ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 4

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-11-25

**Гравитационное сглаживание временных рядов
(спектральные свойства)¹**

Агаян Сергей Мартикович — доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Геофизический центр РАН.

e-mail: s.agayan@gcras.ru

Камаев Дмитрий Альфредович — доктор технических наук, заведующий лабораторией, Научно-производственное объединение «Тайфун».

e-mail: kda@feerc.ru

Богоутдинов Шамиль Рафекович — кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Геофизический центр РАН; старший научный сотрудник, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта РАН.

e-mail: shm@gcras.ru

Павельев Артем Сергеевич — программист, ООО «ШТОРМ Технологии».

e-mail: artem.pavelyev@yandex.ru

Аннотация

Настоящая статья продолжает цикл работ авторов по разработке математических аспектов методов искусственного интеллекта для обработки наблюдений, проведенных под руководством академика А.Д.Гвишиани, начиная с 2000-го года. Она посвящена новому универсальному методу сглаживания, первоначально предназначенному для анализа геофизических временных рядов. Гравитационные сглаживания легли в основу изучения ускорения векового хода главного магнитного поля Земли на основе данных обсерваторий сети ИНТЕРМАГНЕТ. Но свойства оператора сглаживания до сих пор не были изучены. Данная статья — первый шаг в этом направлении.

Ключевые слова: Гравитационное сглаживание, невязка гравитационной гладкости, меры близости, оператор сглаживания, собственные значения, спектральные свойства.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

С. М. Агаян, Д. А. Камаев, Ш. Р. Богоутдинов, А. С. Павельев. Гравитационное сглаживание временных рядов (спектральные свойства) // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 4, с. 11–25.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 16-17-00121).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 4

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-4-11-25

Gravitation smoothing of time series (spectral properties)**Agayan Sergey Martikovich** — D.Sc., Principal research scientist, Geophysical Center RAS.*e-mail: s.agayan@gcras.ru***Kamaev Dmitry Alfredovich** — D.Sc., Chief of laboratory, NPO Taifun, Russian Federal Survey for Hydrometeorology and Environmental Monitoring.*e-mail: kda@feerc.ru***Bogoutdinov Shamil Rafekovich** — PhD, Leading research scientist, Geophysical Center RAS, Moscow; Senior research scientist, Schmidt Institute of Physics of the Earth RAS.*e-mail: shm@gcras.ru***Pavelev Artem Sergeevich** — programmer, SHTORM Technology Ltd.*e-mail: artem.pavelev@yandex.ru***Abstract**

This article continues the cycle of works by authors on the development of mathematical aspects methods of artificial intelligence for the processing of observations conducted under the guidance of academician A.D. Gvishiani, which was began in 2000. It is devoted to a new universal method of smoothing, originally intended for the analysis of geophysical time series. Gravitational smoothing formed the basis for studying the acceleration of the secular course of the Earth's main magnetic field with using of the observational data of the INTERMAGNET network. But the properties of the smoothing operator have not been studied so far. This article is first step to this goal.

Keywords: gravitation smoothing, discrepancy of gravitational smoothing, proximity measures, smoothing operator, eigenvalues, spectral properties.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

S. M. Agayan, D. A. Kamaev, Sh. R. Bogoutdinov, A. S. Pavelev, 2018, "Gravitation smoothing of time series (spectral properties)", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 4, pp. 11–25.

1. Введение

Временные ряды – это одна из наиболее распространенных форм представления исходных данных систем мониторинга в задачах физики, геофизики, метеорологии, экологии, экономики, социологии и многих других наук. Последовательные значения исследуемых характеристик отражают как внутреннюю динамику объектов, так и их взаимные связи и изменчивость этих связей во времени.

Сглаживание временных рядов является одним из наиболее мощных инструментов их изучения. В общей стохастической обстановке сглаживание временного ряда можно рассматривать как возможный вариант его идеального течения. Двойственным образом это обстоятельство дает подход к аномалиям на временных рядах: ими можно считать фрагменты значительных отклонений временных рядов от своих сглаживаний.

Кроме того, сглаживания зачастую устроены проще, поддаются более простому анализу и потому служат эффективной аппроксимацией временных рядов.

На сегодняшний день наиболее известными методами сглаживания являются регрессионный анализ, метод конечных элементов и сплайнов, Фурье- и вейвлет-сглаживания и их обобщения на основе разложений по ортогональным системам функций и частотно-временного анализа [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Настоящая статья продолжает цикл работ авторов по разработке математических аспектов методов искусственного интеллекта для обработки наблюдений [7, 8, 9, 10, 11, 12], проведенных под руководством академика А.Д.Гвишиани, начиная с 2000-го года. Она посвящена новому универсальному методу сглаживания, первоначально предназначенному для анализа геофизических временных рядов [13, 14].

Гравитационные сглаживания легли в основу изучения ускорения векового хода главного магнитного поля Земли на основе данных обсерваторий сети ИНТЕРМАГНЕТ [15].

Но свойства оператора сглаживания до сих пор не были изучены. Данная статья – первый шаг в этом направлении.

2. Гравитационное сглаживание

2.1. Общая схема ДМА-сглаживания

Пусть $BP[a, b]$ – пространство конечных временных рядов на дискретном отрезке $[a, b]$ с узлами t_i , $i = 0, 1, \dots, N$, $t_0 = a$, $t_N = b$. Соответствие $y_i = y(t_i)$ превращает $BP[a, b]$ в $(N + 1)$ -мерное пространство.

