ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 16 Выпуск 1 (2015)

УДК 511.36

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ
ПОЛИАДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

В. Г. Чирский (г. Москва)

Аннотация

Исследуются арифметические свойства полиадических чисел, то есть рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n!,$$

где числа $a_n \in \mathbb{Z}$.

Рассматривается понятие бесконечной алгебраической независимости полиадических чисел.

Доказана теорема о бесконечной алгебраической независимости полиадических чисел из класса $F(\mathbb{Q}, C_1, C_2, C_3, d_0)$, если они связаны системой линейных дифференциальных уравнений определенного вида.

Ключевые слова: полиадические числа, трансцендентность.

Библиография: 9 названий.

ARITHMETIC PROPERTIES OF POLYADIC
INTEGERS

V. G. Chirskii (Moscow)

Abstract

Arithmetic properties of series of the form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n!$$

with $a_n \in \mathbb{Z}$ are studied.

The concept of infinite algebraic independence polyadic numbers.

A theorem on the algebraic independence polyadic infinite number of class $F(\mathbb{Q}, C_1, C_2, C_3, d_0)$, if they are connected by a system of linear differential equations of a certain kind.

Keywords: polyadic numbers, transcendence.

Bibliography: 9 titles.

1. Введение

В данной статье дается расширенный вариант доклада, сделанного автором 30 января 2015 года в Математическом институте им В. А. Стеклова РАН на Международной конференции памяти Анатолия Алексеевича Карацубы по теории чисел и приложениям.

Во втором разделе дается краткое введение в теории полиадических чисел.

Основная цель статьи — доказать теорему о бесконечной алгебраической независимости достаточно широкого класса полиадических чисел. Этой теореме посвящен третий раздел.

2. Полиадические числа

Напомним основные понятия теории полиадических чисел.

На кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел можно ввести топологию τ , рассматривая множество идеалов (m) в качестве полной системы окрестностей нуля аддитивной группы целых чисел. При этом операции сложения и умножения непрерывны и кольцо целых чисел с введенной топологией имеет структуру топологического кольца (см. [1], [2]). Обозначим это кольцо $\mathbb{Z}_\tau$.

Бесконечная последовательность $x_1, x_2, \dots$ целых чисел называется *фундаментальной*, если для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $m, n > \mathcal{N}$ справедливо сравнение $x_m \equiv x_n \pmod{k!}$.

Для фундаментальных последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ рассмотрим последовательности $\{x_k + y_k\}$, $\{x_k - y_k\}$, $\{x_k \cdot y_k\}$. Эти последовательности также являются фундаментальными. Таким образом, фундаментальные последовательности элементов из кольца $\mathbb{Z}_\tau$ образуют кольцо.

Будем называть последовательность $c_1, c_2, \dots$ *нулевой* последовательностью, если $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, где предел понимается в смысле топологии кольца $\mathbb{Z}_\tau$.

Назовем фундаментальные последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ *эквивалентными*, если их разность $\{x_k - y_k\}$ является нулевой последовательностью.

Полиадическим числом будем называть класс эквивалентных фундаментальных последовательностей из $\mathbb{Z}_\tau$.

На множестве полиадических чисел можно ввести операции сложения и умножения, что позволяет говорить о кольце $\mathfrak{G}$ целых полиадических чисел. Вложение кольца $\mathbb{Z}$ в $\mathfrak{G}$ осуществляется сопоставлением элементу $x \in \mathbb{Z}$ класса $\mathfrak{x}$ фундаментальных последовательностей, эквивалентных последовательности $x, x, x, \dots$

Так как $\mathbb{Z}_\tau$ — метрическое пространство, его пополнение приводит к топологическому пространству $\mathfrak{G}_\tau$.

Элементы $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_\tau$ имеют каноническое представление в виде ряда

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n! \tag{1}$$

где $a_n \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Арифметические свойства полиадических чисел изучены относительно мало. С именем Эйлера связан ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n!$. Гипотеза Курепы [3] относится к частичным суммам этого ряда и утверждает, что

для любого простого числа $p > 2$ число

$$\sum_{n=0}^{p-1} n!$$

не делится на p . Это означает, что

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} n! \right|_p = 1$$

для любого p .

Гипотеза Курепы до сих пор не доказана в полном объеме, хотя доказано, что она справедлива для бесконечного множества простых чисел p .

