ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-200-219

О взвешенном числе точек алгебраической сетки[1]

Рарова Елена Михайловна — заместитель декана, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. толстого.
e-mail: rarova82@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена изучению тригонометрических сумм алгебраических сеток с весами, которые играют центральную роль в модификации метода К. К. Фролова, предложенной Н. М. Добровольским в 1984 году. Тригонометрическую сумму алгебраической сетки с весами для вектора $\vec{m} = \vec{0}$, естественно, назвать взвешенным числом точек алгебраической сетки.

Во введении данной работы предложено обоснование актуальности темы исследования, даются необходимые определения и факты из современной теории метода К. К. Фролова, доказывается важная теорема о разложении тригонометрической суммы алгебраической сетки с весами в ряд по точкам алгебраической сетки. В разделе «Вспомогательные леммы» приводятся без доказательства необходимые факты из теории весовых функций специального вида, которые играют принципиальную роль в модификации Н. М. Добровольского метода К. К. Фролова.

Используя теорему о разложении тригонометрической суммы алгебраической сетки с весами в ряд по точкам алгебраической сетки и лемму о значении тригонометрического интеграла от весовой функции, в работе выводится асимптотическая формула для взвешенного числа точек алгебраической сетки со специальной весовой функцией порядка 2, которая утверждает, что такое число стремится к единице.

Аналогично, показано, что при росте детерминанта алгебраической решётки для любого вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$, тригонометрическая сумма алгебраических сеток с весами, заданной специальной весовой функцией, стремится к 0.

Для простоты изложения в основном тексте статьи рассматривается только случай простейшей весовой функции порядка 2.

В заключении сформулированы без доказательства аналогичные утверждения о значениях тригонометрических сумм алгебраических сеток со специальными весовыми функциями порядка $r+1$ для произвольного натурального r.

А именно, утверждается, что для взвешенного числа точек алгебраической сетки со специальной весовой функцией порядка r справедливо стремление к 1 с остаточным членом порядка $s-1$ логарифма детерминанта алгебраической решётки, делённого на $r+1$ степень детерминанта алгебраической решётки. Аналогичное утверждение справедливо о стремлении к нулю тригонометрической суммы алгебраической сетки с весами, заданной специальной весовой функцией порядка $r+1$.

Ключевые слова: алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

Библиография: 30 названий.

Для цитирования:
Е. М. Рарова. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №16-41-710194_р_центр_а

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-200-219

Weighted number of points of algebraic net

Rarova Elena Mikhailovna — deputy dean, Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.
e-mail: rarova82@mail.ru

Abstract

The paper is devoted to the study of trigonometric sums of algebraic grids with weights, which play a Central role in the modification of K. K. Frolov's method proposed by N. M. Dobrovolsky in 1984. The trigonometric sum of the algebraic grid with weights for the vector $\vec{m} = \vec{0}$ is naturally called the weighted number of points of the algebraic grid.

In the introduction of this paper, the justification of the relevance of the research topic is proposed, the necessary definitions and facts from the modern theory of K. K. Frolov's method are given, an important theorem on the decomposition of the trigonometric sum of an algebraic grid with weights in a row by points of an algebraic grid is proved. In the section "Auxiliary lemmas"the necessary facts from the theory of weight functions of a special kind which play a principal role in modification of H. M. Dobrovolsky are given without proof. method K. K. Frolov.

Using a theorem on the decomposition of the trigonometric sum of an algebraic grid with weights in a row by points of an algebraic grid and a Lemma on the value of a trigonometric integral of the weight function, we derive an asymptotic formula for the weighted number of points of an algebraic grid with a special weight function of order 2, which States that such a number tends to unity.

Similarly, it is shown that when the determinant of an algebraic lattice grows for any vector $\vec{m} \neq \vec{0}$, the trigonometric sum of algebraic grids with weights given by the special weight function tends to 0.

For simplicity, only the case of the simplest weight function of order 2 is considered in the main text of the article.

In conclusion, we formulate without proof similar statements about the values of trigonometric sums of algebraic grids with special weight functions of the order $r + 1$ for any natural R.

