta}{2} z \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial D}{\partial z} - (\zeta - 1) \left(\zeta \frac{\partial D}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} z \frac{\partial D}{\partial z} \right). \quad (25)$$

Начальные условия имеют вид,

$$D(z, \zeta; 0) = e^z. \quad (26)$$

Уравнение (25) решается разделением переменных,

$$D(z, \zeta; t) = \sum_{n,\kappa} \Theta_\kappa(t,) Z_{n,\kappa}(\zeta) z^n.$$

Тогда $\Theta_\kappa(t) = e^{\kappa t/T}$ и

$$\kappa Z_{n,\kappa} = \frac{\zeta}{2} n^2 Z_{n,\kappa} + (1 - \zeta) \left(\zeta \frac{dZ_{n,\kappa}}{d\zeta} + \frac{n}{2} Z_{n,\kappa} \right). \quad (27)$$

Здесь κ — константа разделения. Решение этого уравнения имеет вид,

$$Z_{n,\kappa}(\zeta) = b_{n,\kappa} (1 - \zeta)^{n^2/2 - \kappa} \zeta^{\kappa - n/2}. \quad (28)$$

Так как функция D должна быть аналитической при $\zeta = 0$, мы имеем $\kappa - n/2 = s$, где s — неотрицательное целое число. Далее, коэффициенты $b_{n,\kappa}$ определяются начальным условием (26). Легко видеть что

$$b_{n,\kappa} = \frac{1}{n!} \binom{(n^2 - n)/2}{s}.$$

Мы приходим к результату,

$$D(z, \zeta; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} e^{nt/2T} [\zeta e^{t/T} + (1 - \zeta)]^{(n^2 - n)/2}. \quad (29)$$

Для того, чтобы вернуться к $a_{g,\nu}(t)$, мы введем производящую функцию для числа связных компонент. Воспользуемся теоремой Ридделя, которая связывает экспоненциальную производящую функцию всех (связных и несвязных) компонент графа с производящей функцией для числа только связных компонент

$$\ln \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \delta)^{n(n-1)/2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} P_{n-1}(\delta) \frac{z^n}{n!} \quad (30)$$

Здесь введены полиномы $P_g(\delta)$, которые являются производящими функциями для числа связных компонент.

Уравнение (30) позволяет восстановить $A_g(\zeta, t) = \sum_{\nu} a_{g,\nu}(t)\zeta^{\nu}$,

$$A_g(\zeta, t) = \frac{1}{g!} e^{-g(M-1)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{g-1} \zeta^{g-1} P_{g-1}(\zeta e^{t/T} - \zeta). \quad (31)$$

Используя определение P_g , имеем,

$$\delta^{g-1} P_{g-1}(\delta) = \sum_{\nu=g-1}^{g(g-1)/2} C_{g,\nu} \delta^{\nu}, \quad (32)$$

где $C_{g,\nu}$ — число помеченных связных графов порядка g с ν ребрами. Применим (32) для восстановления $a_{g,\nu}(t)$. Получаем,

$$a_{g,\nu}(t) = \frac{1}{g!} e^{-g(M-1)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{\nu} C_{g,\nu}. \quad (33)$$

Теперь найдем среднее число связных компонент. Из (56) и (20) имеем,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = a_{g,\nu}(t) \frac{M!}{2\pi i} \oint z^{-M+g} D(z, 1; t) dz. \quad (34)$$

При $\zeta = 1$ уравнение (29) дает,

$$D(z, 1; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} e^{n^2 t/2T}. \quad (35)$$

Мы приходим к результату,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = \binom{M}{g} e^{(g^2-2Mg+g)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{\nu} C_{g,\nu}. \quad (36)$$

Главный результат этого рассмотрения — точное выражение для среднего спектра связных компонент,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = \binom{M}{g} e^{(g^2-2Mg+g)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{\nu} C_{g,\nu}. \quad (37)$$

Здесь $C_{g,\nu}$ — число связных компонент порядка g , соединенных ν ребрами, а T — характерное время процесса коалесценции. Это время характеризует временную шкалу процесса и зависит от конкретной реализации генерации графа

В большинстве случаев $T \propto M\delta$ и мы будем придерживаться этой калибровки.

