

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 1

УДК 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-220-237

**Рассеяние звуковых волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью<sup>1</sup>**

**Скобельцын Сергей Алексеевич** — кандидат физико-математических наук, кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.  
*e-mail: skbl@rambler.ru*

**Аннотация**

Представлено решение задачи дифракции плоской звуковой волны на упругом эллипсоиде  $E$  с внешним слоисто-неоднородным слоем. Эллипсоид находится в полупространстве, заполненном идеальной жидкостью. Граница полупространства  $\Pi$  является акустически жесткой или акустически мягкой поверхностью.

Для решения область, занятая жидкостью, расширена до полного пространства. Введено дополнительное препятствие, являющееся копией  $E$ , расположенное зеркально по отношению к плоскости  $\Pi$ . Добавление второй падающей плоской волны обеспечивает выполнение того условия в точках плоскости  $\Pi$ , которое соответствует типу границы полупространства в начальной постановке задачи. Таким образом, задача сводится к задаче о рассеянии двух плоских звуковых волн на двух эллипсоидах в неограниченном пространстве.

Решение проводится на основе линейной теории упругости и модели распространения малых возмущений в идеальной жидкости. Во внешней части окружающей среды решение ищется аналитически в форме разложения по сферическим гармоникам и функциям Бесселя. В шаровой области, включающей два эллипсоида и прилегающий слой жидкости, используется метод конечных элементов (МКЭ).

Представлены результаты расчета диаграмм направленности рассеянного звукового поля в дальней зоне, которые показывают влияние геометрических и материальных параметров эллипсоида на дифракцию звука.

*Ключевые слова:* рассеяние звуковых волн, полупространство, неоднородный упругий эллипсоид, метод конечных элементов.

*Библиография:* 32 названия.

**Для цитирования:**

С. А. Скобельцын. Рассеяние звуковых волн упругим эллипсоидом с неоднородным покрытием в полупространстве с идеальной поверхностью // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 220–237.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 1

UDC 539.3

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-220-237

**Scattering of sound waves by an elastic ellipsoid with an inhomogeneous coating in the half-space with ideal surface**

**Skobel'tsyn Sergey Alekseevich** — candidate of physical and mathematical sciences, department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

*e-mail: skbl@rambler.ru*

**Abstract**

The solution of the diffraction problem for a plane sound wave on an elastic ellipsoid  $E$  with an outer inhomogeneous layer is presented. The ellipsoid is in a half-space filled with an ideal fluid. The boundary of a half-space  $\Pi$  is an acoustically rigid or acoustically soft surface.

To obtain a solution, the area occupied by the liquid is expanded to full space. An additional scattering obstacle is introduced. This obstacle is a copy of  $E$ , located mirror-wise with respect to the plane  $\Pi$ . A second incident plane wave is also added. This wave ensures the fulfillment of that condition at the points of the plane  $\Pi$ , which corresponds to the type of the half-space boundary in the initial formulation of the problem. Thus, the problem is transformed into the problem of scattering of two plane sound waves on two ellipsoids in unbounded space.

The solution is based on the linear theory of elasticity and the model of propagation of small vibrations in an ideal fluid. In the outer part of the environment, the solution is sought analytically in the form of an expansion in spherical harmonics and Bessel functions. In the spherical region, which includes two ellipsoids and an adjacent layer of liquid, the finite element method (FEM) is used.

The results of the calculation of the directivity patterns of the scattered sound field in the far zone are presented. These dependences show the influence of the geometric and material parameters of the ellipsoid on the diffraction of sound.

*Keywords:* scattering of sound waves, half-space, inhomogeneous elastic ellipsoid, finite element method.

*Bibliography:* 32 titles.

**For citation:**

S. A. Skobel'tsyn, 2018, "Scattering of sound waves by an elastic ellipsoid with an inhomogeneous coating in the half-space with ideal surface", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 220–237.

## 1. Введение

Решение задачи дифракции звуковых волн на упругом теле существенно зависит от формы тела и свойств его материала. Полученное решение задачи дифракции может быть использовано для идентификации параметров упругого тела. Такие решения могут быть использованы при разработке методов исследования в ультразвуковой диагностике, дефектоскопии и гидроакустике.

Известно немного эффективных решений для задачи рассеяния звуковых волн объектами в форме эллипсоида. В статье [1] предложено решение скалярного уравнения Гельмгольца на основе системы функций Ламе, которые возникают в результате применения метода разделения переменных в ортогональной эллипсоидальной системе координат. Однако аппарат функций Ламе [2] и алгоритмы их вычисления разработаны не так полно, как для многих других специальных функций, поэтому их применение для реальных расчетов до сих пор является проблематичным.

Много работ посвящено исследованию дифракции звука на эллипсоидах вращения – сфероидах. Дифракция звуковых волн на упругих однородных сфероидах изучалась в работах [3, 4, 5, 6, 7, 8]. В [9] рассматривался упругий неоднородный сфероидальный рассеиватель.

Большая часть задач о рассеянии звука трехосными эллипсоидальными объектами решена с помощью приближенных аналитических или численных методов. В работе [10] решается задача о рассеянии звуковых волн на эллипсоидальных полостях в жидкости с помощью метода  $T$ -матриц. Метод  $T$ -матриц, предложенный П. Уотерманом [11], широко используется для решения многих задач дифракции звуковых и упругих волн на объектах сложной формы [12, 4, 13]. Задача о рассеянии звука жидким сфероидом решается в работе [14]. В статьях [15, 16] рассматривается отражение звука многослойными эллипсоидами из акустического материала с жестким или мягким включением. Рассеяние сферической волны малым жестким сфероидом изучается в [17]. С использованием метода граничных интегральных уравнений в работе [18] решена задача о рассеянии звука эллипсоидом, заполненным акустической средой. В статье [19] рассматривается задача о рассеянии звуковых волн эллипсоидальной оболочкой.

Широкие возможности для исследования задач дифракции дает использование метода конечных элементов [20, 21, 22]. В монографии [22] подробно изложены различные аспекты применения МКЭ при решении задач о рассеянии звука объектами различного типа: жесткими, мягкими, упругими. В случае содержащей среды неограниченной извне предлагается использовать искусственную внешнюю границу (artificial boundary), на которой формируются так называемые условия поглощения или “бесконечные” элементы, обеспечивающие выполнение условий излучения на бесконечности для потенциала скоростей в рассеянной волне. В работах автора [23, 24] используется подход, в котором во внешней области решение представляется в виде разложения по ортогональной системе волновых функций. Поэтому искусственная внешняя граница рассматривается как поверхность, на которой устанавливаются обычные граничные условия согласования звуковых колебаний в двух областях жидкости: внешней (с аналитическим представлением решения) и внутренней, в которой для решения используется МКЭ.

В данной работе представлено решение задачи об отражении плоской звуковой волны упругим эллипсоидом с внешним неоднородным слоем с использованием метода конечных элементов. Предполагается, что эллипсоид расположен вблизи плоской поверхности идеальной жидкости. Сама граница жидкости является жесткой или идеально мягкой. Такого рода задачи решались для однородных тел и тел, имеющих другую форму, [25, 26, 27, 28, 24]. Здесь, как и в указанных работах используется метод замены границы полупространства на симметрично расположенную копию препятствия и решения задачи с двумя телами в неограниченной области.