Namely, it is argued that for the weighted number of points of algebraic nets with a special weight function r is true desire-to-1 with the residual member of the order $s-1$ of the logarithm of the determinant is an algebraic lattice, divided by $r + 1$ the degree of the determinant is an algebraic lattice. A similar statement is true about the tendency to zero the trigonometric sum of an algebraic grid with weights given by a special weight function of the order $r + 1$.

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions.

Bibliography: 30 titles.

For citation:
E. M. Rarova, 2018, "Weighted number of points of algebraic net *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 200–219.

1. Введение

1.1. Актуальность и цель работы

В работе [9] следующим образом сформулирована **Проблема значений тригонометрических сумм сеток:**

"Нормированные тригонометрические суммы параллелепипедальных сеток имеют два значения: 0 и 1. Для нормированных тригонометрических сумм двумерных сеток Смоляка таких значений три: 0, 1 и -1. Для неравномерных сеток имеется или хорошая равномерная оценка $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, или они равны 1.

Очень важно получить оценки нормированных тригонометрических сумм для алгебраических сеток.

Если эти суммы имеют спектр значений не сосредоточенный около точек 0 и 1, то алгебраические сетки нельзя хорошо приблизить параллелепипедальными сетками, а алгебраические решётки нельзя хорошо приблизить целочисленными решётками."

Актуальность темы состоит в том, что взвешенное число точек алгебраической сетки является значением соответствующей тригонометрической суммы алгебраической сетки с весами при $\vec{m} = \vec{0}$, и, следовательно, значение этой суммы должно стремиться к 1 при росте количества точек алгебраической сетки.

Цель работы — получить асимптотическую формулу для взвешенного числа точек алгебраической сетки со специальной весовой функцией порядка 2.

1.2. Алгебраические сетки

В 1976 году вышла работа [28] К. К. Фролова, в которой впервые появились алгебраические сетки. Наиболее полно в авторском изложении метод Фролова представлен в его кандидатской диссертации [29]. Позднее в работах [11] — [16] Н. М. Добровольский предложил модификацию метода Фролова с использованием специальных весовых функций. Современное, полное изложение метода Фролова и его модификации по Н. М. Добровольскому дается в работах [4] — [7], [26].

Будем использовать следующие обозначения и определения из работ [21] и [26]. Рассматриваются:

единичные $s-$мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu \leqslant 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, s\},$$
$$G_s = \{\vec{x}\,|\,0 \leqslant x_\nu < 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, s\};$$

непрерывные периодические функции с периодом равным единице по каждой из переменных x_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, s$), принадлежащие классу $E_s^\alpha(C)$, который состоит из периодических функций

$$f(\vec{x}) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})},$$

для которых

$$|C(\vec{m})| \leqslant \frac{C}{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^\alpha}, \quad (\alpha > 1)$$

и $\overline{m} = \max(1, |m|)$ для любого вещественного m.

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$. Целой частью вектора называется вектор $[\vec{x}] = \vec{x} - \{\vec{x}\}$.

Через $p(\vec{x}) = \left[\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right]$ обозначим ближайший целый вектор в смысле нормы $\|\vec{x}\|_1 = \max(|x_1|, \ldots, |x_s|)$. Для нормы вектора отклонения от ближайшего целого $\delta(\vec{x})$, заданного равенством

$$\delta(\vec{x}) = p(\vec{x}) - \vec{x} = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) - \left\{\vec{x} + \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right\},$$

справедливо неравенство $\|\delta(\vec{x})\|_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1\vec{\lambda}_1 + \ldots + m_s\vec{\lambda}_s = \vec{m} \cdot A \,|\, \vec{m} = (m_1, \ldots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{1\,1}, \ldots, \lambda_{1\,s})$,…,$\vec{\lambda}_s = (\lambda_{s\,1}, \ldots, \lambda_{s\,s})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решётки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{1\,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s\,1} & \ldots & \lambda_{s\,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x} \,|\, \forall \vec{y} \in \Lambda \ (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \dfrac{1}{q}\Lambda^*$.