Перепишем уравнение (37) в виде,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = \binom{M}{g} \exp(-S_{M,g} t/2T) (e^{t/T} - 1)^{\nu} C_{g,\nu}, \quad (38)$$

где $S_{M,g} = M(M-1)/2 - (M-g)(M-g-1)/2$. Это то же самое, что и уравнение (37). Действительно, $S_{M,g} = -g^2 + 2Mg - g$. Эта величина имеет прозрачный физический смысл: это разница между числом всех возможных пар вершин в графе и числом пар вакантных вершин вне (g, ν) — кластера. Важно подчеркнуть, что первые два сомножителя в правой части уравнения (38) не зависят от степени заполнения компоненты. Поэтому удобно представить выражение для $\bar{n}_{g,\nu}$ в виде произведения двух сомножителей,

$$\bar{n}_{g,\nu}(t) = u_M u_{\infty}. \quad (39)$$

Первый сомножитель не зависит от заполнения,

$$u_M = \frac{M!}{(M-g)!} e^{t(g^2+g)/2T}, \quad (40)$$

а второй не зависит от полного порядка графа M ,

$$u_\infty = \frac{1}{g!} e^{-gt} [(e^{t/T} - 1)]^\nu C_{g,\nu}. \quad (41)$$

В дальнейшем мы уделим внимание большим графам с $M \gg 1$, $g \gg 1$, $M - g \gg 1$, и мы положим также $T = M$ и применим формулу Стирлинга для преобразования факториалов. После несложной алгебры мы получим,

$$\tilde{u}_M = \frac{M^{1-k}}{\sqrt{1-x}} e^{-M[(1-x)\ln(1-x) - (1-x) - tx^2/2]}, \quad (42)$$

$$\tilde{u}_\infty = \frac{1}{g!} e^{-gt} t^\nu C_{g,\nu}. \quad (43)$$

Здесь $x = g/M$ и $k = \nu - g + 1$ — число циклов, а $\tilde{u}_\infty = M^\nu u_\infty$ и $\tilde{u}_M = M^{-\nu} u_M$.

Важно отметить, что фактор u_M имеет максимум при $x = x_c$, что соответствует появлению гигантской компоненты в графе, т.е. x_c — ненулевой корень уравнения

$$t = \frac{1}{x_c} \ln \frac{1}{1-x_c}. \quad (44)$$

4. Производящие функции

Мы введем полиномы $P_g(z)$ как производящие функции для $C_{g,\nu}$,

$$z^{g-1} P_{g-1}(z) = \sum_{\nu=g-1}^{g(g-1)/2} C_{g,\nu} z^\nu. \quad (45)$$

Пределы суммирования здесь — это минимальное число ребер в дереве порядка g и максимальное число ребер $g(g-1)/2$ в полном графе того же порядка. Множитель z^{g-1} введен для того, чтобы сделать минимальную степень z в $P_g(z)$ равной нулю.

Введем экспоненциальную производящую функцию для числа связных компонент,

$$w(\xi, z) = \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} \sum_{\nu=g-1}^{g(g-1)/2} C_{g,\nu} z^\nu = \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} z^{g-1} P_{g-1}(z). \quad (46)$$

Теорема Ридделя [22] позволяет связать $w(\xi, z)$ с экспоненциальной производящей функцией $\mathcal{W}(\xi, z)$ для всех графов порядка g с ν ребрами [20]. Последняя просто находится. Число способов соединить g вершин ν ребрами есть $\binom{g(g-1)/2}{\nu}$. Значит, полином $(1+z)^{g(g-1)/2}$ является производящей функцией числа графов порядка g , имеющих в точности ν ребер. Экспоненциальная производящая функция для этих графов задается формальным рядом,

$$\mathcal{W}(\xi, z) = \sum_{g=0}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} (1+z)^{g(g-1)/2}. \quad (47)$$

Теорема Ридделя гласит,

$$w(\xi, z) = \ln \mathcal{W}(\xi, z). \quad (48)$$

Таким образом, мы приходим к результату,

$$\ln \sum_{g=0}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} (1+z)^{g(g-1)/2} = \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} z^{g-1} P_{g-1}(z). \quad (49)$$

Теперь можно проанализировать полиномы $P_g(z)$.