Интерес к полиадическим числам вызывает также то, что любое натуральное число M допускает единственное представление в виде

$$M = \sum_{n=1}^N a_n \cdot n!, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad (2)$$

так называемое полиадическое (или факториальное) представление. Свойства этого представления в сравнении с разложением с двойной базой или в цепь с двойной базой изучались в [4].

Важную роль ряда Эйлера подчеркивает следующее утверждение, доказанное в работе [5].

Для любого $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ имеет место равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot n! = A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n! + B, \quad (3)$$

где $A, B \in \mathbb{Z}$, точные значения A и B приведены ниже.

Действительно, пусть многочлен $p(x)$ имеет степень m . Представим его в виде

$$p(x) = a_m(x+1)(x+2)\dots(x+m) + a_{m-1}(x+1)(x+2)\dots(x+m-1) + \dots + a_2(x+1)(x+2) + a_1(x+1) + a_0,$$

где $a_i \in \mathbb{Z}, i = 0, 1, \dots, m$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot n! &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_m \cdot (n+m)! + \dots + a_1(n+1)! + a_0 n!) = \\
 &= a_m \left(\sum_{n=0}^{\infty} n! - \sum_{n=0}^{m-1} n! \right) + \dots + a_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} n! - 1 \right) + \\
 + a_0 \cdot n! &= (a_0 + \dots + a_m) \sum_{n=0}^{\infty} n! - \left(a_m \sum_{n=0}^{m-1} n! + \dots + a_1 \cdot 1! + a_0 \right) = \\
 &= A \sum_{n=0}^{\infty} n! + B,
 \end{aligned}$$

где

$$A = a_0 + \dots + a_m \in \mathbb{Z}, \quad B = - \left(a_m \sum_{n=0}^{m-1} n! + \dots + a_1 \right) \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Равенства (4) и (3) служат источником полиадических формул, например,

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot n! = -1, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot n! = 1 \quad (5)$$

и многих других. В частности, любое отрицательное целое число $-M-1$ имеет, с учетом (2), (5), полиадическое разложение

$$-1 - M = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n! - \sum_{n=1}^N a_n \cdot n! = \sum_{n=1}^N (n - a_n) \cdot n! + \sum_{n=N+1}^{\infty} n \cdot n!.$$

Заметим, что любое целое полиадическое число, заданное рядом (1), не может представлять во всех полях $\mathbb{Q}_p$ одно и тоже рациональное число a/b , так как для любого p выполнено неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n! \right|_p \leq 1,$$

а если $p \mid b, p \nmid a$, то $\left| \frac{a}{b} \right|_p > 1$.

Кольцо $\mathfrak{G}_\tau$ является прямым произведением колец $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам p_i , при этом ряд $\mathbf{a}$ сходится в любом $\mathbb{Z}_{p_i}$. Действительно, степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители, равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n — сумма цифр в p -ичном разложении числа n . Следовательно, для любого p_i при $n \rightarrow \infty$

$$|a_n \cdot n!|_{p_i} \rightarrow 0,$$

что является достаточным условием сходимости ряда (1) в $\mathbb{Z}_{p_i}$, соответствующую сумму будем обозначать $a^{(p_i)}$.

Таким образом, бесконечный набор элементов $a^{(p_i)} \in \mathbb{Z}_{p_i}$, соответствующих всем простым числам p_i , можно рассматривать, как совокупность координат элемента $\mathbf{a}$ кольца целых полиадических чисел, представленного в виде вектора. Поэтому для любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами полиадическое число $P(\mathbf{a})$ имеет в кольце $\mathbb{Z}_p$ координату $P(a^{(p)})$.

В работе [6] предложена следующая классификация полиадических чисел.

Назовем полиадическое число $\mathbf{a}$ *алгебраическим*, если существует отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что полиадическое число $P(\mathbf{a})$ равно нулю, т.е. для любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено равенство $P(a^{(p)}) = 0$.

Полиадическое число, которое не является алгебраическим, естественно называть *трансцендентным полиадическим числом*. В этом случае для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует хотя бы одно простое число p такое, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Будем называть полиадическое число *бесконечно трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами существует бесконечное множество простых чисел p таких, что в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Наконец, будем называть полиадическое число *глобально трансцендентным*, если для любого отличного от нуля многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами и любого простого числа p в кольце $\mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство $P(a^{(p)}) \neq 0$.