Определение 1. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$.*

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 2. *Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s = -1}^{0} \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)) = 1 \text{ при } \vec{x} \in G_s, \tag{1}$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при} \quad \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \tag{2}$$

$$\left| \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leqslant B(\overline{\sigma}_1 \ldots \overline{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого} \quad \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \tag{3}$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$.

Определение 3. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$ называется формула вида*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} = (\det \Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x} \in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} f(\vec{x}) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\text{где} \quad \rho_{\vec{x}} = \sum_{\vec{y} \in M_1(\Lambda), \{\vec{y}\} = \vec{x}} \rho(\vec{y}), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_s^α справедлива оценка (см. [13], [21])

$$R_{N'(\Lambda)}[E_s^\alpha(C)] = \sup_{f\in E_s^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB\cdot c_1(\alpha)^s\zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где}\quad c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right),\quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = {\sum_{\vec{x}\in\Lambda}}'(\overline{x}_1\ldots\overline{x}_s)^{-\alpha}.$$

Отметим важное обстоятельство — квадратурные формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$, вообще говоря, задают насыщаемый алгоритм численного интегрирования, если весовая функция конечного порядка и решетка не является целочисленной.

Этот алгоритм будет ненасыщаемый для целочисленных решеток, то есть для параллелепипедальных сеток, или для весовых функций бесконечного порядка. Определение ненасыщаемых алгоритмов дано в монографиях [1], [22].

Вопросы построения численных алгоритмов с правилом остановки рассмотрены в работах [8], [10], [25] — [24], [30].

Параллелепипедальные сетки и метод оптимальных коэффициентов изучаются в работах [17] — [21], [2], [3], [9] и других.

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \tag{4}$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни $\Theta_\nu\,(\nu = 1,\ldots,s)$ многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1,\ldots,\Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1\\ \Theta_1 & \ldots & \Theta_s\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \Theta_1^{s-1} & \ldots & \Theta_s^{s-1}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1,\ldots,\Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Напомним, что

$$\lambda_1(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_1 = \max_{0\leqslant k\leqslant s-1}\left(|\Theta_1|^k+\ldots+|\Theta_s|^k\right),$$

$$\lambda_2(\vec{a}) = \|T(\vec{a})\|_2 = \max_{\nu=1,\ldots,s}(1+|\Theta_\nu|+\ldots+|\Theta_\nu^{s-1}|) = \|T^\top(\vec{a})\|_1,$$

где $T^\top$ — транспонированная матрица к матрице T.

Тогда параллелепипед

$$\Pi_s(T_1) = \left\{\vec{x}\,\middle|\,|t_{\nu 1}x_1+\ldots+t_{\nu s}x_s| \leqslant \frac{1}{2}\quad(\nu=1,\ldots,s)\right\} =$$

$$= \left\{\vec{x}\,\middle|\,\|\vec{x}\cdot T_1^\top\|_1 \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$

задаваемый матрицей

$$T_1 = (t_{\nu\mu})_{1\leqslant\nu,\mu\leqslant s} = T_1(\vec{a}) = \frac{1}{2\|T(\vec{a})\|_1}\cdot T(\vec{a}), \tag{6}$$

содержит $s-$мерный куб

$$K_s = \{\vec{x}\,|\,|x_\nu|\leqslant 1,\quad \nu=1,\ldots,s\} = \{\vec{x}\,|\,\|\vec{x}\|_1\leqslant 1\},$$

где $\|\vec{x}\|_1 = \max\limits_{\nu=1,\ldots,s}|x_\nu|$, поскольку $\|T(\vec{a})\cdot\vec{x}\|_1 \leqslant \|T(\vec{a})\|_1\cdot\|\vec{x}\|_1$, то есть

$$\max_{\substack{|x_\nu|\leqslant 1\\ \nu=1,\ldots,s}}\left|\Theta_1^k x_1+\ldots+\Theta_s^k x_s\right| \leqslant |\Theta_1|^k+\ldots+|\Theta_s|^k,\ (k=0,1,\ldots,s-1).$$

Для любого $t>0$ решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t\cdot T(\vec{a})) = \left\{\vec{x} = \left(t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_1^{\nu-1}m_\nu,\ldots,t\sum_{\nu=1}^{s}\Theta_s^{\nu-1}m_\nu\right) = t\cdot\vec{m}\cdot T(\vec{a})\,\middle|\,\vec{m}\in\mathbb{Z}^s\right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t\cdot(\Theta_1^{\nu-1},\ldots,\Theta_s^{\nu-1})$ $(\nu=1,\ldots,s)$.