Продифференцируем обе стороны уравнения (48) по ξ и заметим что

$$\partial_{\xi} \mathcal{W}(\xi, z) = \mathcal{W}[(1+z)\xi, z]. \quad (50)$$

Введем экспоненциальную производящую функцию полиномов $P_g(\xi)$,

$$y(\xi, z) = \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\xi^g}{g!} P_g(z) \quad (51)$$

и выведем интегральное уравнение для нее. С этой целью мы используем тождество

$$\partial_{\xi} w(\xi, z) = y(\xi z, z). \quad (52)$$

Из (48) и (50) получим,

$$\partial_{\xi} w(\xi, z) = \frac{\partial_{\xi} W(\xi, z)}{W(\xi, z)} = \frac{W[(1+z)\xi, z]}{W(\xi, z)}. \quad (53)$$

Результат переписывается так,

$$y(\xi, z) = \frac{W((1+z)\xi, z)}{W(\xi, z)} = W[(1+z)\xi, \xi] e^{-w(\xi, z)}. \quad (54)$$

Используя теорему Ридделя (48) получаем,

$$\ln y(\xi z, z) = w[(1+z)\xi, z] - w(\xi, z). \quad (55)$$

Это равенство дает уравнение для $y(\xi, z)$,

$$\ln y(\xi z, z) = w[(1+z)\xi, z] - w(\xi, z) = \int_{\xi}^{(1+z)\xi} y(xz, z) dx. \quad (56)$$

Замена $\xi z = \zeta$ и $x = \zeta(1+uz)/z$ сводит уравнение (56) к интегральному уравнению [18],

$$\ln y(\zeta, z) = \zeta \int_0^1 y[\zeta(1+uz), z] du. \quad (57)$$

Для дальнейшего удобно также переписать уравнение (57) в виде,

$$y_z(\zeta, z) = Q_z(\zeta, z) y(\zeta, z), \quad (58)$$

где

$$Q(\zeta, z) = \zeta \int_0^1 y[\zeta(1+uz), z] du \quad (59)$$

и индексом обозначается дифференцирование по соответствующей переменной. Суммирование в (37) по ν приводит к выражению для спектра связанных компонент, известное из теории коагуляции в системах с ядром $K(g, l) = gl$ [19],

$$\bar{n}_g(t) = \binom{M}{g} e^{S_{M,g} t / 2T} (e^{t/T} - 1)^{g-1} P_{g-1}(e^{t/T} - 1). \quad (60)$$

5. Циклы

Очевидно, что связные компоненты порядка g , имеющие минимально возможное число ребер $\nu = g - 1$ являются деревьями, т.е. в них не образуется циклов. Поэтому в соответствии с уравнениями (45) и (51) число связных компонент с k циклами есть

$$C_{g,g+k-1} = k!^{-1} d_k P_{g-1}|_{z=0} \quad (61)$$

или

$$C_{g,g+k-1} = \frac{(g-1)!}{k!} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\xi}{\xi^g} \frac{\partial^k y(\xi, z)}{\partial z^k} \Big|_{z=0}. \quad (62)$$

Таким образом, число $U_k(g, t)$ связных компонент с k циклами в соответствии с уравнениями (37) и (62) есть,

$$U_k(g, t) = \binom{M}{g} e^{S_{M,g}/2T} (e^{t/T} - 1)^{g+k-1} \frac{(g-1)!}{k!} \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\xi}{\xi^g} \frac{\partial^k y(\xi, z)}{\partial z^k} \Big|_{z=0}. \quad (63)$$

5.1. Число деревьев в графе

Число деревьев в графе $U_0(g, t)$ выражается через полином $P_{g-1}(0)$. Положив $z = 0$ в уравнении (57) имеем для $y^o = y^o(\xi) = y(\xi, 0)$,

$$\ln y^o = \xi y^o. \quad (64)$$

Отсюда легко восстановить $P_g(0)$,

$$P_g(0) = \frac{g!}{2\pi i} \oint \frac{y^o(\xi) d\xi}{\xi^{g+1}} = (g+1)^{g-1}. \quad (65)$$

Тогда для числа деревьев мы получаем простое выражение,

$$U_0(g, t) = \bar{n}_{g,g+k-1}(t) = \frac{1}{g} \binom{M}{g} e^{(g^2-2Mg+g)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{g-1} g^{g-1}. \quad (66)$$