## 2. Постановка задачи

Пусть у границы полупространства  $\Pi$ , заполненного идеальной жидкостью с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$  находится упругий объект  $E$ , внутренняя (основная) часть которого – упругий однородный эллипсоид с полуосями  $a, b, c$ , а внешняя – неоднородный упругий слой толщины  $h$ . Заметим, что в общем случае поверхность  $E$  не является эллипсоидальной, поскольку от поверхности эллипсоида основной части она отстоит на фиксированную величину  $h$ . Считается заданным  $d$  – расстояние от центра эллипсоида  $O_1$  до  $\Pi$ . Также известны модули упругости Ламе и плотности для однородной части тела –  $\lambda_1, \mu_1, \rho_1$ , и для внешнего слоя –  $\lambda(\mathbf{r}), \mu(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки пространства. Граница полупространства является идеально жесткой или идеально мягкой. На тело набегают гармоническая плоская звуковая волна с потенциалом смещения

$$\Psi_0 = \exp[i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \tag{1}$$

где  $\mathbf{k}_0$  – волновой вектор падающей волны ( $|\mathbf{k}_0| = k_0 = \omega/c_0$ );  $\omega$  – круговая частота;  $t$  – время. Далее множители  $\exp(-i\omega t)$  у величин, зависящих от времени будем опускать. Без ограничения общности полагается  $|\Psi_0| = 1$ .

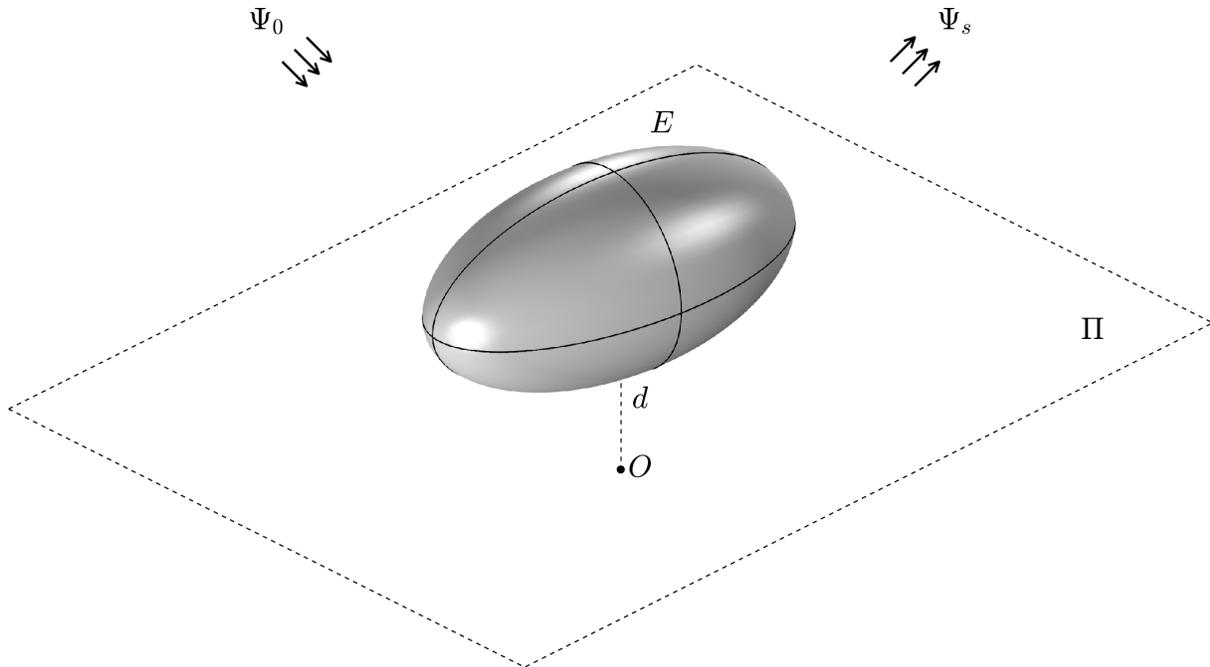


Рис. 1: Геометрия задачи

Геометрическая схема задачи представлена на рис. 1. Символом  $\Psi_s$  на нем условно показан потенциал смещений в рассеянной волне, который требует определения в задаче. Точка  $O$  на рисунке – проекция центра эллипсоида на плоскость  $\Pi$ .

Введем глобальную ортогональную декартову систему координат  $x, y, z$  так, чтобы ее начало было в точке  $O$ , а плоскость  $\Pi$  совпадала с координатной поверхностью  $z = 0$ . Будем считать, что направление вектора  $\mathbf{k}_0$  в (1) задается углом  $\theta_0$  между осью  $z$  и  $\mathbf{k}_0$ , а также углом  $\varphi_0$  между осью  $x$  и проекцией  $\mathbf{k}_0$  на плоскость  $\Pi$ . Тогда в системе  $x, y, z$  волновой вектор можно записать в виде  $\mathbf{k}_0 = (k_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0, k_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0, k_0 \cos \theta_0)$ . Центр эллипсоида  $O_1$  будет иметь координаты  $(0, 0, d)$ . Также введем локальную систему координат  $x_1, y_1, z_1$  с началом в точке  $O_1$  так, чтобы уравнение поверхности  $\Gamma_1$  однородной части рассеивателя

имело каноническую форму

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1. \quad (2)$$

Каждой точке  $M(x_1, y_1, z_1)$  поверхности  $\Gamma_1$  будет соответствовать точка внешней поверхности тела  $\Gamma'_1$  с локальными координатами

$$x'_1 = x_1 + hn_x, \quad y'_1 = y_1 + hn_y, \quad z'_1 = z_1 + hn_z, \quad (3)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  — компоненты единичной внешней нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\Gamma_1$  в точке  $M$  в системе координат  $x_1, y_1, z_1$ . Значения  $n_x, n_y, n_z$  зависят от параметров  $a, b, c$  и координат  $(x_1, y_1, z_1)$  следующим образом:

$$n_x = x_1 b^2 c^2 e, \quad n_y = y_1 a^2 c^2 e, \quad n_z = z_1 a^2 b^2 e,$$

где  $e = (x_1^2 b^4 c^4 + y_1^2 a^4 c^4 + z_1^2 a^4 b^4)^{1/2}$ .

Введем параметр  $q$  — расстояние от поверхности  $\Gamma_1$  внутренних точек неоднородного упругого слоя тела  $E$ . Тогда любую точку  $(x'_1, y'_1, z'_1)$  внутри этого слоя по аналогии с (3) можно представить в виде

$$x'_1 = x_1 + qn_x, \quad y'_1 = y_1 + qn_y, \quad z'_1 = z_1 + qn_z, \quad (4)$$

где  $0 \leq q \leq h$ .

Ориентацию осей локальной системы координат  $x_1, y_1, z_1$  по отношению к глобальной  $x, y, z$  будем задавать углами Эйлера  $\alpha, \beta, \gamma$ , схемы (3,2,3) так, что они связаны выражениями:

$$\begin{aligned} x &= (\cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) - \sin(\alpha) \sin(\gamma))x_1 - \\ &\quad - (\cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma) + \sin(\alpha) \cos(\gamma))y_1 + \cos(\alpha) \sin(\beta)z_1, \\ y &= (\sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \sin(\gamma))x_1 + \\ &\quad + (\sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cos(\gamma))y_1 + \sin(\alpha) \sin(\beta)z_1, \\ z &= -\sin(\beta) \cos(\gamma)x_1 + \sin(\beta) \sin(\gamma)y_1 + \cos(\beta)z_1. \end{aligned}$$

Эти углы Эйлера будем трактовать как углы поворота эллипсоида при задании его ориентации по отношению к поверхности  $\Pi$ , точнее, — по отношению к системе  $x, y, z$ .