Так как координаты любой ненулевой точки $\vec{x}\in\Lambda(T(\vec{a}))$ — алгебраически сопряженные целые алгебраические числа, то произведение $x_1\ldots x_s$ — ненулевое целое рациональное число.

Кроме этого, если T — произвольная невырожденная матрица и $T^* = (T^{-1})^\top$, то решётки $\Lambda(T)$ и $\Lambda(T^*)$ — взаимные решётки: $\Lambda^*(T) = \Lambda(T^*)$.

Для алгебраических решёток и сама решётка, и её взаимная решётка не имеют ненулевых точек с нулевым произведением координат. Для обоснования этого достаточно показать, что координаты любой ненулевой точки взаимной решётки для алгебраической решётки образуют полный набор алгебраически сопряженных чисел из одного и того же алгебраического чисто вещественного поля степени s над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Обозначим через $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)} = \mathbb{Q}(\Theta_\nu)$ — алгебраическое расширение степени s поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ $(\nu=1,\ldots,s)$. Так как все корни неприводимого многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ — действительные числа, то мы имеем набор из s изоморфных чисто вещественных алгебраических полей степени s. Из предыдушего следует, что каждая строка матрицы $T(\vec{a})$ состоит из полного набора алгебраически сопряженных чисел, а все элементы ν-ого столбца матрицы принадлежат одному и тому же алгебраическому полю $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)}$ $(\nu=1,\ldots,s)$. Так как точки решётки $\Lambda(T(\vec{a}))$ — целочисленные линейные комбинации строк матрицы $T(\vec{a})$, то координаты каждой точки $\vec{x}\in\Lambda(T(\vec{a}))$ — полный набор алгебраически сопряженных чисел, а ν-ая координата для любой точки этой решётки принадлежат одному и тому же алгебраическому полю $\mathbb{F}_{\vec{a}}^{(\nu)}$ $(\nu=1,\ldots,s)$.

Покажем, что этим свойством обладает и взаимная решётка.

Как обычно,[2] $\sigma_j(\vec{\Theta}) = (-1)^j a_{s-j}$ — элементарные симметрические многочлены степени j от корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$ $(0\leqslant j\leqslant s)$.

Лемма 1. *Пусть* $S_j(\vec{\Theta}) = \sum\limits_{\nu=1}^{s}\Theta_\nu^j$, $j\geqslant 0$ *и симметрическая матрица* $Q(\vec{a})$ *задана равенством*

$$Q(\vec{a}) = \begin{pmatrix} S_0(\vec{\Theta}) & \ldots & S_{s-1}(\vec{\Theta})\\ S_1(\vec{\Theta}) & \ldots & S_s(\vec{\Theta})\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ S_{s-1}(\vec{\Theta}) & \ldots & S_{2s-2}(\vec{\Theta})\end{pmatrix},$$

тогда $Q(\vec{a})$ *— невырожденная симметрическая рациональная матрица и справедливо равенство* $Q(\vec{a}) = T(\vec{a})\cdot T(\vec{a})^\top$.

[2]здесь пользуемся естественным соглашение, что $a_s = 1$.

Доказательство. См. [26]. $\square$

Обозначим через $U_{\nu\, j}(\vec{\Theta})$ элементы матрицы $Q(\vec{a})^{-1}$. Ясно, что из симметричности функций $S_j(\vec{\Theta})$ вытекает симметричность функций $U_{\nu\, j}(\vec{\Theta})$.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$T^*(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{1\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1} \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{2\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}(\vec{\Theta})\Theta_1^{k-1} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{s} U_{s\,k}(\vec{\Theta})\Theta_s^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. См. [26]. $\square$

Лемма 3. *Произвольная точка $\vec{x}$ решетки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$ имеет вид:*

$$\vec{x} = \left(\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\,k}(\vec{\Theta})m_\nu\right)\Theta_1^{k-1}, \dots, \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{s} U_{\nu\,k}(\vec{\Theta})m_\nu\right)\Theta_s^{k-1}\right),$$

где $m_1, \dots, m_s$ — произвольные целые числа.