В асимптотическом пределе для больших графов найдем,

$$U_0(g, t) = \bar{n}_{g,g+k-1}(t) = \frac{M}{gg! \sqrt{1-x}} \times e^{-M[(1-x) \ln(1-x) + x - tx^2/2]} e^{-gt} t^{g-1} g^{g-1}, \quad (67)$$

5.2. Одноцикловые и двуцикловые компоненты

Найдем спектр одноцикловых графов. С этой целью разложим подынтегральное выражение в правой части уравнения (57) по степеням uz ,

$$y[\zeta(1+zu), z] = y(\zeta, z) + \zeta zu \frac{\partial y(\zeta, z)}{\partial \zeta} + \frac{(\zeta zu)^2}{2!} \frac{\partial^2 y(\zeta, z)}{\partial \zeta^2} \dots \quad (68)$$

Подставляя это выражение в уравнение (58), имеем,

$$Q(\zeta, z) = \zeta y + \frac{\zeta^2 z}{2} y_\zeta + \frac{\zeta^3 z^2}{6} y_{\zeta\zeta} \dots \quad (69)$$

При $z = 0$ из уравнений (58) имеем,

$$(y_z)^o = (Q_z)^o y^o. \quad (70)$$

Верхний индекс o означает что аргумент z в соответствующей функции равен нулю. Например, $y^o = y(\zeta, 0)$, $(y_z)^o = \partial_z y(\zeta, z)|_{z=0}$, но $(y_\zeta)^o = y_\zeta^o$.

Уравнение (70) дает,

$$(Q_z)^o = \zeta(y_z)^o + \frac{\zeta^2}{2} y_\zeta^o. \quad (71)$$

Дифференцируя уравнение (63) по ζ и полагая $z = 0$, мы имеем,

$$y_\zeta^o = \frac{(y^o)^2}{1 - \ln y^o} = A_{0,2,1}(\zeta), \quad (72)$$

где

$$A_{a,b,c}(\zeta) = \frac{\zeta^a (y^o)^b}{(1 - \ln y^o)^c}. \quad (73)$$

Таким образом,

$$(y_z)^o = \frac{1}{2} \frac{\zeta^2 (y^o)^3}{(1 - \ln y^o)^2} = \frac{1}{2} A_{2,3,2}. \quad (74)$$

В дальнейшем для краткости аргумент ζ опускается.

В соответствии с уравнением (63) мы имеем,

$$U_1(g, t) = \frac{1}{2} \binom{M}{g} e^{(g^2 - 2Mg + g)t/2T} (e^{t/T} - 1)^g (g - 2)(g - 1)g^{g-3} \int_0^\infty e^{-t} (1 + t/g)^{g-3} dt. \quad (75)$$

Интеграл в правой части выражается через неполную экспоненту $\exp_{g-3} g$.

Точно таким же способом можно рассчитать спектр неприводимых компонент с двумя циклами. Выкладки длинные и здесь не приводятся. Окончательный результат имеет вид

$$y_{zz} = Q_{zz}y + Q_z y_z. \quad (76)$$

Сохраним члены до второго порядка по z в разложении (69) и положим $z = 0$,

$$(Q_{zz})^o = \zeta(y_{zz})^o + \zeta^2(y_{\zeta z})^o + \frac{\zeta^3}{3} y_{\zeta\zeta}^o. \quad (77)$$

Далее, мы продифференцируем уравнение (74) по ζ и получим,

$$(y_{\zeta z})^o = A_{1,3,2} + \frac{3}{2} A_{2,4,3} + A_{2,4,4}. \quad (78)$$

Двойное дифференцирование уравнения (64) дает,

$$y_{\zeta\zeta}^o = 2A_{0,3,2} + A_{0,3,3}. \quad (79)$$

Тогда из уравнения (76) мы окончательно имеем,

$$U_2 = \binom{M}{g} e^{(g^2 - 2Mg + g)t/2T} (e^{t/T} - 1)^{g-1} \left[\frac{5}{3} Z_{g,g-4,2} + \frac{7}{4} Z_{g,g-5,3} + Z_{g,g-5,4} + \frac{1}{4} Z_{g,g-6,4} + \frac{1}{3} Z_{g,g-4,3} \right], \quad (80)$$

где

$$Z_{\alpha,r,\beta} = \frac{\alpha^r}{r!(\beta-1)!} \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} (1 + x/\alpha)^r dx.$$