Схематично, геометрия задачи после введения систем координат представлена на рис. 2. Упругое тело на нем представлено сечениями поверхности  $E$  координатными плоскостями системы координат  $x_1, y_1, z_1$ . На осях  $x_1, y_1, z_1$  указаны точки  $a' = a + h, b' = b + h, c' = c + h$ .

Обозначим области, занимаемые различными средами так:  $\Omega_0$  — область полупространства  $z > 0$ , занятая идеальной жидкостью;  $\Omega_1$  — область эллипсоида, занятая однородной упругой средой ( $x_1^2/a^2 + y_1^2/b^2 + z_1^2/c^2 \leq 1$ );  $\Omega'_1$  — неоднородный слой упругого препятствия ( $x'_1 = x_1 + qn_x, y'_1 = y_1 + qn_y, z'_1 = z_1 + qn_z, (x_1, y_1, z_1) \in \Gamma_1, 0 \leq q \leq h$ ).

В области  $\Omega_0$  движение частиц идеальной жидкости определяется потенциалами смещений в падающей  $\Psi_0$  и рассеянной  $\Psi_s$  волнах. Смещение  $\mathbf{u}_0$  и давление  $p_0$  в области  $\Omega_0$  определяются через эти потенциалы так [30]:

$$\mathbf{u}_0 = \text{grad}(\Psi_0 + \Psi_s), \quad p_0 = \rho_0 \omega^2 (\Psi_0 + \Psi_s). \quad (5)$$

При этом потенциал  $\Psi_s$  должен удовлетворять уравнению Гельмгольца [30]

$$\Delta \Psi_s + k_0^2 \Psi_s = 0 \quad (6)$$

и условиям излучения на бесконечности:

$$\left( \frac{\partial \Psi_s}{\partial r} - ik_0 \Psi_s \right)_{r \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \Psi_s|_{r \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad (7)$$

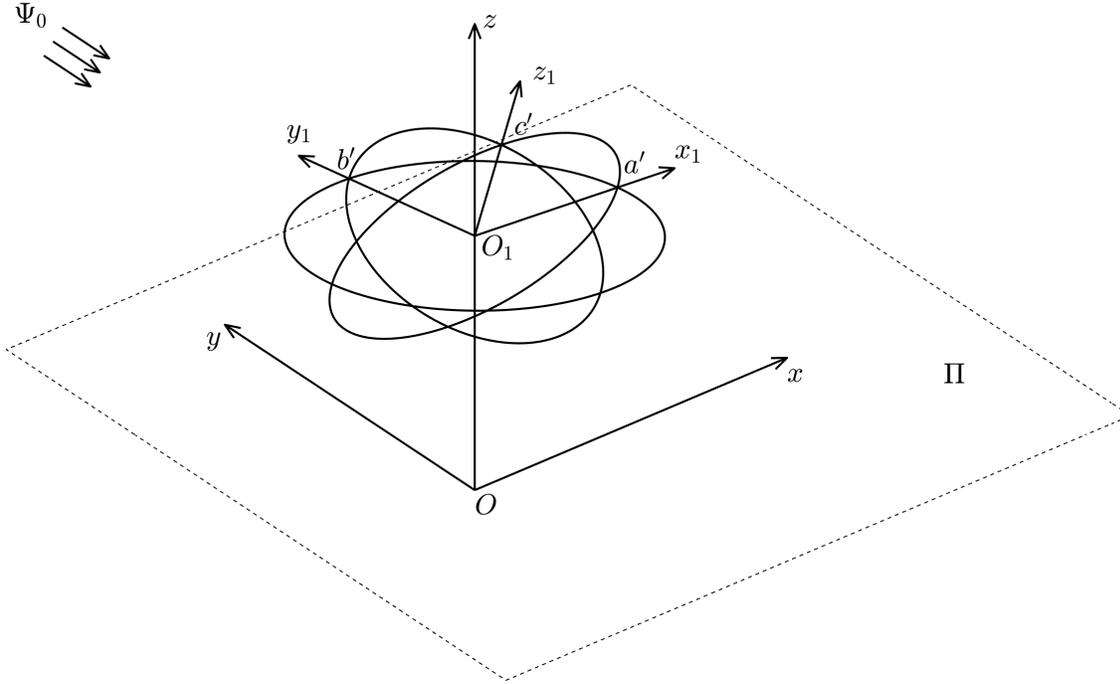


Рис. 2: Введение систем координат

где  $r = |\mathbf{r}|$ .

Предполагается, что движение частиц в препятствии подчиняется законам линейной теории упругости [31]. Обозначим вектор смещения и тензор напряжения в области однородного эллипсоида  $\mathbf{u}_1$  и  $\sigma_1$  соответственно. Тогда гармонические колебания частиц в однородной части тела  $E$  описываются уравнениями движения

$$\text{Div } \sigma_1 = -\rho_1 \omega^2 \mathbf{u}_1, \tag{8}$$

где  $\text{Div } \sigma_1$  — первый инвариант ковариантной производной тензора напряжений.

Аналогично в неоднородном слое препятствия уравнения движения будут иметь вид

$$\text{Div } \sigma = -\rho \omega^2 \mathbf{u}, \tag{9}$$

где  $\mathbf{u}$  и  $\sigma$  — вектор смещения и тензор напряжения в  $\Omega'_1$ .

Тензор напряжения выражается через компоненты вектора смещения посредством закона Гука, так что уравнения (8), (9) можно рассматривать как системы дифференциальных уравнений второго порядка относительно компонент векторов смещения  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}$ .

На поверхности  $\Gamma_1$  соединения неоднородного слоя и однородного эллипсоида должны быть непрерывными смещения и вектор напряжений:

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{u}_1, \quad \sigma_{nn}|_{\Gamma_1} = \sigma_{1nn}, \quad \sigma_{n\tau}|_{\Gamma_1} = \sigma_{1n\tau} \quad (\tau = 1, 2), \tag{10}$$

где  $\sigma_{nj}$ ,  $\sigma_{1nj}$  — компоненты скалярных произведений  $\sigma \cdot \mathbf{n}$ ,  $\sigma_1 \cdot \mathbf{n}$ ; индекс  $\tau$  определяет два ортогональных касательных к  $\Gamma_1$  направления.

На внешней поверхности тела —  $\Gamma'_1$  — поверхности соприкосновения жидкости и упругого материала должны быть непрерывными нормальная компонента вектора смещения и вектор напряжений:

$$u_n|_{\Gamma'_1} = u_{0n}, \quad \sigma_{nn}|_{\Gamma'_1} = p_0, \quad \sigma_{n\tau}|_{\Gamma'_1} = 0 \quad (\tau = 1, 2); \tag{11}$$

здесь индекс  $n$  соответствует проекции на нормаль (индекс  $\tau$  на касательные) уже к поверхности  $\Gamma'_1$ ; величины  $u_{0n}$ ,  $p_0$  выражаются через потенциалы  $\Psi_0$ ,  $\Psi_s$  в соответствии с (5).

Наконец, на границе полупространства  $\Pi$  в зависимости от ее типа должно выполняться условие

$$a) \quad u_{0z}|_{z=0} = 0, \quad \text{или} \quad b) \quad p_0|_{z=0} = 0, \quad (12)$$

где случай  $a)$  соответствует варианту жесткой поверхности  $\Pi$ , а  $b)$  – абсолютно мягкой.