Доказательство. См. [26]. $\square$

Лемма 4. *Пусть $t(\vec{\Theta})$ — наименьший общий знаменатель для рациональных чисел $S_0(\vec{\Theta})$,…,$S_{s-1}(\vec{\Theta})$, точка $\vec{x}$ решётки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$ будет целочисленной тогда, и только тогда, когда $\vec{x}$ имеет вид: $\vec{x} = t(\vec{\Theta}) \cdot (m, \dots, m)$ и m — целое число.*

Других точек $\vec{x}$ решётки $\Lambda(T^*(\vec{a}))$, у которых хотя бы одна координата рациональная, не существует.

Доказательство. См. [26]. $\square$

1.3. Тригонометрические суммы сетки с весами

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k)) \quad (k = 1 \dots N)$ называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы.* Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

Для произвольных целых m_1,…, m_s суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots, m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]}, \tag{7}$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами.*

Будем также рассматривать *нормированные тригонометрические суммы сетки с весами*

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots, m_s) = \frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(m_1,\dots, m_s).$$

Положим $\rho(M) = \sum\limits_{j=1}^{N} |\rho_j|$, тогда для всех нормированных тригонометрических сумм сетки с весами справедлива тривиальная оценка

$$|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \leqslant \frac{1}{N}\rho(M). \tag{8}$$

Если все веса равны 1, то будем говорить просто тригонометрическая сумма сетки и писать $S_M(\vec{m})$ и нормированная тригонометрическая сумма сетки $S^*_M(\vec{m})$.

Пусть q — натуральное число больше 1 и $q_1 = \left[\frac{q-1}{2}\right]$, $q_2 = \left[\frac{q}{2}\right]$, тогда множество $\{-q_1, \dots, q_2\}$ является полной системой вычетов по модулю q.

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t \cdot \Lambda(T))$ из $N'(t \cdot \Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ $(k = 1, \dots, N'(t \cdot \Lambda(T))$) с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x}_k,\, \vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\, \vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}.$$

Теорема 1. *Для алгебраической решётки $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство*[3]

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sideset{}{'}\sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))} \int_{-1}^{1}\dots\int_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m}-\vec{x})} d\vec{y}, \tag{9}$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0},\ \vec{m} \in \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим для решётки $\Lambda = \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ квадратурную формулу

$$\int_{-1}^{1}\dots\int_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})} d\vec{y} = (\det\Lambda)^{-1} \sum_{\vec{x}\in M'(\Lambda)} \rho_{\vec{x}} e^{2\pi i(\vec{x},\vec{m})} - $$
$$-R_{N'(\Lambda)}\left[\rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})}\right]. \tag{10}$$

Для интеграла в левой части равенства по свойствам весовой функции и периодичности экспоненты имеем:

$$\int_{-1}^{1}\dots\int_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})} d\vec{y} = \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s=-1}^{0} \int_{0}^{1}\dots\int_{0}^{1} \rho(\vec{y} + (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s)) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})} d\vec{y} =$$
$$= \int_{0}^{1}\dots\int_{0}^{1} \left(\sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s=-1}^{0} \rho(\vec{y} + (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s)) \right) e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})} d\vec{y} = \int_{0}^{1}\dots\int_{0}^{1} e^{2\pi i(\vec{y},\vec{m})} d\vec{y} = \delta(\vec{m}). \tag{11}$$

Сумма в правой части равенства (10) есть в точности тригонометрическая сумма сетки с весами $S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m})$, которую можно записать следующим образом

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}\in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x},\, \vec{y}\in M_1(t\cdot\Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})} =$$
$$= (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x}^*\in K_s \bigcap (t\cdot\Lambda(T))^*} \rho(\vec{x}^*) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x}^*)}. \tag{12}$$

[3]Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

Пусть $\vec{\lambda}_\nu = (\lambda_{\nu\,1}, \ldots, \lambda_{\nu\,s})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ — базис решетки Λ и $\vec{\lambda}^*_\nu = (\lambda^*_{\nu\,1}, \ldots, \lambda^*_{\nu\,s})$ $(\nu = 1, \ldots, s)$ — взаимный базис взаимной решетки Λ^*.