6. Заключение

В работе продемонстрирован метод исследования временной эволюции случайных графов в самой общей формулировке. Наибольший интерес представляет подход к эволюции нелинейных систем, описание которых в рамках непрерывной математики затруднительно. Вместо этого предлагается сводить систему к множеству точек и задавать эволюционный закон, позволяющий выделять наиболее существенные черты эволюционного процесса. Например, если мы имеем дело с дисперсной системой — множеством изолированных объектов, которые с течением времени сливаются (или, наоборот, распадаются в результате взаимодействия элементов системы между собой, то удобно представлять такую систему случайным графом, а каждый акт взаимодействия моделировать появлением (или исчезновением) ребра между вершинами графа. Так можно смоделировать эволюцию сетей (например, Интернета), появление и развитие трещин на поверхности, возникновение критических явлений во время землетрясений и даже возникновение и развитие интеллекта. Совершенно очевидно, что несмотря на крайнюю простоту исходной схемы (система вершин плюс система ребер) эволюционные свойства модели приводят к абсолютно нетривиальным результатам, таким как образование гигантской компоненты и ее посткритическое развитие.

В течение многих лет в Геофизическом центре РАН под руководством академика Алексея Джерменовича Гвишиани был создан и развивался ДИСКРЕТНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ — направление прикладной математики, нашедшее широкое применение для анализа многих геофизических процессов. Описанный в этой статье метод эволюционных уравнений также оперирует со случайными дискретными объектами. Его применение может привести к дальнейшему развитию тех замечательных результатов, которые были получены в последнее десятилетие в ГЦ РАН.

Автор этой статьи поздравляет Алексея Джерменовича с семидесятилетием и желает ему здоровья и дальнейших творческих успехов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krapivsky, P. L., Redner, S. & Ben-Naim, E. A Kinetic View of Statistical Physics // Cambridge Univ. Press, Cambridge. 2010. Mathematical Reviews (MathSciNet): MR2757286 Zentralblatt MATH: 1235.82040
2. Lushnikov, A. A. Time evolution of a random graphs // J. Phys. A, 2005, vol. 38, pp L777.
3. Ben-Naim, E., & P. L. Krapivsky. Kinetic theory of random graphs: From paths to cycles // Physical Review, 2005, E 71.2 : 026129.
4. Ben-Naim E. & P. L. Krapivsky, Unicyclic components in random graphs // J. Phys., 2004, A 37, L189 (2004).
5. Lushnikov, A. A. Exactly solvable model of a coalescing random graph // Physical Review, 2015, vol. 91, p. 02211
6. Erdős, R & Rényi, A., On the random graphs // A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, 1960, 5, 17–61.
7. Bollobas, B., Random Graphs: (2nd ed.). 2001. Cambridge University Press. ISBN 0-521-79722-5.
8. Albert, R., & Barabási, A-L., Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys., 2002, 74, 47–97.

9. Newman, M. E. J., *Networks: An Introduction*. 2010, Oxford.
10. Cohen, R. & Havlin, S. *Complex networks: structure, robustness and function*. // Cambridge university press. 2010.
11. Flory, P. J., *Molecular Size Distribution in Three Dimensional Polymers I. Gelation* // J. Am. Chem. Soc., Vol. 30, 3083. Flory, P.J. (1941). J. Am. Chem. Soc. 63, 3083 Stockmayer, Walter H.(1944). "Theory of Molecular Size Distribution and Gel Formation in Branched Polymers II. General Cross Linking". Journal of Chemical Physics. 12,4, 125
12. Stockmayer, W.H. Theory of molecular size distribution and gel formation in branched-chain polymers, //J. Chem. Phys. Vol. 11, p. 45.
13. Ziff, R. M. & Stell, G., Kinetics of polymer gelation // J. Chem. Phys., 1980, Vol. 73, 3492–3499.
14. Marcus, A. H., Stochastic coalescence // Technometrics, 1968, 10, 133–143.
15. Aldous, D. J., Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation, coagulation; review of the mean-field theory for probabilists) // Bernoulli, 1999, Vol. 5 3–122.
16. Leyvraz, F., Scaling theory and exactly solved models in the kinetics of irreversible aggregation // Phys. Rep., 2003, Vol. 383, 95–212.
17. Lushnikov A. A., Coagulation in finite systems, // J. Colloid Interface Sci., 1978, Vol. 65 276–285.
18. Lushnikov A. A., From sol to gel exactly // Phys. Rev. Lett., 2004, Vol. 93, 198302.
19. Lushnikov A. A., Sol-gel transition in coagulating systems //Physica D, 2006, Vol. 222, 37.
20. Knuth, D. E., Linear probing and graphs // Algorithmica, 1998, Vol. 22 561–568.
21. Kreweras, G., Une famille de polynomes ayant plusieurs proprietes enumeratives // Period. Math.Hungar., 1980, Vol. 11 309–320.
22. Riddell R. J. & Ulenbeck G. E., On the Theory of the Virial Development of the Equation of State of Monoatomic Gases // J. Chem. Phys. 1953, Vol. 21 2056–2064.