Таким образом, требуется решить уравнения (6), (8), (9) с учетом граничных условий (10), (11), (12) и условий излучения (7).

### 3. Решение задачи

Для решения задачи применим подход, использованный в [29] при решении задачи о рассеянии звука сфероидом в присутствии подстилающей поверхности. Исключим из рассмотрения границу полупространства  $\Pi$ , расширив область  $\Omega_0$  до полного пространства, введя в рассмотрение второй рассеиватель  $E'$ , являющийся зеркальным отражением исходного  $E$  относительно плоскости  $z = 0$ , и вторую падающую плоскую волну  $\Psi_1$ , распространяющуюся в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}_1 = (k_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0, k_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0, -k_0 \cos \theta_0)$  (см. рис. 3).

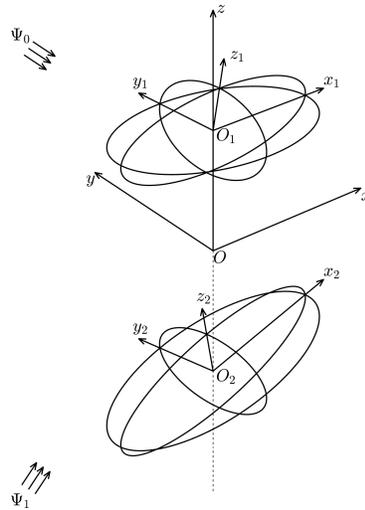


Рис. 3: Введение второго тела

На рисунке  $O_2$  — центр тела  $E'$  (глобальные координаты —  $(0, 0, -d)$ ),  $x_2, y_2, z_2$  — локальная система координат с началом в точке  $O_2$  в которой поверхность однородной части  $E'$  имеет вид, аналогичный (2). Эту поверхность будем обозначать  $\Gamma_2$ , область второго эллипсоида —  $\Omega_2$ . Внешнюю поверхность тела  $E'$ , которая определяется соотношениями, аналогичными (3), обозначим  $\Gamma'_2$ , а область неоднородного слоя между  $\Gamma_2$  и  $\Gamma'_2$  —  $\Omega'_2$ .

В случае абсолютно жесткой плоскости  $\Pi$  потенциал смещений во второй падающей плоской волне должен быть равен [26]

$$\Psi_1 = \exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})].$$

В случае акустически мягкой плоскости потенциал  $\Psi_1$  должен иметь вид

$$\Psi_1 = -\exp[i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})].$$

Тогда граничные условия (12) на плоскости  $z = 0$  будут выполнены автоматически.

Таким образом, исходная задача сводится к задаче дифракции двух плоских волн на двух идентичных телах, находящихся в безграничном пространстве  $\Omega_0$ , заполненном однородной идеальной жидкостью.

В силу линейной постановки задачи следует найти решение задачи дифракции каждой из двух плоских волн на двух эллипсоидах, а затем полученные результаты просуммировать.

Рассмотрим корректировку математической постановки задачи о дифракции плоской звуковой волны  $\Psi_0$  на двух упругих эллипсоидах с неоднородными внешними слоями. Уравнения (8), (9) должны быть продублированы для областей  $\Omega_2$  и  $\Omega'_2$  соответственно. Будем обозначать векторы смещений и тензоры напряжений в областях  $\Omega_2$  и  $\Omega'_2$  через  $\mathbf{u}_2$ ,  $\sigma_2$  и  $\mathbf{u}'$ ,  $\sigma'$ .

На поверхностях  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma'_2$  должны быть введены граничные условия, подобные (10), (11):

$$\mathbf{u}'|_{\Gamma_2} = \mathbf{u}_2, \quad \sigma'_{nn}|_{\Gamma_2} = \sigma_{2nn}, \quad \sigma'_{n\tau}|_{\Gamma_2} = \sigma_{2n\tau}; \tag{13}$$

$$u'_n|_{\Gamma'_2} = u_{0n}, \quad \sigma'_{nn}|_{\Gamma'_2} = p_0, \quad \sigma'_{n\tau}|_{\Gamma'_2} = 0 \quad (\tau = 1, 2), \tag{14}$$

где индексы  $n$  и  $\tau$  в (13) определяют нормаль и касательные к  $\Gamma_2$ , а в (14) – к  $\Gamma'_2$ .

В новой постановке условия (7) сохраняют свой вид, а условия (12) исключаются.

Заметим, что в общем случае зависимостей  $\rho(\mathbf{r})$ ,  $\lambda(\mathbf{r})$ ,  $\mu(\mathbf{r})$  для неоднородного слоя рассеивателя аналитическое решение поставленной задачи невозможно. Значительно осложняется поиск аналитического решения и тем, что граничные поверхности  $\Gamma'_1$ ,  $\Gamma'_2$  не являются координатными поверхностями ортогональных систем координат.

Будем решать сформулированную задачу численно с использованием метода конечных элементов на основе подхода, предложенного в работах [23, 24, 29].

В соответствии с этим подходом в области жидкости, прилегающей к телам  $E$  и  $E'$ , выделим сферическую поверхность  $\Gamma_0$  радиуса  $R$  такого, чтобы внутри этой поверхности оказались оба препятствия и некоторая область жидкости  $\Omega'_0$ , содержащая упругие тела. При этом минимальное расстояние от упругих тел до поверхности  $\Gamma_0$  должно иметь порядок характерного размера упругого тела.

Тогда совокупность областей жидкой и упругих сред  $\Omega = \Omega'_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega'_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega'_2$  можно рассматривать как некоторое неоднородное сферическое препятствие для падающей волны  $\Psi_0$  (см. рис. 4).

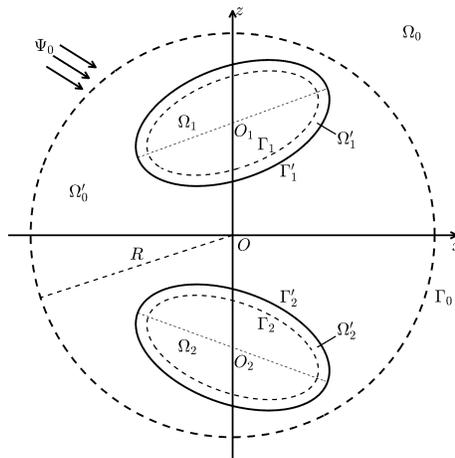


Рис. 4: Сечение области неоднородного шара  $\Omega$

Решение уравнений движения во всей области такого неоднородного препятствия будем выполнять с помощью МКЭ. Для этого, к уравнениям вида (8), (9) для упругих областей  $\Omega_1$ ,  $\Omega'_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega'_2$  надо добавить уравнения, описывающие колебания жидкости в  $\Omega'_0$ . Введем новую

переменную – потенциал смещений в  $\Omega'_0 - \Psi$ . Поскольку в  $\Omega'_0$  находится та же жидкость, что и в целом  $\Omega_0$ , то  $\Psi$  должен удовлетворять волновому уравнению вида (6)

$$\Delta\Psi + k_0^2\Psi = 0. \quad (15)$$

Немного изменится вид граничных условий (11), (14) на поверхностях  $\Gamma'_1, \Gamma'_2$ . В них надо заменить  $u_{0n}$  и  $p_0$  на

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}} \quad \text{и} \quad p = \rho_0\omega^2\Psi,$$

соответственно.