Пусть q натуральное число такое, что

$$\max_{\nu=1,\ldots,s}\left(\sum_{\mu=1}^{s}|\lambda_{\nu\,\mu}|\right) \leq q. \tag{13}$$

Через $K_s(q)$ обозначим s-мерный куб $K_s(q) = [-q, q]^s$, а через $\Pi_s(\Lambda, q)$ — s-мерный параллелепипед

$$\Pi_s(\Lambda, q) = \left\{\vec{x}\,\middle|\, -q \leqslant \sum_{\mu=1}^{s}\lambda_{\nu\,\mu}x_\mu \leqslant q \quad (\nu = 1, \ldots, s)\right\}.$$

Из определения $K_s(q)$ и $\Pi_s(\Lambda, q)$ следует, что s-мерный куб $K_s \subset \Pi_s(\Lambda, q)$ и при линейном преобразовании

$$(y_1, \ldots, y_s) = (x_1, \ldots, x_s)\cdot\begin{pmatrix}\lambda_{1\,1} & \ldots & \lambda_{s\,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_{1\,s} & \ldots & \lambda_{s\,s}\end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_s)\cdot A,$$

$$y_\nu = \sum_{\mu=1}^{s}\lambda_{\nu\,\mu}x_\mu \quad (\nu = 1, \ldots, s)$$

s-мерный параллелепипед $\Pi_s(\Lambda, q)$ переходит в $K_s(q)$.

Действительно, пусть $\vec{x} \in K_s$, тогда

$$\left|\sum_{\mu=1}^{s}\lambda_{\nu\,\mu}x_\mu\right| \leqslant \sum_{\mu=1}^{s}|\lambda_{\nu\,\mu}| \leqslant q$$

и следовательно, $\vec{x} \in \Pi_s(\Lambda, \vec{q})$.

Рассмотрим функцию $g(\vec{x})$ на s-мерном кубе $K_s(q)$, определенную равенством

$$g(\vec{x}\,) = \rho(\vec{x}^{\,*})e^{2\pi i(\vec{x}^{\,*}, \vec{m})},$$

где векторы $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ и $\vec{x}^{\,*} = (x^*_1, \ldots, x^*_s)$ связаны соотношением

$$(x^*_1, \ldots, x^*_s) = (x_1, \ldots, x_s)\cdot\begin{pmatrix}\lambda^*_{1\,1} & \ldots & \lambda^*_{s\,1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda^*_{1\,s} & \ldots & \lambda^*_{s\,s}\end{pmatrix} = (x_1, \ldots, x_s)\cdot A^{-1},$$

$$x^*_\nu = \sum_{\mu=1}^{s}x_\mu\lambda^*_{\nu\mu} \quad (\nu = 1, \ldots, s),$$

то есть $\vec{x}^* = x_1\vec{\lambda}^*_1 + \ldots + x_s\vec{\lambda}^*_s$.

Так как вне s-мерного куба K_s функция $\rho(\vec{x})$ обращается в нуль, то

$$\sum_{\vec{x}^*\in K_s\bigcap(t\cdot\Lambda(T))^*}\rho(\vec{x}^*)e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x}^*)} = \sum_{\vec{x}^{\,*}\in\Lambda^*\bigcap\Pi_s(\Lambda, q)}\rho(\vec{x}^{\,*})e^{2\pi i(\vec{x}^{\,*},\,\vec{m})} =$$

$$= \sum_{\vec{x}^{\,*}\in\Lambda^*}\rho(\vec{x}^{\,*})e^{2\pi i(\vec{x}^{\,*},\,\vec{m})} = \sum_{x_1,\ldots,x_s=-q}^{q-1}\rho(\vec{x}\cdot A^{-1})e^{2\pi i(\vec{x}\cdot A^{-1},\,\vec{m})} = \sum_{x_1,\ldots,x_s=-q}^{q-1}g(\vec{x}).$$