Для заданного временного ряда $(y_0, \dots, y_N)$ рассматривается задача его сглаживания $\text{Sm}(y) = x \in BP[a, b]$, которая формализуется следующей схемой

$$[x = \text{сглаживание } y] = [x = \text{приближение } y] \wedge [x = \text{гладкий временной ряд}]$$

Приближение формализуется функционалом квадратичной невязки:

$$\text{Sc}(x | y) = \|x - y\|^2 = \sum_i (x_i - y_i)^2$$

Гладкость формализуется невязкой гладкости $\text{CG}(x)$.

Содержательная одновременная минимизация невязок осуществляется за счет использования взвешенной суммы:

$$\text{Sm}_\lambda(x | y) = \lambda \text{CG}(x) + (1 - \lambda) \text{Sc}(x | y)$$

Поиск сглаживания $x = \text{Sm}_\lambda(y)$ сводится к минимизации функционала $\text{Sm}_\lambda(x | y)$:

$$x = \text{Sm}_\lambda(y) \iff \text{grad}_x(\text{Sm}_\lambda(x | y)) = 0$$

2.2. Общий вид оператора сглаживания

Пусть невязка гладкости задается неотрицательной квадратичной формой:

$$CG(x) = (Gr\,x, x)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Sm_\lambda(x|y) &= \lambda(Gr\,x, x) + (1 - \lambda) \|x - y\|^2 = \lambda(Gr\,x, x) + (1 - \lambda) (x - y, x - y) = \\ &= ((\lambda Gr + (1 - \lambda)E)x, x) - 2(1 - \lambda)(x, y) + (1 - \lambda)\|y\|^2 \end{aligned}$$

Минимизация $Sm_\lambda(x|y)$ равносильна минимизации функционала

$$\widetilde{Sm}_\lambda(x|y) = ((\lambda Gr + (1 - \lambda)E)x, x) - 2(1 - \lambda)(x, y).$$

Очевидно,

$$\text{grad}_x(\widetilde{Sm}_\lambda(x|y)) = (\lambda Gr + (1 - \lambda)E)x - (1 - \lambda)y.$$

Следовательно,

$$x = Sm_\lambda(y) \iff (\lambda Gr + (1 - \lambda)E)x = (1 - \lambda)y.$$

Оператор $\lambda Gr + (1 - \lambda)E$ строго положителен, поэтому оператор сглаживания может быть представлен в форме:

$$Sm_\lambda = (1 - \lambda)(\lambda Gr + (1 - \lambda)E)^{-1}.$$

2.3. Общий вид оператора сглаживания с весами

Предположим, что по характеру данных каждому узлу t_i на отрезке $[a, b]$ можно сопоставить свой вес $v_i \geq 0$. Обозначим через V их множество $v_i \in V$.

Рассмотрим способы учета весов при построении гравитационного сглаживания. Построение оператора сглаживания осуществляется на основе минимизации функционала

$$Sm_\lambda(x|y) = \lambda CG(x) + (1 - \lambda) Sc(x|y),$$

поэтому учет весов может происходить через невязку $CG(x)$, функционал сканирования $Sc(x|y)$, и множитель λ . Слагаемые функционала сглаживания, в которые входят (не входят) веса, будем обозначать введением индекса V .

Возможны следующие варианты учета весов

1. $Sm_\lambda(x|y) = \lambda CG(x) + (1 - \lambda) Sc(x|y),$
2. $VSm_\lambda(x|y) = \lambda CG(x) + (1 - \lambda) Sc_V(x|y),$
3. $SmV_\lambda(x|y) = \lambda CG_V(x) + (1 - \lambda) Sc(x|y),$
4. $VSmV_\lambda(x|y) = \lambda CG_V(x) + (1 - \lambda) Sc_V(x|y),$
5. $Sm_{\lambda_V}(x|y) = \lambda_V CG(x) + (1 - \lambda_V) Sc(x|y),$
6. $VSm_{\lambda_V}(x|y) = \lambda_V CG(x) + (1 - \lambda_V) Sc_V(x|y),$
7. $SmV_{\lambda_V}(x|y) = \lambda_V CG_V(x) + (1 - \lambda_V) Sc(x|y),$
8. $VSmV_{\lambda_V}(x|y) = \lambda_V CG_V(x) + (1 - \lambda_V) Sc_V(x|y).$

Кроме перечисленных возможны варианты за счет использования разных наборов весов для различных слагаемых функционала сглаживания.

2.4. Гравитационная невязка гладкости: нулевой уровень

Роль окрестности узла t_i выполняет нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$, выражающая свойство близости к t_i остальных узлов: $\delta_{t_i}(t_j)$ – степень близости узла t_j к узлу t_i . Всегда должно быть:

$$\delta_{t_i}(t_j) \in [0, 1], \quad \delta_{t_i}(t_i) = 1,$$

при этом возможны случаи $\delta_{t_i}(t_j) \neq \delta_{t_j}(t_i)$.