На сферической внешней поверхности области  $\Omega'_0$  надо ввести условия согласования параметров движения жидкости в  $\Omega'_0$  и во внешней среде  $\Omega_0$

$$\left. \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\partial(\Psi_0 + \Psi_s)}{\partial r}, \quad \Psi|_{r=R} = \Psi_0 + \Psi_s. \quad (16)$$

Здесь первое условие выражает требование равенства нормальных смещений в частицах, расположенных по обе стороны  $\Gamma_0$ , а второе – требование равенства давлений.

Разобьем все подобласти шара  $\Omega$  на конечные элементы в форме тетраэдров. Двумерная иллюстрация этой процедуры представлена на рис. 5.

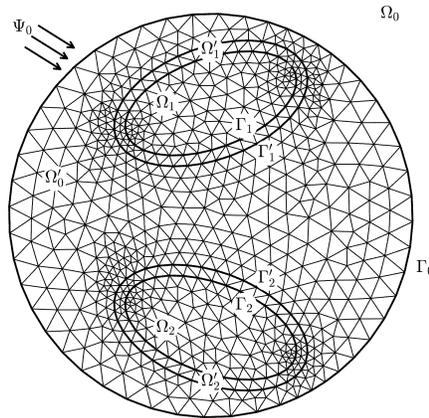


Рис. 5: Схема разбиения  $\Omega$  на конечные элементы

Все неизвестные функции в  $\Omega$  представляются в виде линейных комбинаций координатных функций узлов [22]. В частности для потенциала  $\Psi$  можно записать

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \psi_k f_k(\mathbf{r}), \quad (17)$$

где  $\psi_k$  – узловые значения потенциала в области  $\Omega$ ;  $f_k(\mathbf{r})$  – координатные функции конечно-элементной модели;  $K$  – количество узлов; будем считать, что множество значений  $k = \overline{1 \dots K}$  охватывает узлы всей КЭ-сетки области  $\Omega$ , просто в узлах, не относящихся к  $\Omega'_0$ , положим  $\psi_k \equiv 0$ .

Во внешней области содержащей жидкости потенциал смещений  $\Psi_s$  в рассеянной волне будем искать в виде разложения по сферическим гармоникам с учетом условий излучения

$$\Psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{nm} h_n(k_0 r) P_n^m(\cos\theta) \exp(im\varphi), \quad (18)$$

где  $h_n(x)$  — сферическая функция Ханкеля первого рода порядка  $n$ ;  $P_n^m(x)$  — присоединенный многочлен Лежандра степени  $n$  порядка  $m$ ;  $r, \theta, \varphi$  — координаты сферической системы координат, связанной с системой  $x, y, z$ ;  $A_{nm}$  — неизвестные коэффициенты подлежащие определению из граничных условий.

Разложим также по сферическим гармоникам и потенциал смещений в падающей плоской волне [32]

$$\Psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \gamma_{nm} j_n(k_0 r) P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (19)$$

где  $\gamma_{nm} = \frac{i^n (2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) \exp(-im\varphi_0)$ ;  $j_n(x)$  — сферическая функция Бесселя первого рода порядка  $n$ .

Подставляя (17), (18), (19) во второе граничное условие (16) и, используя ортогональность сферических гармоник, получим выражения  $A_{nm}$  через узловые значения  $\psi_k$  на поверхности  $r = R$

$$A_{nm} = -\gamma_{nm} \frac{j_n(k_0 r)}{h_n(k_0 r)} + \frac{1}{h_n(k_0 r) N_{nm}} \sum_{j=1}^M \psi_j (f_j, Y_{nm}), \quad (20)$$

где  $N_{nm} = \frac{4\pi(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}$  — норма сферической гармоники  $Y_{nm}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \exp(im\varphi)$ ;

$(f_j, Y_{nm}) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f_j(R, \theta, \varphi) \bar{Y}_{nm}(\theta, \varphi) \sin \theta d\varphi d\theta$  — скалярное произведение на поверхности  $\Gamma_0$  координатной функции  $f_k(R, \theta, \varphi)$  и сферической гармоники  $Y_{nm}(\theta, \varphi)$ ; здесь множество значений  $j = \overline{1..M}$  соответствует множеству узлов, расположенных на поверхности  $\Gamma_0$ .

Затем подставим выражение (20) для  $A_{nm}$  в первое граничное условие (16).

В форме, аналогичной (17), будем искать и смещение в упругой части препятствия (в областях  $\Omega_1, \Omega'_1, \Omega_2, \Omega'_2$ )

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^K \mathbf{U}_k f_k(\mathbf{r}).$$

Здесь  $\mathbf{u}$  рассматривается как общее обозначение для смещений  $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}', \mathbf{u}_2$ , введенных выше.

В результате граничные условия (10), (11), (13), (14) и первое из (16) будут содержать в качестве неизвестных только узловые значения функций  $\Psi, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}', \mathbf{u}_2$  из ограниченной области  $\Omega$ . Далее можно решать краевую задачу для уравнений (8), (9), аналогичных для  $E'$  и (15) с указанными граничными условиями стандартной технологией МКЭ [22]. В результате решения находим все узловые значения неизвестных функций  $\psi_k, U_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ). Подставляя найденные значения  $\psi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ) в (20), найдем коэффициенты в разложении потенциала смещения в рассеянном поле (18).

Аналогично решим задачу о рассеянии второй падающей волны  $\Psi_1$  и найдем коэффициенты  $A'_{nm}$  в разложении потенциала смещения в рассеянном поле, подобном (18). Тогда потенциал смещения в рассеянном поле, полученном от действия двух волн, можно представить в виде

$$\Psi_s(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{nm} h_n(k_0 r) Y_{nm}(\theta, \varphi), \quad (21)$$

где  $B_{nm} = A_{nm} + A'_{nm}$ .

#### 4. Численные исследования

Используя асимптотическое поведение сферической функции Ханкеля при больших значениях аргумента, представим  $\Psi_s(r, \theta, \varphi)$  при  $r \rightarrow \infty$  из (21) в виде

$$\Psi_s|_{r \rightarrow \infty} \approx \frac{R \exp(ik_0 r)}{2r} \Phi(\theta, \varphi),$$

где  $\Phi(\theta, \varphi)$  — нормированная форм-функция рассеянного поля в дальней зоне, определяющая распределение амплитуды и фазы отраженной волны вдали от препятствия,

$$\Phi(\theta, \varphi) = \frac{2}{k_0 R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^{n+1} B_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi).$$

При проведении численных исследований решения анализировалось распределение по углам  $\theta$  и  $\varphi$  амплитуды рассеянного поля, поэтому расчеты выполнялись для функции

$$F(\theta, \varphi) = \frac{1}{k_0 R'} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (-i)^{n+1} B_{nm} Y_{nm}(\theta, \varphi) \right|, \quad (22)$$

где коэффициент 2 заменен на 1, поскольку в конечном счете нас интересует отражение одного тела (а не двух);  $R' = (a+b+c)/3+h$  — характерный размер исходного упругого препятствия.

В качестве функциональных зависимостей переменных параметров упругой среды в неоднородном слое препятствия рассматривались две линейных зависимости, в которых функции зависят только от расстояния  $q$  от однородной части эллипсоида (см. (4))

$$f_1(q) = 1.5 - q/h, \quad f_2(q) = 0.5 + q/h.$$

Обе функции принимают значения из интервала  $[0.5, 1.5]$ , при этом  $f_1(q)$  убывает с ростом  $q$ , а  $f_2(q)$  — возрастает. При  $q = 0.5h$  (в середине слоя)  $f_2(q) = f_1(q) = 1$ .