Разумеется, для трансцендентности полиадического числа $\mathbf{a}$ достаточна трансцендентность хотя бы одной его координаты $a^{(p)}$. Однако пример полиадического числа $(1, 2, \dots, n, \dots)$, имеющего в кольце $\mathbb{Z}_{p_n}$ (где p_n обозначает n -ое простое число) координату $a^{(p_n)} = n$ показывает, что даже бесконечно трансцендентное число может иметь координаты - натуральные числа. Бесконечная трансцендентность этого числа следует из того, что любой отличный от нуля многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами не может обращаться в ноль в точках $1, 2, \dots, N$, если число N больше, чем его степень.

Разумеется, глобальная трансцендентность полиадического числа равносильна трансцендентности всех его координат.

Примеры глобально алгебраически независимых полиадических чисел приведены в [7].

Доказательство глобальной трансцендентности даже для столь простого на вид ряда, как ряд Эйлера $\sum_{n=0}^{\infty} n!$, представляет собой задачу, к которой пока нет подходов.

Однако применение модификации метода Зигеля – Шидловского в теории трансцендентных чисел [8] позволяет доказывать бесконечную алгебраическую независимость многих представляющих интерес полиадических рядов, в част-

ности и бесконечную трансцендентность ряда Эйлера.

3. Бесконечная алгебраическая независимость полиадических чисел

Рассмотрим полиадические ряды вида

$$a_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,n} \cdot n! \xi^n, i = 1, \dots, n, \tag{6}$$

где $\xi, a_{i,n} \in \mathbb{Z}$. Их можно рассматривать, как значения в точке $z = \xi$ функциональных рядов

$$f_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,n} \cdot n! z^n, i = 1, \dots, n \tag{7}$$

при условии их сходимости в кольце полиадических чисел. Для доказательства бесконечной алгебраической независимости рядов (6) применим к рассматриваемым рядам (7) модификацию метода Зигеля-Шидловского ([8], [9]) для так называемых F -рядов. Здесь мы ограничимся рассмотрением подкласса F -рядов, который состоит из рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n! z^n,$$

у которых $a_n \in \mathbb{Q}$ и $|a_n| \leq e^{c_1 n}$, $n = 0, 1, \dots$, где c_1 – некоторая постоянная. Кроме того, существует последовательность натуральных чисел d_n таких, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}$, $k = 0, \dots, n$. При этом $d_n = d_{0,n} d^n$, $d_{0,n} \in \mathbb{N}$, $n = 0, 1, \dots$, $d \in \mathbb{N}$ и для любого n число $d_{0,n}$ делится только на простые числа p , для которых выполнено неравенство $p \leq c_2 n$. Предполагаем также, что степень, в которой число p входит в разложение числа $d_{0,n}$, обозначаемая $ord_p n$, удовлетворяет при всех n неравенству

$$ord_p n \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

При выполнении этих условий говорим, что рассматриваемый ряд принадлежит классу $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d)$.

Пусть ряды

$$f_1(z), \dots, f_m(z)$$

принадлежат некоторому классу $F(\mathbb{Q}, C_1, C_2, C_3, d_0)$. Пусть $f_1(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$Y'_i = \sum_{j=1}^m B_{i,j}(z) Y_j, i = 1, \dots, m, \tag{8}$$

$B_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$. Пусть $T_0(z) \in \mathbb{Z}[z]$ и $T_0(z) \cdot B_{i,j}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $i, j = 1, \dots, m$, причем пусть степень $T_0(z)$ – наименьшая возможная, а коэффициенты $T_0(z)$ – взаимно-простые целые числа.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f_1(z), \dots, f_m(z)$ входят в рассматриваемый подкласс F -рядов, составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений (8) и алгебраически независимы над $\mathbb{Q}(z)$. Пусть число $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$ и отлично от особых точек системы (8). Тогда полиадические числа (6) бесконечно алгебраически независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой отличный от тождественного нуля многочлен $P(x_1, \dots, x_m)$ с целыми коэффициентами степени N по совокупности переменных можно рассматривать, как линейную форму $L(y_1, \dots, y_M) = h_1 y_1 + \dots + h_M y_M$ от произведений степеней переменных $x_0, \dots, x_m$ вида

$$x_1^{k_0} \dots x_m^{k_m}, \quad k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0, \quad k_1 + \dots + k_m \leq N.$$

При этом

$$M = \frac{(N+m)!}{N!},$$

а произведения степеней рядов $f_1(z), \dots, f_m(z)$ вида

$$f_1^{k_1}(z), \dots, f_m^{k_m}(z), \quad k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0, \quad k_1 + \dots + k_m \leq N \quad (9)$$

принадлежат классу $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, d)$, где

$$c_1 = C_1 + \ln 2, \quad c_2 = C_2, \quad c_3 = (C_3 + 1)N, \quad d = d_0^{1+\ln N},$$

в чем легко убедиться, применяя рассуждения, аналогичные использованным в книге [8], (глава 3, с. 88–89). Обозначим ряды (9) через $F_1(z) \equiv 1, \dots, F_M(z)$.