С мерой близости $\delta_{t_i}(t_j)$ связывается матрица

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \frac{\delta_{t_i}(t_j)}{\sum_{k=0}^N \delta_{t_i}(t_k)},$$

$$i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad \sum_j a_{ij} = 1$$

Заметим, что матрицу A можно представить в форме:

$$A = K A_0,$$

где $A_0 = (\delta_{t_i}(t_j))$, $K \equiv \text{diag}(k_i) = \text{diag}\left(\frac{1}{\sum_{k=0}^N \delta_{t_i}(t_k)}\right)$.

Дискретное выражение гравитационной непрерывности для ряда $x_i = x(t_i)$ в узле $t_i \in [a, b]$ означает равенство:

$$x_i = \sum_0^N x_j a_{ij},$$

Соответственно, отклонение от равенства есть невязка гравитационной непрерывности в узле $t_i \in [a, b]$:

$$\text{CGr}^0(x)(t_i) = \left(x_i - \sum_{j=0}^N x_j a_{ij} \right)^2$$

Общая невязка гравитационной непрерывности на $[a, b]$, выражающая отклонение по всем узлам, получается суммированием с весами:

$$\begin{aligned} \text{CGV}^0(x)(t_i) &= \sum_{i=0}^N v_i \left(x_i - \sum_{j=0}^N a_{ij} x_j \right)^2 = \\ &= (V(A - E)x, (A - E)x) = \\ &= ((A - E)^* V (A - E)x, x) \equiv (G_V x, x), \end{aligned}$$

где матрица $V = \text{diag}(v_i)$

В соответствии с вариантами 1)-4) оператор сглаживания с весами имеет вид:

1. $\text{Sm}_\lambda(y) = (1 - \lambda)(\lambda G + (1 - \lambda)E)^{-1}y,$
2. $\text{VSm}_\lambda(y) = (1 - \lambda)(\lambda G + (1 - \lambda)E)^{-1}Vy,$
3. $\text{SmV}_\lambda(y) = (1 - \lambda)(\lambda G_V + (1 - \lambda)E)^{-1}y,$
4. $\text{VSmV}_\lambda(y) = (1 - \lambda)(\lambda G_V + (1 - \lambda)E)^{-1}Vy$

В случае, когда учет весов происходит через множитель λ , функционал $\text{Sm}_{\lambda_V}(x|y)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\text{Sm}_{\lambda_V}(x|y) &= \lambda_V \text{CG}(x) + (1 - \lambda_V) \text{Sc}(x|y) = \\ &= \sum_{i=0}^N \left[\lambda_i \left(x_i - \sum_{j=0}^N a_{ij} \right)^2 + (1 - \lambda_i)(x_i - y_i)^2 \right] = \\ &= (A(A - E)x, (A - E)x) + ((E - A)(x - y), (x - y)),\end{aligned}$$

где матрица $A = \text{diag}(\lambda_i)$. Следовательно, в соответствии с вариантами 5)-8) оператор сглаживания с весами имеет вид:

5. $\text{Sm}_{\lambda_V}(y) = (E - A)(A G + (E - A))^{-1}y,$
6. $V\text{Sm}_{\lambda_V}(y) = (E - A)(A G + (E - A))^{-1}Vy,$
7. $\text{Sm}V_{\lambda_V}(y) = (E - A)(A G_V + (E - A))^{-1}y,$
8. $V\text{Sm}V_{\lambda_V}(y) = (E - A)(A G_V + (E - A))^{-1}Vy.$

3. Свойства гравитационного сглаживания

3.1. Спектральные свойства оператора сглаживания

С учетом выражений для оператора сглаживания, задачи на собственные значения в каждом из случаев 1).-8) приводят к необходимости рассматривать спектральную задачу для пучка, порожденного оператором гравитационной невязки – таблица 1.

Спектральные свойства оператора сглаживания существенным образом зависят от матриц G , V , A , т.е. от свойств нечеткой структуры $\delta_{t_i}(t_j)$ и весов. Будем говорить, что нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$ симметрична, если справедливо равенство:

$$\delta_{t_i}(t_j) = \delta(i - j),$$

где функция $\delta(\xi)$ является четной, неотрицательной, $\delta(0) = 1$.

Например, в случае равномерной сетки: $t_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N$, $t_N = b = a + Nh$, $h = (b - a)/N$ нечеткая структура будет симметричной, если

$$\delta_{t_i}(t_j) = a(|t_i - t_j|) = a(h(i - j)),$$

где функция $a(\xi)$ является четной, неотрицательной, $a(0) = 1$.

Примером может служить нечеткая структура вида:

$$\delta(|t_i - t_j|) \equiv \delta(i - j) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|i-j|}{r}\right)^p, & |i - j| < r < N \\ 0, & |i - j| \geq r \end{cases}$$