Зависимость параметров материала неоднородного слоя от координат представлялась в виде

$$\rho = \rho' f(q), \quad \lambda = \lambda' f(q), \quad \mu = \mu' f(q),$$

где  $\rho'$ ,  $\lambda'$ ,  $\mu'$  — средние значения материального параметра по толщине слоя;  $f(q)$  — одна из функций  $f_1(q)$ ,  $f_2(q)$ ,  $f_0(q) \equiv 1$  (последняя предполагает постоянство значения параметра во всем слое).

Рассматривалось препятствие, однородная часть которого представляла собой эллипсоид с полуосями  $a$ ,  $b$ ,  $c$  такими, что  $a/c = 3$ ,  $b/c = 2$ ; толщина внешнего слоя  $h$  полагалась такой, что  $h/c = 0.5$ . Если не оговорено другое, то в представленных далее расчетах расстояние  $d$  установлено таким, что  $d/c = 4$ , а углы Эйлера поворотов  $E$  относительно осей системы координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны нулю.

Плотность и модули упругости в однородной эллипсоид части заданы так:  $\rho_1 = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_1 = 5.3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>,  $\mu_1 = 2.6 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>. В большей части экспериментов материальные свойства для внешнего слоя полагались равными:  $\rho' = \rho_1$ ,  $\lambda' = \lambda_1$ ,  $\mu' = \mu_1$ .

В качестве идеальной среды, заполняющей полупространство, использовалась жидкость с плотностью  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и скоростью звука  $c_0 = 1485$  м/с. Граница полупространства, занятого жидкостью полагалась абсолютно жесткой.

Частота падающей волны выбиралась такой, что  $k_0 R' = 3$ . В большей части, показанных далее расчетах,  $\theta_0 = 135^\circ$ ,  $\varphi_0 = 0$ .

На рис. 6 показано влияние на форм-функцию  $F(\theta, 0)$  (см. (22)) изменения расстояния эллипсоида до жесткой границы полупространства (схематично контуры сечения эллипсоида и внешнего слоя показаны тонкими пунктирными линиями в виде эллипсов). Пунктирной

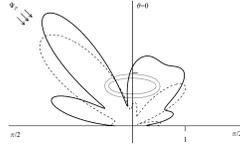


Рис. 6: Диаграмма  $F(\theta, 0)$  при  $d/c = 5$

линией изображена диаграмма для случая  $d/c = 4$ , а сплошной – для  $d/c = 5$ . Видно, что с изменением расстояния величина коэффициентов отражения в разных направлениях изменяется неодинаково. Это показывает существенное влияние на процесс рассеяния присутствие акустически жесткой поверхности.

Рис. 7 иллюстрирует влияние на процесс рассеяния поворота эллипсоидального тела относительно его центра. Пунктирной линией изображена диаграмма для случая  $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ . Сплошная линия представляет диаграмму для случая  $\alpha = 0, \beta = -20^\circ, \gamma = 0$ . Поворот тела приводит к тому, что ширина основных лепестков в теневой и освещенной областях увеличивается, но при этом максимальное значение коэффициента отражения в освещенной области возрастает, а в теневой – убывает.

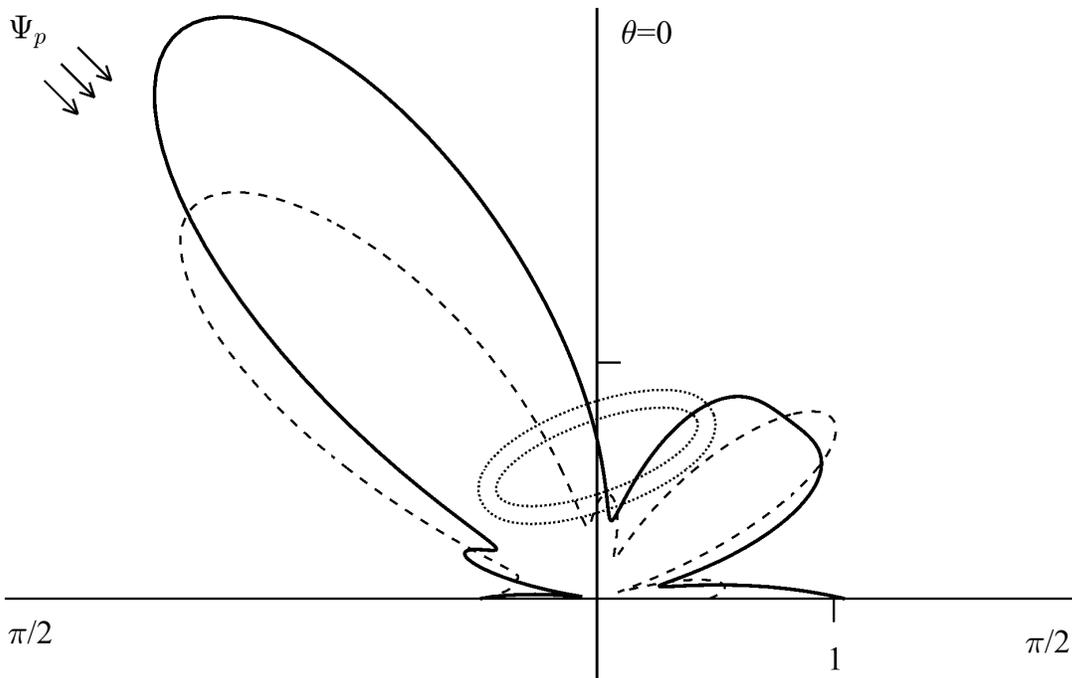
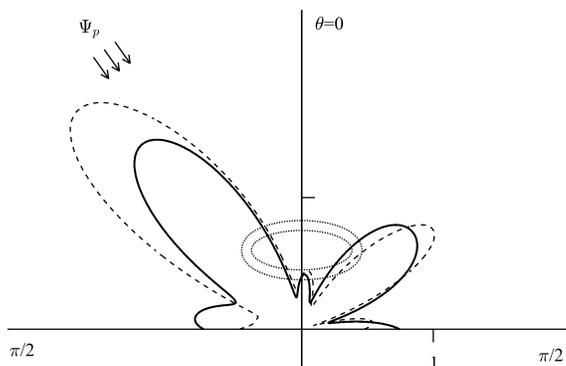


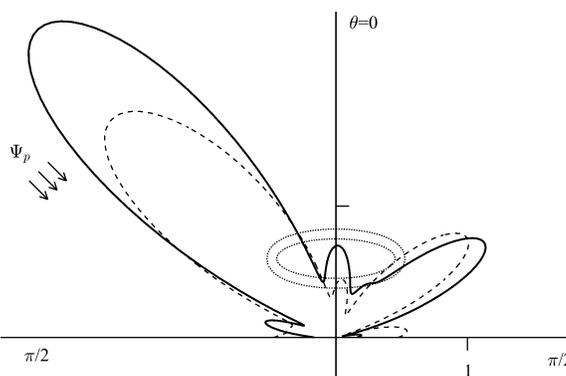
Рис. 7: Диаграмма  $F(\theta, 0)$  при  $\beta = -20^\circ$

На рис. 8 показано влияние на форм-функцию  $F(\theta, \varphi)$  ракурса наблюдения по углу  $\varphi$ . Пунктирной линией, как и выше, изображена диаграмма для случая  $\varphi = 0$ , а сплошной линией показана диаграмма  $F(\theta, \pi/4)$ . В сечении  $\varphi = \pi/4$  возрастает коэффициент отражения в окрестности  $\theta = \pi/2$  и в освещенной области, и в теневой. При остальных значениях  $\theta$  коэффициент отражения уменьшается. В максимумах лепестков диаграммы уменьшение составляет 10-20%.