REFERENCES

1. Krapivsky, P. L., Redner, S. & Ben-Naim, E. 2010. "A Kinetic View of Statistical Physics". Cambridge Univ. Press, Cambridge. Mathematical Reviews (MathSciNet): MR2757286 Zentralblatt MATH: 1235.82040
2. Lushnikov, A. A. 2005, "Time evolution of a random graphs" *J. Phys. A* vol. 38, pp L777.
3. Ben-Naim, E., & P. L. Krapivsky. 2005, "Kinetic theory of random graphs: From paths to cycles." *Physical Review E* 71.2 : 026129.
4. Ben-Naim E. & P. L. Krapivsky, 2004 "Unicyclic components in random graphs" *J. Phys. A* 37, L189 (2004).
5. Lushnikov, A. A. 2015. "Exactly solvable model of a coalescing random graph" *Physical Review* vol. 91, p. 02211

6. Erdős, R. & Rényi, A., 1960, "On the random graphs" *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* 5, 17–61.
7. Bollobas, B., 2001. "Random Graphs: (2nd ed.). Cambridge University Press. ISBN 0-521-79722-5.
8. Albert, R., & Barabási, A-L., 2002 "Statistical mechanics of complex networks *Rev. Mod. Phys.* 74, 47–97.
9. Newman, M. E. J., 2010, "Networks: An Introduction". Oxford.
10. Cohen, R. & Havlin, S. 2010, "Complex networks: structure, robustness and function". – Cambridge university press.
11. Flory, P.J., 1941 "Molecular Size Distribution in Three Dimensional Polymers I. Gelation". *J. Am. Chem. Soc.*, Vol. 30, 3083. Flory, P.J. (1941). *J. Am. Chem. Soc.* 63, 3083 Stockmayer, Walter H. (1944). "Theory of Molecular Size Distribution and Gel Formation in Branched Polymers II. General Cross Linking". *Journal of Chemical Physics*. 12,4, 125
12. Stockmayer, W.H. "Theory of molecular size distribution and gel formation in branched-chain polymers *J. Chem. Phys.* Vol. 11, p. 45.
13. Ziff, R. M. & Stell, G., 1980, "Kinetics of polymer gelation *J. Chem. Phys.*, Vol. 73, 3492–3499.
14. Marcus, A. H., 1968, "Stochastic coalescence *Technometrics*, 10, 133–143.
15. Aldous, D.J., 1999 "Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation, coagulation; review of the mean-field theory for probabilists)", *Bernoulli* Vol. 5 3–122.
16. Leyvraz, F., 2003, "Scaling theory and exactly solved models in the kinetics of irreversible aggregation *Phys. Rep.* Vol. 383, 95–212.
17. Lushnikov A. A., 1978, "Coagulation in finite systems *J. Colloid Interface Sci.*, Vol. 65 276–285.
18. Lushnikov A. A., 2004, "From sol to gel exactly" *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 93, 198302.
19. Lushnikov A. A., 2006, "Sol–gel transition in coagulating systems" *Physica D* Vol. 222, 37.
20. Knuth, D. E., 1998, "Linear probing and graphs textit *Algorithmica*, Vol. 22 561–568.
21. Kreweras, G., 1980, "Une famille de polynomes ayant plusieurs propriétés énumératives *Period. Math. Hungar.*, Vol. 11 309–320.
22. Riddell R. J. & Ulenbeck G. E., 1953, On the Theory of the Virial Development of the Equation of State of Monoatomic Gases *J. Chem. Phys.* Vol. 21 2056–2064.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018