№	Спектральная задача	Спектральная задача для пучка
1	$\text{Sm}_\lambda(y) = \mu y$	$G(y) \equiv (A - E)^* (A - E), y = \frac{(1-\lambda)(1-\mu)}{\lambda\mu} y$, таким образом, если $\nu_0, \dots, \nu_N$ – собственные числа оператора G , то $\mu(\nu_0), \dots, \mu(\nu_N)$ – собственные числа оператора сглаживания, где $\mu(\nu) = \left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}\nu\right)^{-1}$
2	$\text{VSm}_\lambda(y) = \mu y$	$G(y) \equiv (A - E)^* (A - E), y = \frac{1-\lambda}{\lambda\mu} (V - \mu E) y$
3	$\text{SmV}_\lambda(y) = \mu y$	$G_V(y) \equiv (A - E)^* V (A - E), y = \frac{(1-\lambda)(1-\mu)}{\lambda\mu} y$, таким образом, если $\nu_0, \dots, \nu_N$ – собственные числа оператора G_V , то $\mu(\nu_0), \dots, \mu(\nu_N)$ – собственные числа оператора сглаживания, где $\mu(\nu) = \left(1 + \frac{\lambda}{1-\lambda}\nu\right)^{-1}$
4	$\text{VSmV}_\lambda(y) = \mu y$	$G_V(y) \equiv (A - E)^* V (A - E), y = \frac{1-\lambda}{\lambda\mu} (V - \mu E) y$
5	$\text{Sm}_{\lambda_V}(y) = \mu y$	$G(z) \equiv (A - E)^* (A - E), z = \frac{1-\mu}{\mu} (\Lambda^{-1} - E) z, y = (E - \Lambda)z$, таким образом, если $\nu_0, \dots, \nu_N$ – собственные числа задачи $G(z) = \nu (\Lambda^{-1} - E) z$ то $\mu(\nu_0), \dots, \mu(\nu_N)$ – собственные числа оператора сглаживания, где $\mu(\nu) = (1 + \nu)^{-1}$
6	$\text{VSm}_{\lambda_V}(y) = \mu y$	$G(z) \equiv (A - E)^* (A - E), z = \Lambda^{-1} \left(\frac{1}{\mu} V - E\right) (E - \Lambda)z$, $y = (E - \Lambda)z$
7	$\text{SmV}_{\lambda_V}(y) = \mu y$	$G_V(z) \equiv (A - E)^* V (A - E), z = \frac{1-\mu}{\mu} (\Lambda^{-1} - E) z$, $y = (E - \Lambda)z$, таким образом, если $\nu_0, \dots, \nu_N$ – собственные числа задачи $G_V(z) = \nu (\Lambda^{-1} - E) z$, то $\mu(\nu_0), \dots, \mu(\nu_N)$ – собственные числа оператора сглаживания, где $\mu(\nu) = (1 + \nu)^{-1}$
8	$\text{VSmV}_{\lambda_V}(y) = \mu y$	$G_V(z) \equiv (A - E)^* V (A - E), z = \Lambda^{-1} \left(\frac{1}{\mu} V - E\right) (E - \Lambda)z$, $y = (E - \Lambda)z$

Далее рассматриваются свойства оператора гравитационного сглаживания в случае симметричной нечеткой структуры.

Напомним, что матрицу A можно представить в форме:

$$A = K A_0,$$

где $A_0 = (\delta_{t_i}(t_j))$, $K \equiv \text{diag}(k_i) = \text{diag}\left(\frac{1}{\sum_{k=0}^N \delta_{t_i}(t_k)}\right)$.

ЛЕММА 1. Пусть нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$ симметрична, тогда A_0 – симметричная матрица и $k_i = k_{N-i}$, $i = 0, 1, \dots, N$

Доказательство

В силу симметрии нечеткой структуры получаем:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & \delta(1) & \dots & \delta(N-1) & \delta(N) \\ \delta(1) & 1 & \dots & \delta(N-2) & \delta(N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta(i) & \dots & 1 & \dots & \delta(N-i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta(N) & \dots & \dots & \delta(1) & 1 \end{pmatrix}$$

По определению

$$k_i = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \delta_{t_i}(t_k)}.$$

Рассмотрим сумму

$$k_i^{-1} = \sum_{k=0}^N \delta_{t_i}(t_k) = \delta(i) + \delta(i-1) + \dots + \delta(1) + \delta(0) + \delta(1) + \dots + \delta(N-i).$$

Очевидно, $k_{N-i}^{-1} = \delta(N-i) + \delta(N-i-1) + \dots + \delta(1) + \delta(0) + \delta(1) + \dots + \delta(i)$. Таким образом, $k_i = k_{N-i}$.

Доказательство завершено

Пусть $x = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N)$. Введем преобразование S - отражение (перестановка) компонент вектора «относительно центра»:

$$Sx = \bar{x} = (x_N, x_{N-1}, \dots, x_1, x_0).$$

Нетрудно заметить, что

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^2 = E$$

ЛЕММА 2. Пусть нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$ симметрична, а вектор x удовлетворяет условию симметрии: $Sx = x$ (антисимметрии: $Sx = -x$), тогда вектор

$$y = (A - E)^*(A - E)x$$

удовлетворяет условию симметрии.

Доказательство

Из леммы 1 и вида матрицы S вытекают соотношения $SKS = K$, $SA_0S = A_0$.

Пусть $Sx = x$. Рассмотрим $Sy = S(A - E)^*(A - E)x =$

$$\begin{aligned} & S(KA_0 - E)^*(KA_0 - E)x = \\ & = S(KA_0 - E)^*(KA_0 - E)Sx = S(KA_0 - E)^*SS(KA_0 - E)Sx = \\ & = (S(KA_0 - E)S)^*S(KA_0 - E)Sx. \end{aligned}$$

Вычислим: $S(KA_0 - E)S = SKSSA_0S - SES = (SKS)(SA_0S) - SS = KA_0 - E$. Следовательно, $Sy = y$.

Для случая антисимметричного вектора доказательство аналогичное.