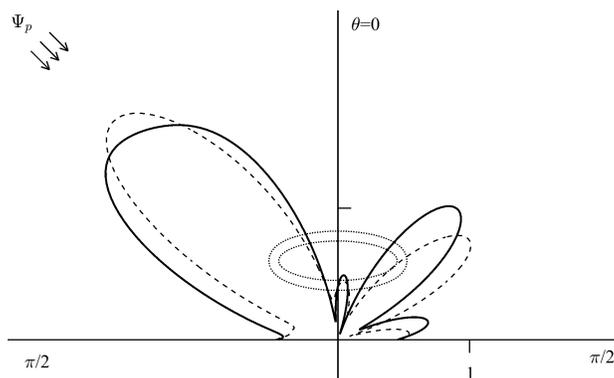
Изменение рассеивающих свойств объекта из-за изменения свойств внешнего слоя показано на рис. 9. Пунктирной линией изображена диаграмма для случая, когда все тело  $E$  является однородным с указанными выше материальными параметрами  $\rho' = \rho_1, \lambda' = \lambda_1, \mu' = \mu_1$ . сплошной линией показана диаграмма рассеяния для варианта, когда  $\rho' = 8960 \text{ кг/м}^3$ ,

Рис. 8: Диаграмма  $F(\theta, \pi/4)$ 

$$\lambda' = 13.8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \mu' = 4.4 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2.$$

Рис. 9: Диаграмма  $F(\theta, 0)$  для случая другого однородного материала внешнего слоя

При этом общая форма диаграммы изменилась несущественно, а максимальное значение в основном лепестке освещенной области увеличилось в 1.5 раза.

Рис. 10: Диаграмма  $F(\theta, 0)$  для случая неоднородного материала внешнего слоя

На рис. 10 показано влияние на форм-функцию  $F(\theta, 0)$  неоднородности материала внешнего слоя эллипсоида. Пунктирной линией изображена диаграмма для случая, когда тело  $E$  является однородным с параметрами  $\rho' = \rho_1$ ,  $\lambda' = \lambda_1$ ,  $\mu' = \mu_1$ . Сплошной линией изображена диаграмма  $F(\theta, 0)$  для случая, когда все параметры внешнего слоя являются переменными:  $\rho' = \rho_1 f_1(q)$ ,  $\lambda' = \lambda_1 f_2(q)$ ,  $\mu' = \mu_1 f_2(q)$ . Такая неоднородность приводит к тому, что ширина основного лепестка в освещенной области увеличилась на 20%, а максимум в нем умень-

шился на 7%. В теневой области заметно изменилось угловое расположение двух основных лепестков и увеличилось значение максимального коэффициента отражения в них на 10-25%. Заметим, неоднородность одного параметра при постоянстве других приводит к существенно менее заметным изменениям в форм-функции. Форма диаграммы практически не изменяется, а максимальное увеличение или уменьшение коэффициента отражения не превышает 3-5%, что оказывается сравнимым с погрешностями вычислений при небольшом числе  $K$ .

## 5. Заключение

Представленное решение показывает эффективность использования метода конечных элементов для решения задач о рассеянии звука при достаточно сложных конфигурациях упругих рассеивающих объектов. Он позволяет представить решение неким однотипным алгоритмом, который сохраняет свою структуру при широком диапазоне изменения параметров задачи.

Проведенные вычисления показывают возможность его использования для анализа трехмерных задач дифракции звука даже без использования специализированных вычислительных средств.

Полученные результаты показывают, что при рассмотренной частоте звука геометрические характеристики задачи оказывают значительно большее влияние на характер рассеянного поля, чем неоднородность материала препятствия. Но при определенных сочетаниях зависимостей в изменении параметров в диаграмме рассеяния есть заметные изменения. Следует ожидать, что повышение частоты падающей волны приведет к более выраженным изменениям форм-функции рассеяния при смене зависимостей в неоднородной части препятствия.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорюк М. В. Дифракция звуковых волн на трехосном эллипсоиде // Акустический журн. 1988. Т. 34, вып. 1. С. 160-164.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967. 300 с.
3. Silbiger A. Scattering of sound by an elastic prolate spheroid // J. Acoust. Soc. Amer. 1963. V. 35. № 4. P. 564-570.
4. Flax L. Dragonette L., Varadan V. K., Varadan V. V. Analysis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. V. 71. № 5. P. 1077-1082.
5. Клещев А. А. Трехмерные и двумерные (осесимметричные) характеристики упругих сфероидальных рассеивателей // Акуст. журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 268-271.
6. Hackman R. H. Sammelmann G. S., Williams K. L., Trivett D. H. A reanalysis of the acoustic scattering from elastic spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1988. V. 83. № 4. P. 1255-1266.
7. Рождественский К. Н., Толоконников Л. А. О рассеянии звуковых волн на упругом сфероиде // Акуст. журн. 1990. Т. 36. Вып. 5. С. 927-930.
8. Толоконников Л. А. Дифракция звуковых волн на упругом сфероиде с малым эксцентриситетом в вязкой среде // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 1997. Т. 3. Вып. 1. С. 152-157.
9. Толоконников Л. А., Лобанов А. В. Дифракция плоской звуковой волны на неоднородном упругом сфероиде // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2011. Вып. 2. С. 176-191.

10. Cooper G., Temple J. A. G. Calculations of acoustic scattering from ellipsoidal voids: bends, krill and fish // *Ultrasonics*. 1983. V. 21, № 4. С. 171-176.
11. Waterman P. C. Matrix formulation of electromagnetic scattering // *Proc. IEEE*. 1965. Vol. 53, P. 805-812.
12. Waterman P. C. T-matrix methods in acoustic scattering // *Acoust. Soc. Amer.* 2009. V. 125, № 1, P. 42-51.
13. Tsao S. J., Varadan V. V., Varadan V. K. T-Matrix Approach to Scattering of Elastic (SH-) Waves by an Inclined Surface Void // *ASME. J. Appl. Mech.* 1983. V. 50. № 1. P. 143-148.
14. Lavia E., Gonzalez J. D., Blanc S. A Computational Method to Calculate the Exact Solution for Acoustic Scattering by Liquid Spheroids // *arXiv:1603.00499v2 [physics.comp-ph]*. 2016. V. 3. P. 1-14.
15. Athanasiadis C. The hard-core multi-layered ellipsoid in a low-frequency acoustic field // *Int. J. Eng.* 1994. V. 32. P. 1352-1359.
16. Athanasiadis C. The multi-layered ellipsoid with a soft core in the presence of a low-frequency acoustic wave // *Q. J. Mech. Appl. Math.* 1994. V. 47. P. 441-159.
17. Charalambopoulos A., Dassios G. Scattering of a spherical wave by a small ellipsoid // *IMA J. Appl. Math.* 1999. V. 62. P. 117-136.
18. Ершов Н. Е., Илларионова Л. В., Смагин С. И. Численное решение трехмерной стационарной задачи дифракции акустических волн // *Вычислительные технологии*. 2010. Т. 15. № 1. С. 60-76.
19. Veksler N. D., Dubus B., Lavie A. Acoustic wave scattering by an ellipsoidal shell // *Acoust. Phys.* 1999. V. 45. P. 46-51.
20. Harari I., Hughes T. J. R. Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems // *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* 1991. V. 87. P. 59-96.
21. Gan H., Levin P. L., Ludwig R. Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 94. № 3, Pt. 1, P. 1651-1662.
22. Ihlenburg F. Finite element analysis of acoustic scattering. New York: Springer Publishing Company Inc., 2013. 226 p.
23. Скобельцын С. А. Подход к решению задач о рассеянии упругих волн с использованием МКЭ // Тез. докл. междунар. научн. конф. "Современные проблемы математики, механики, информатики" Тула: ТулГУ. 2004. С. 135-136.
24. Иванов В. И., Скобельцын С. А. Моделирование решений задач акустики с использованием МКЭ // *Известия ТулГУ. Естественные науки*. 2008. Вып. 2. С. 132-145.
25. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника. 1968. 584 с.
26. Клещев А. А. Рассеяние звука сфероидальными телами, находящимися у границы раздела сред // *Акуст. журн.* 1977. Т. 23, Вып. 3. С. 404-410.