Так как ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ составляют решение системы (8), используя лемму 18 ([8], глава 3, с. 122) получаем, что ряды $F_1(z) \equiv 1, \dots, F_M(z)$ составляют решение соответствующей системы

$$D : y'_i = \sum_{j=1}^M A_{i,j}(z) y_j, \quad i = 1, \dots, M, \quad (10)$$

$A_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$. Пусть $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ и $T(z) \cdot A_{i,j}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $i, j = 1, \dots, M$, причем пусть степень $T(z)$ – наименьшая возможная, а коэффициенты $T(z)$ – взаимно-простые целые числа. При этом система (10) не имеет особых точек, отличных от особых точек системы (8). Обозначаем $\deg D$ и $H(D)$, соответственно, наибольшие из степеней и высот многочленов $T(z)$, $T(z)A_{i,j}(z)$, $i, j = 1, \dots, M$.

Через $n_0(D)$ обозначаем число, существование которого доказано в теории E -функций, G -функций и F -рядов (см. [8], стр. 106). В качестве оценки сверху для $n_0(D)$ можно взять число, стоящее в правой части неравенства

$$n_0(D) \leq C(M, \deg D) H(D)^{c(M, \deg D)} \quad (11)$$

(см. [9], теорема 1.2), причем можно взять

$$c(M, \deg D) = \log_2 C(M, \deg D) = (2 + (\deg D + 1)M)^{(2+(\deg D+1)M)^{2M}}. \quad (12)$$

Пусть $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, ξ отлично от особых точек системы (10). Положим

$$c_4 = c_1 + \ln d + \frac{5}{4} \cdot c_2 c_3 + 2c_3 + 5, c_5 = M^2 c_4 + 2, \quad (13)$$

$$\mathcal{N}_0 = \max\{n_0(D), \exp(4(2(M + 3) + c_4(M - 1))^2), \\ \exp(|\xi|^2 + \deg D(|\xi| + 2) + 2 \ln H(D) + 1)\},$$

$$H_0 = \exp\left(\mathcal{N}_0 \ln \mathcal{N}_0 \left(1 - \frac{M + 3 + (M - 1)c_5}{(\ln \mathcal{N}_0)^{\frac{1}{2}}}\right)\right). \quad (14)$$

Обозначим, при $x > 3$,

$$\ell(x) = e^{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$u(x) = M(x + 1) - \left[x(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

где $[t]$ обозначает целую часть числа t ,

$$P_n(x) = \ell\left(\frac{x}{\ln x}\right), P_b(x) = u\left(\frac{x}{\ln x} \left(1 + \frac{2(M + 3 + (M - 1)c_5)}{(\ln(\frac{x}{\ln x}))^{\frac{1}{2}}}\right)\right). \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F_1(z) \equiv 1, \dots, F_M(z)$ входят в рассматриваемый подкласс F -рядов, составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений (8) и линейно независимы над $\mathbb{Q}(z)$. Пусть $\xi \in \mathbb{Z}$, $\xi \neq 0$, число ξ отлично от особых точек системы (8).

Пусть

$$L(y_1, \dots, y_M) = h_1 y_1 + \dots + h_M y_M$$

ненулевая линейная форма с целыми коэффициентами, $H = \max(|h_1|, \dots, |h_M|)$. Обозначим $L(\overline{F}(\xi)) = h_1 F_1(\xi) + \dots + h_M F_M(\xi)$. Пусть H_0 определено равенством (14), в котором $\mathcal{N}_0$ вычислено при $n_0(D)$, равном правой части неравенства (11), входящие в него величины заданы равенствами (12).

Тогда для любого $H \geq H_0$ существует простое число p , удовлетворяющее неравенствам

$$P_n(\ln H) < p < P_e(\ln H)$$

такое, что

$$|L(\overline{F}(\xi))|_p > H^{-M - \frac{M+3+2M c_5}{\sqrt{\ln \ln H}}}.$$

Теорема 2 является частным случаем теоремы 1.1 из [9].