Доказательство завершено

ТЕОРЕМА 1. Пусть нечеткая структура $\delta_{t_i}(t_j)$ симметрична, а весовые коэффициенты $V = \text{diag}(v_i)$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ удовлетворяют условиям $v_i = v_{N-i}$, $\lambda_i = \lambda_{N-i}$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Тогда, если x - собственный вектор, соответствующий собственному числу μ , какой-либо спектральной задачи 1-8 из таблицы 1, то вектор $\bar{x} = Sx$ также является собственным вектором, соответствующим собственному числу μ .

Доказательство

Рассмотрим спектральную задачу для оператора Sm_λ , остальные рассматриваются аналогично. Если x - собственный вектор, то

$$(A - E)^*(A - E)x = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu}x$$

Следовательно, в силу соотношения $S^2 = E$ имеем:

$$S(A - E)^*(A - E)S\bar{x} = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu}\bar{x}$$

Далее, как и при доказательстве Леммы 2, обнаруживаем равенство

$$S(A - E)^*(A - E)S = (A - E)^*(A - E),$$

которое завершает доказательство.

Доказательство завершено

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если собственное число имеет нечетную кратность, то среди соответствующих ему собственных векторов существует симметричный.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда любой собственный вектор x , соответствующий собственному числу μ , какой-либо спектральной задачи 1-8 из таблицы 1 представим в виде $x = x_+ + x_-$, где x_+ , x_- – ортогональные собственные векторы, соответствующие собственному числу μ , причем x_+ симметричен, x_- антисимметричен.

Доказательство

Как и в предыдущей теореме, рассмотрим спектральную задачу для оператора Sm_λ , остальные рассматриваются аналогично. Если x – собственный вектор, то

$$(A - E)^*(A - E)x = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu}x \quad (1)$$

Для x справедливо представление

$$x = x_+ + x_-,$$

где $x_+ = \frac{1}{2}(x + Sx)$, $x_- = \frac{1}{2}(x - Sx)$. Непосредственная проверка показывает, что $Sx_+ = x_+$, $Sx_- = -x_-$. А также

$$(x_+, x_-) = \left(\frac{1}{2}(x + Sx), \frac{1}{2}(x - Sx)\right) = \frac{1}{4}[(x, x) - (Sx, Sx)] = \frac{1}{4}[(x, x) - (x, SSx)] = 0.$$

По теореме 1

$$(A - E)^*(A - E)Sx = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu}Sx, \quad (2)$$

следовательно,

$$(A - E)^*(A - E)(x_+ - x_-) = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu}(x_+ - x_-)$$

Далее, складывая и вычитая спектральные равенства (1)-(2) для x и Sx , убеждаемся, что x_+ , x_- – ортогональные собственные векторы, соответствующие собственному числу μ .

Доказательство завершено

3.2. Спектральные свойства оператора сглаживания $\text{SmK}_\lambda^{-2}(y)$

$$\text{SmK}_\lambda^{-2}(y) = (1 - \lambda)(\lambda G_{K^{-2}} + (1 - \lambda)E)^{-1}y$$

Спектральная задача для оператора сглаживания $\text{SmV}_\lambda(y)$ существенно упрощается, если весовые коэффициенты выбраны в виде $V = K^{-2}$. В этом случае

$$\begin{aligned} (A - E)^*V(A - E) &= (A_0 - K^{-1})K^2V(A_0 - K^{-1}) = \\ &= (A_0 - K^{-1})K^2K^{-2}(A_0 - K^{-1}) = (A_0 - K^{-1})^2 \end{aligned}$$

Поэтому спектральная задача имеет вид:

$$G_{K^{-2}}(y) \equiv (A_0 - K^{-1})^2y = \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu}y, \quad (3)$$

таким образом, если $\nu_0, \dots, \nu_N$ – собственные числа оператора $G_{K^{-2}}$, то $\mu(\nu_0), \dots, \mu(\nu_N)$ – собственные числа оператора сглаживания, где $\mu(\nu) = \left(1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda}\nu\right)^{-1}$.

При анализе задачи (3) рассмотрим случай локальной нечеткой структуры, которая порождает ленточную матрицу A_0 . В этом случае, если $(A_0)_j$ обозначает строку матрицы A_0 с номером j , то

$$(A_0)_j = (\delta_j \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{k-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad j = 0, \dots, k - 1;$$

$$(A_0)_j = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \delta_{k-1} \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{k-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad j = k, \dots, N - k - 1;$$

$$(A_0)_j = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \delta_{k-1} \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{N-1-j}), \quad j = N - k, \dots, N - k$$

$$\begin{aligned} (A_0)_j &= (\delta_j \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{k-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad j = 0, \dots, k - 1; \\ (A_0)_j &= (0 \quad \dots \quad 0 \quad \delta_{k-1} \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{k-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad j = k, \dots, N - k - 1; \\ (A_0)_j &= (0 \quad \dots \quad 0 \quad \delta_{k-1} \quad \dots \quad \delta_1 \quad 1 \quad \delta_1 \quad \dots \quad \delta_{N-1-j}), \quad j = N - k, \dots, N - k \end{aligned}$$

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & m_{k-2} & & & & \\ & & & m & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & m & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & m_{k-2} \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & & & 0 & m_0 \end{pmatrix}$$