27. Gaunaurd J. C., Huang H. Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1994. V. 96, N 6. P. 2526-2536.
28. Толоконников Л. А., Логвинова А. Л. Дифракция плоской звуковой волны на двух неоднородных цилиндрах с жесткими включениями // *Изв. ТулГУ. Естественные науки.* 2015. Вып. 1. С. 54-66.
29. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. Дифракция плоской звуковой волны на упругом сфероиде с неоднородным покрытием в присутствии подстилающей поверхности // *Изв. ТулГУ. Естественные науки.* 2015. Вып. 2. С. 64-75.
30. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.
31. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
32. Скучик Е. Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.

## REFERENCES

1. Fedoruk, M. V. 1988, "Diffraction of sound waves by a a triaxial ellipsoid *Acoustical Physics*, vol. 34, no 1, pp. 160-164.
2. Bateman, H. & Erdelyi, A. 1955, "*Higher transcendental functions*" vol. 3, McGraw-Hill., New York, 292 p.
3. Silbiger, A. 1963, "Scattering of sound by an elastic prolate spheroid *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 35, no 4, pp. 564-570.
4. Flax, L., Dragonette, L., Varadan, V.K. & Varadan V.V. 1982, "Analysis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 71, no 5, pp. 1077-1082.
5. Kleshchev, A. A. 1986. "Three-dimensional and two-dimensional (axisymmetric) characteristics of elastic spheroid scatterers *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no 2, pp. 268-271.
6. Hackman, R. H., Sammelmann, G. S., Williams, K. L. & Trivett D. H. 1988, "A reanalysis of the acoustic scattering from elastic spheroids *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 83, no 4, pp. 1255-1266.
7. Rozhdestvenskij, K. N. & Tolokonnikov, L. A. 1990, "On the scattering of sound waves by an elastic spheroid *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no 5, pp. 927-930.
8. Tolokonnikov, L. A. 1997, "Diffraction of sound waves by an elastic spheroid with a small eccentricity in a viscous medium *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Maths. Mech. Computer science*, vol. 3, no 1, pp. 152-157.
9. Tolokonnikov, L. A. & Lobanov, A. V. 2011, "Diffraction of a plane sound wave on an inhomogeneous elastic spheroid *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 176-191.
10. Cooper, G. & Temple, J.A.G. 1983, "Calculations of acoustic scattering from ellipsoidal voids: bends, krill and fish *Ultrasonics*, vol. 21, no 4, pp. 171-176.
11. Waterman, P.C. 1965, "Matrix formulation of electromagnetic scattering *Proc. of the IEEE*, vol. 53, pp. 805-812.
12. Waterman, P.C. 2009, "T-matrix methods in acoustic scattering *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 125, no 1, pp. 42-51.

13. Tsao, S. J., Varadan, V. V. & Varadan, V. K. 1983, "T-Matrix Approach to Scattering of Elastic (SH-) Waves by an Inclined Surface Void *ASME. J. Appl. Mech.*, vol. 50, no 1, pp. 143-148.
14. Lavia, E., Gonzalez, J. D. & Blanc S. 2016, "A Computational Method to Calculate the Exact Solution for Acoustic Scattering by Liquid Spheroids *arXiv:1603.00499v2 [physics.comp-ph]*, vol. 3, pp. 1-14.
15. Athanasiadis, C. 1994, "The hard-core multi-layered ellipsoid in a low-frequency acoustic field *Int. J. Eng.*, vol. 32, pp. 1352-1359.
16. Athanasiadis, C. 1994, "The multi-layered ellipsoid with a soft core in the presence of a low-frequency acoustic wave" *Q. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 47, pp. 441-159.
17. Charalambopoulos, A. & Dassios G. 1999, "Scattering of a spherical wave by a small ellipsoid *IMA J. Appl. Math.*, vol. 62, pp. 117-136.
18. Ershov, N. E., Illarionova, L. V. & Smagin S. I. 2010, "Numerical solution of three-dimensional stationary problem of acoustic waves diffraction *Vy'chislitel'ny'e tekhnologii*, vol. 15, no 1, pp. 60-76.
19. Veksler, N. D., Dubus, B. & Lavie, A. 1999, "Acoustic wave scattering by an ellipsoidal shell *Acoust. Phys.*, vol. 45, pp. 46-51.
20. Harari, I. & Hughes, T. J. R. 1991, "Finite element method for the Helmholtz equation in an exterior domain: model problems *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.* vol. 87, pp. 59-96.
21. Gan, H., Levin, P. L. & Ludwig, R. 1993, "Finite element formulation of acoustic scattering phenomena with absorbing boundary condition in the frequency domain" *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 94, no 3, pt. 1, pp. 1651-1662.
22. Ihlenburg, F. 2013, "*Finite element analysis of acoustic scattering*", Springer Publishing Company Inc., New York, 226 p.
23. Skobel'tsyn, S. A. 2004, "Approach to solving problems on the scattering of elastic waves using FEM *Tez. doc. Intern. scientific. Conf. "Modern problems of mathematics, mechanics, computer science"* Tula: Tul. Gos. Univ., pp. 135-136.
24. Ivanov, V. I. & Skobel'tsyn, S. A. 2008, "Modeling solutions to acoustics using FEM" *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 132-145.
25. Ivanov, E. A. 1968, "*Diffraction of electromagnetic waves by two bodies*", Nauka i tekhnika, Minsk, 584 p.
26. Kleshchev, A. A. 1977, "Scattering of sound by spheroidal bodies located at the interface between media" *Akust. Zhurnal*, vol. 23, no. 3, pp. 404-410.
27. Gaunaurd, J. C. & Huang, H. 1994, "Acoustic scattering by a spherical body near a plane boundary *J. Acoust. Soc. Amer.*, vol. 96, no 6, pp. 2526-2536.
28. Tolokonnikov, L. A. & Logvinova, A. L. 2015, "Diffraction of a plane sound wave on two non-uniform cylinders with rigid inserts *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 1, pp. 54-66.
29. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "Diffraction of a plane sound wave on an elastic spheroid with an inhomogeneous coating in the presence of an underlying surface *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 2, pp. 64-75.

30. Isakovich, M.A. 1973, "*General acoustics*", Nauka, Moscow, 496 p.
31. Nowacki, W. 1975, "*Teoria sprzystosci*", Mir, Moscow, 872 p.
32. Skudryzk, E.F. 1971, "*The Foundations Acoustic*", Springer-Verlag, New York, 542 p.

Получено 18.04.2018

Принято в печать 17.05.2018