Пусть $P(x_0, \dots, x_{T-1})$ — отличный от тождественного нуля многочлен с целыми коэффициентами степени N по совокупности переменных и высоты H . Тогда, как отмечено выше, величину $P(f_0(\xi), \dots, f_{T-1}(\xi))$ можно рассматривать, как линейную форму

$$L(\bar{F}(\xi)) = h_1 F_1(\xi) + \dots + h_M F_M(\xi)$$

с целыми коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$H = \max(|h_1|, \dots, |h_M|).$$

Пусть натуральное число γ_0 выбрано наименьшим таким, что $\gamma_0 H \geq H_0$. Тогда, по теореме 2 существует простое число p , удовлетворяющее неравенствам

$$P_n(\ln \gamma_0 H) < p < P_v(\ln \gamma_0 H),$$

где функции $P_n(x)$ и $P_v(x)$ определены равенствами (15), такое, что

$$|\gamma_0 L(\bar{F}(\xi))|_p \neq 0.$$

Следовательно, $L(\bar{F}(\xi)) \neq 0$ в поле $\mathbb{Q}_p$.

Пусть последовательность натуральных чисел γ_k , $k = 1, \dots$ удовлетворяет условиям

$$P_n(\ln \gamma_{k+1} H) > P_v(\ln \gamma_k H), k = 0, 1, \dots,$$

Тогда интервалы

$$(P_n(\ln \gamma_k H), P_v(\ln \gamma_k H)), k = 0, 1, \dots$$

не пересекаются и в каждом из них, по теореме 3, существует простое число p , для которого $P(f_0(\xi), \dots, f_{T-1}(\xi)) = L(\bar{F}(\xi)) \neq 0$ в поле $\mathbb{Q}_p$.

Теорема 1 доказана. $\square$

4. Заключение

В работе показано, что с помощью модификации метода Зигеля – Шидловского можно доказывать бесконечную алгебраическую независимость полиадических чисел из подкласса $F(\mathbb{Q}, C_1, C_2, C_3, d_0)$ класса F -рядов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука. — 1971. — 416с.
2. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука. — 1984. — 520с.

3. D. Kurepa. On the left factorial function $!n$. // *Math. Balkan.* 1971. Vol. 1. P. 147–153.
4. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлениях натуральных чисел // *Чебышевский сборник.* 2013. Т. 14, вып. № 1. С. 75–86.
5. Чирский В. Г. Арифметические свойства некоторых полиадических рядов // *Вестник МГУ, сер. 1, Математика. Механика.* 2012ю №5, С. 52–54.
6. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // *Доклады Академии наук, математика.* 2014. Т. 439, № 6. С. 677–679.
7. V. G. Chirskii On the series which are algebraically independent in all local fields // *Vestnik Moskov. Univer, Ser 1.* 1994. № 3. С. 93–95. (Russian)
8. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. — М.: Наука. — 1987. — 417с.
9. D. Bertrand, V. Chirskii, Y. Yebbou. Effective estimates for global relations on Euler-type series // *Ann. Fac. Sci. Toulouse.* — Vol. XIII. — № 2. — 2004. — P. 241–260.

REFERENCES

1. Postnikov, A. G. 1971, "Introduction to analytic number theory", *Nauka, Moscow*, 416p.
2. Pontryagin, L. S. 1984, "Nepreryvnye gruppy." [Continuous groups] Fourth edition. '*Nauka, Moscow*, 520 pp. (Russian)
3. Kurepa, D. 1971, "On the left factorial function $!n$ ", *Math. Balkan.*, vol. 1, pp. 147–153.
4. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлениях натуральных чисел. Чебышевский сборник, том 14, выпуск № 1, 2013.- 75-86.
5. Чирский В.Г. Арифметические свойства некоторых полиадических рядов. Вестник МГУ, сер.1, матем.,механ, 2012, №5, 52-54.
6. Чирский В.Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами. Доклады Академии наук, математика, 2014, том 439, № 6, с.677-679.
7. V.G. Chirskii, On the series which are algebraically independent in all local fields, *Vestnik Moskov. Univer, Ser 1*, (rus.) 3(1994), 93-95.
8. Шидловский А.Б. Трансцендентные числа.-М.: "Наука".-1987.-417с.

9. D. Bertrand, V. Chirskii, Y.Yebbou. Effective estimates for global relations on Euler-type series //Ann.Fac.Sci.Toulouse.-V.XIII. - № 2.-2004.-p. 241-260.

Московский педагогический государственный университет,
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Получено 24.02.2015 г.