где

$$m_0 = 1 + \delta_1 + \dots + \delta_{k-1};$$

$$m_1 = 1 + 2\delta_1 + \dots + \delta_{k-1};$$

...

$$m_{k-2} = 1 + 2\delta_1 + \dots + 2\delta_{k-2} + \delta_{k-1};$$

$$m = 1 + 2\delta_1 + \dots + \delta_{k-1};$$

Очевидно, спектральная задача (3) сводится к задаче

$$(A_0 - K^{-1}) u = \gamma u. \quad (4)$$

Из вида матрицы $A_0 - K^{-1}$ следует, что для $i = 0, \dots, N - 2k$ имеет место разностное соотношение с постоянными коэффициентами:

$$\delta_{k-1}u_i + \delta_{k-2}u_{i+1} + \dots + \delta_1u_{k+i-2} + (1 - m - \gamma)u_{i+k-1} + \delta_1u_{i+k} + \dots + \delta_{k-1}u_{2k+i-1} = 0 \quad (5)$$

Согласно общей теории [16], полагая $u_i = \omega^i$, находим характеристический многочлен $p(\omega, \gamma)$ для разностного соотношения (5):

$$\begin{aligned} p(\omega, \gamma) \equiv & \delta_{k-1}\omega^{2k-2} + \delta_{k-2}\omega^{2k-3} + \dots + \delta_1\omega^k + (1 - m - \gamma)\omega^{k-1} + \delta_1\omega^{k-2} \\ & + \dots + \delta_{k-2}\omega + \delta_{k-1} \end{aligned}$$

Или в симметричной записи:

$$p(\omega, \gamma) \equiv \delta_{k-1} \left(\left(\frac{1}{\omega} \right)^{k-1} + (\omega)^{k-1} \right) + \delta_{k-2} \left(\left(\frac{1}{\omega} \right)^{k-2} + (\omega)^{k-2} \right) + \dots + \delta_1 \left(\frac{1}{\omega} + \omega \right) + (1 - m - \gamma)$$

Очевидны следующие утверждения.

ЛЕММА 3. Если $\omega(\gamma)$ – корень многочлена $p(\omega, \gamma)$, то $\omega(\gamma) \neq 0$, и $(\omega(\gamma))^{-1}$ – корень $p(\omega, \gamma)$.

Многочлен $p(\omega, 0)$ имеет корень $\omega = 1$.

Если $\gamma \neq 0$, то многочлен $p(\omega, \gamma)$ не имеет корня равного 1.

Пусть γ , собственное число задачи (4), фиксировано и $\omega_1(\gamma), \dots, \omega_{q(\gamma)}(\gamma)$ – набор всех корней многочлена $p(\omega, \gamma)$. Обозначим через $s_\alpha(\gamma)$ кратность корня $\omega_\alpha(\gamma)$.

Тогда $s_1(\gamma) + \dots + s_{q(\gamma)}(\gamma) = 2k + 2$. Так как коэффициенты $p(\omega, \gamma)$ вещественные, то $q(\gamma) = q_0(\gamma) + 2q_1(\gamma)$, где $q_0(\gamma)$ – число различных вещественных корней, а $q_1(\gamma)$ – число различных корней с ненулевой мнимой частью и не являющихся комплексно сопряженными.

Общее решение разностного уравнения (5) можно представить в виде

$$u_j(\gamma) = \sum_{\alpha=1}^{q_0(\gamma)+q_1(\gamma)} g_\alpha(j, \gamma),$$

в котором паре корней $\sigma_\alpha(\gamma) \pm i\tau_\alpha(\gamma)$ соответствует слагаемое

$$g_\alpha(j, \gamma) = [a_\alpha(j)\cos(\tau_\alpha(\gamma)j) + b_\alpha(j)\sin(\tau_\alpha(\gamma)j)] \exp(\sigma_\alpha(\gamma)j),$$

где $a_\alpha(j)$, $b_\alpha(j)$ – многочлены степени $s_\alpha(\gamma) - 1$. (В приведенных формулах считается, что при $\tau_\alpha(\gamma) = 0$ пара корней вырождается в один корень).

Таким образом, общее решение разностного уравнения (5) имеет вид:

$$u_j(\gamma) = \sum_{\alpha=1}^{q_0(\gamma)+q_1(\gamma)} \exp(\sigma_\alpha(\gamma)j) \times$$

$$\times \left[\left(\sum_{\beta=0}^{s_{\alpha}(\gamma)-1} a_{\alpha\beta} j^{\beta} \right) \cos(\tau_{\alpha}(\gamma)j) + \left(\sum_{\beta=0}^{s_{\alpha}(\gamma)-1} b_{\alpha\beta} j^{\beta} \right) \sin(\tau_{\alpha}(\gamma)j) \right] \quad (6)$$

где $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ – набор из $2k+2$ свободных параметров. Следовательно, формула (6) описывает структуру собственных векторов задачи (4), тем самым и задачи (3).

Для определения значений свободных параметров $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ необходимо воспользоваться соотношениями: первыми и последними $k-1$ строками спектральной задачи (4).

Первые $k-1$ строки:

$$u_0 + \delta_1 u_1 + \dots + \delta_{k-1} u_{k-2} = (\gamma + m_0) u_0$$

$$\delta_1 u_0 + u_1 + \dots + \delta_{k-1} u_{k-1} = (\gamma + m_1) u_1$$

...

$$\delta_{k-2} u_0 + \delta_{k-3} u_1 + \dots + u_{k-2} + \delta_1 u_{k-1} + \dots + \delta_{k-1} u_{2k-2} = (\gamma + m_{k-2}) u_{k-2}$$

Или в матричной записи

$$B_1 v_1 = 0 \quad (7)$$

где $v_1 = (u_0, u_1, \dots, u_{2k-2})$

$$B_1(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 - \gamma - m_0 & \delta_1 & \dots & \delta_{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ \delta_1 & 1 - \gamma - m_1 & \dots & \delta_{k-2} & \delta_{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & \\ \delta_{k-2} & \dots & \delta_1 & 1 - \gamma - m_{k-2} & \delta_1 & \dots & \delta_{k-1} \end{pmatrix}$$

Аналогично, для последних $k-1$ строк получаем соотношение аналогичное (7)

$$B_2(\gamma) v_2 = 0, \quad v_2 = (u_{N-2k+1}, \dots, u_{N-1}) \quad (8)$$

Подставляя выражения (6) для u_j в (7-8), получаем выражения для векторов v_1, v_2 через неопределенные коэффициенты $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$:

$$v_i = C_1^i(\gamma) \overrightarrow{a_{\alpha\beta}} + C_2^i(\gamma) \overrightarrow{b_{\alpha\beta}}, \quad i = 1, 2,$$

где $\overrightarrow{a_{\alpha\beta}}$, $\overrightarrow{b_{\alpha\beta}}$ – векторы, порожденные наборами коэффициентов $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$. Следовательно,

$$\begin{cases} B_1(\gamma)(C_1^1(\gamma) \overrightarrow{a_{\alpha\beta}} + C_2^1(\gamma) \overrightarrow{b_{\alpha\beta}}) = 0 \\ B_2(\gamma)(C_1^2(\gamma) \overrightarrow{a_{\alpha\beta}} + C_2^2(\gamma) \overrightarrow{b_{\alpha\beta}}) = 0 \end{cases}$$

Или в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} B_1(\gamma) & 0 \\ 0 & B_2(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^1(\gamma) & C_2^1(\gamma) \\ C_1^2(\gamma) & C_2^2(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{a_{\alpha\beta}} \\ \overrightarrow{b_{\alpha\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, собственные числа γ должны удовлетворять системе уравнений:

$$\det \left(\begin{pmatrix} B_1(\gamma) & 0 \\ 0 & B_2(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^1(\gamma) & C_2^1(\gamma) \\ C_1^2(\gamma) & C_2^2(\gamma) \end{pmatrix} \right) = 0$$

Изложенным в настоящем пункте способом можно получить аналитические выражения для собственных векторов и собственных чисел оператора сглаживания $SmK^{-2}_{\lambda}(y)$ при $k=2$. В этом случае собственные числа имеют вид:

$$\mu(l) = (1 - \lambda) \left\{ 1 - \lambda + 4\lambda\delta_1^2 \left(1 - \cos \frac{\pi l}{N+1} \right)^2 \right\}^{-1}$$

Соответствующие им собственные векторы:

$$y_j^{(l)} = \cos \left(\frac{\pi l(2j+1)}{2(N+1)} \right), \quad j = 0, \dots, N$$

4. Заключение

Исследование спектральных свойств и собственных функций оператора гравитационного сглаживания позволяет оценивать его сглаживающие качества.

Спектральные свойства оператора гравитационного сглаживания существенным образом зависят от нечеткой структуры $\delta_{t_i}(t_j)$. В частности, численные расчеты показывают, что в случае, когда $\delta_{t_i}(t_j)$ отлично от нуля в малой окрестности точки t_i , т.е. имеет локальный характер, система собственных функций оператора сглаживания близка к системе тригонометрических функций. В случае нелокальной нечеткой структуры в системе собственных функций имеются аналоги всплесков (вейвлетов).

Обнаруженные свойства симметрии собственных функций оператора сглаживания есть следствие равномерности сетки на дискретном отрезке и симметрии используемой нечеткой структуры. Возможный шаг в исследовании несимметричного случая заключается в анализе методами теории возмущений [17] свойств собственных функций оператора сглаживания, порожденного симметричной нечеткой структурой, возмущенной несимметричным слагаемым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А. Введение в численные методы. // М.: Наука, 1982. 269 с.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. // М.: Наука, 1989. 432 с.
3. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. // М.: Изд-во "Лаборатория базовых знаний", 2003. 632 с.
4. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М. Численные методы в экстремальных задачах. // М.: Наука, 1975. 319 с.
5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. // М.: РХД, 2001. 461 с.
6. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. // М.: Мир, 2005. 671 с.
7. Гвишиани А. Д., Диаман М., Михайлов В. О., Гальдеано А., Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Граева Е. М. Алгоритмы искусственного интеллекта для кластеризации магнитных аномалий // Физика Земли. 2002. № 7. С. 13–28.
8. Mikhailov V., Galdeano A., Diamant M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov Sh., Graeva E., Sailhac P. A Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering // Geophysics. 2003. Vol. 68, No. 1. P. 168–180.
9. Богоутдинов Ш. Р., Агаян С. М., Гвишиани А. Д., Граева Е. М., Родкин М. В., Злотники Ж., Ле Муэль Ж. Л. Алгоритмы нечеткой логики в анализе электротеллурических данных в связи с мониторингом вулканической активности. // Физика Земли. 2007. № 7. С. 72–85.
10. Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р. Определение аномалий на временных рядах методами нечеткого распознавания // Докл. АН. 2008. Т. 421, № 1. С. 101–105.
11. Богоутдинов Ш. Р., Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Соловьев А. А., Кин Э. Распознавание возмущений с заданной морфологией на временных рядах. I. Выбросы на магнитограммах всемирной сети ИНТЕРМАГНЕТ. // Физика Земли. 2010. № 11. С. 99–112.

12. Соловьев А. А., Агаян С. М., Гвишиани А. Д., Богоутдинов Ш. Р., Шулья А. Распознавание возмущений с заданной морфологией на временных рядах. II. Выбросы на секундных магнитограммах // *Физика Земли*. 2012. № 5. С. 37-52.
13. Гвишиани А. Д., Агаян С. М., Богоутдинов Ш. Р., Каган А. И. Гравитационное сглаживание временных рядов // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2011. Т.17. № 2. С.62-70.
14. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Dobrovolsky M. N., Kagan A. I. Weighted gravitational time series smoothing // 2014. *Russ. J. Earth Sci.* T.14. doi: 10.2205/2014ES000543
15. Soloviev A., Chulliat A., Bogoutdinov Sh. Detection of secular acceleration pulses from magnetic observatory data // 2017. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. pp. 128-142. doi: 10.1016/j.pepi.2017.07.005
16. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей // М.: ГИФМЛ, 1959, 400 с.
17. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений // М.: Наука, 1970, 564 с.

REFERENCES

1. Samarskii A. A. 1982, "Introduction to numerical methods", *Moscow, Nauka*, 269 p.
2. Samarskii A. A., Gulin A. V. 1989, "Numerical methods", *Moscow, Nauka*, 432 p.
3. Bahvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobelkov G. M. 2003, "Numerical methods", *Moscow, Publishing house "Laboratory of Basic Knowledge"*, 632 p.
4. Pshenichny, B. N., Danilin Yu. M. 1975, "Numerical Methods in Extremal Tasks", *Moscow, Nauka* 319 p.
5. Daubechies I. 1992, "Ten Lectures of Wavelets", *Springer-Verlag*, 369 p.
6. Mallat S. 1999, "Вэйвлеты в обработке сигналов", *Academic Press*, 620 p.
7. Gvishiani, A. D., Diamant M., Mikhailov V. O., Galdeano A., Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Graeva E. M. 2002, "Artificial Intelligence Algorithms for Magnetic Anomaly Clustering", *Izvestiya, Physics of the Solid Earth. English Translation Copyright by MAIK "Nauka/Interperiodica"*, *Russia*, vol. 38. pp. 545-559.
8. Mikhailov V., Galdeano A., Diamant M., Gvishiani A., Agayan S., Bogoutdinov Sh., Graeva E., Sailhac P. 2003, "A Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering", *Geophysics*, vol. 68, no. 1, pp. 168-180.
9. Bogoutdinov Sh. R., Agayan S. M., Gvishiani A. D., Graeva E. M., Rodkin M. V., Zlotnicki J., Le Mou?l J. L. 2007, "Fuzzy logic algorithms in the analysis of electrotelluric data with reference to monitoring of volcanic activity", *Izvestiya, Physics of the Solid Earth. MAIK Nauka/Interperiodica distributed exclusively by Springer Science+Business Media LLC*, vol. 43, pp. 597-609
10. Gvishiani A. D., Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R. 2008, "Fuzzy recognition of anomalies in time series", *Doklady earth sciences*, vol. 421, no. 1, pp. 838-842. DOI: 10.1134/S1028334X08050292

11. Bogoutdinov Sh. R., Gvishiani A. D., Agayan S. M., Solovyev A. A., Kihn E. 2010, "Recognition of disturbances with specified morphology in time series. Part 1: Spikes on magnetograms of the worldwide INTERMAGNET network", *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, vol. 46, no. 11, pp. 1004-1016.
12. Soloviev A. A., Agayan S. M., Gvishiani A. D., Bogoutdinov Sh. R., Chulliat A. 2012, "Recognition of disturbances with specified morphology in time series: Part 2. Spikes on 1-s magnetograms", *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, vol. 48, no. 5, pp. 395-409.
DOI: 10.1134/S106935131204009X
13. Gvishiani A. D., Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Kagan A. I. 2011, "Gravitational smoothing of time series", *Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, vol. 17, no. 2, pp. 62-70.
14. Agayan S. M., Bogoutdinov Sh. R., Dobrovolsky M. N., Kagan A. I. 2014, "Weighted gravitational time series smoothing", *Russ. J. Earth Sci.*, vol. 14. doi: 10.2205/2014ES000543
15. Soloviev A., Chulliat A., Bogoutdinov, Sh. 2017, "Detection of secular acceleration pulses from magnetic observatory data", *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, pp. 128-142. doi: 10.1016/j.pepi.2017.07.005
16. Gelfond A. O. 1959, "Finite difference calculus", *M: GIFML*, 400 p.
17. Wilkinson J. H. 1970, "The Algebraic eigenvalue problem", *M.: Nauka*, 564 p.

Получено 27.07.2018

Принято в печать 22.10.2018