Гладкая функция $g(\vec{x})$ обращается в нуль на границе куба $K_s(q)$, поэтому ее можно разложить в абсолютно сходящийся кратный ряд Фурье на кубе $K_s(q)$:

$$g(\vec{x}) = \sum_{\vec{n}=-\infty}^{+\infty} c(\vec{n}) e^{2\pi i \frac{(\vec{n},\vec{x})}{2q}},$$

где

$$c(\vec{n}) = (2q)^{-s} \int\limits_{K_s(q)}\!\!\int g(\vec{x}) e^{-2\pi i \frac{(\vec{n},\,\vec{x})}{2q}} d\vec{x}. \tag{14}$$

Так как

$$\sum_{k=-q}^{q-1} e^{2\pi i \frac{nk}{2q}} = 2q\delta_{2q}(n),$$

где символ Коробова $\delta_a(b)$ задается равенством

$$\delta_a(b) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad b \equiv 0 \pmod{a}, \\ 0 & \text{при} \quad b \not\equiv 0 \pmod{a}, \end{cases}$$

то

$$\det(t \cdot \Lambda(T)) \cdot S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \sum_{x_1,\ldots,x_s=-q}^{q-1} g(\vec{x}) = \sum_{x_1,\ldots,x_s=-q}^{q-1} \sum_{\vec{n}=-\infty}^{+\infty} c(\vec{n}) e^{2\pi i \frac{(\vec{n},\vec{x})}{2q}} =$$

$$= \sum_{\vec{n}=-\infty}^{+\infty} c(\vec{n})(2q)^s \delta_{2q}(n_1) \ldots \delta_{2q}(n_s) = (2q)^s \sum_{\vec{n}=-\infty}^{+\infty} c(2q\vec{n}).$$

Из выражения (14) для коэффициентов Фурье находим

$$c(2q\vec{n}) = (2q)^{-s} \int\limits_{K_s(q)}\!\!\int \rho(\vec{x} \cdot A^{-1}) e^{2\pi i (\vec{x}\cdot A^{-1},\, \vec{m})} e^{-2\pi i (\vec{n},\vec{x})} d\vec{x} =$$

$$= (2q)^{-s} \int\limits_{K_s(q)}\!\!\int \rho(\vec{x} \cdot A^{-1}) e^{2\pi i (\vec{x}\cdot A^{-1},\, \vec{m})} e^{-2\pi i (n_1\vec{\lambda}_1+\ldots+n_s\vec{\lambda}_s, x_1\vec{\lambda}_1^*+\ldots+x_s\vec{\lambda}_s^*)} d\vec{x} =$$

$$= (2q)^{-s} \det\Lambda \int\limits_{\Pi_s(\Lambda,q)}\!\!\int \rho(\vec{y}) e^{2\pi i (\vec{y},\, \vec{m})} e^{-2\pi i (n_1\vec{\lambda}_1+\ldots+n_s\vec{\lambda}_s,\vec{y})} d\vec{y} =$$

$$= (2q)^{-s} \det\Lambda \int\limits_{-1}^{1} \ldots \int\limits_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i (\vec{y},\, \vec{m})} e^{-2\pi i (n_1\vec{\lambda}_1+\ldots+n_s\vec{\lambda}_s,\vec{y})} d\vec{y}.$$

Отсюда и из равенства (11) следует, что

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' \int\limits_{-1}^{1} \ldots \int\limits_{-1}^{1} \rho(\vec{y}) e^{2\pi i (\vec{y},\, \vec{m}-\vec{x})} d\vec{y}$$

и теорема полностью доказана.

□

2. Вспомогательные леммы

Как обычно, через $\zeta(\alpha) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} m^{-\alpha}$ обозначается дзета-функция Римана при $\alpha > 1$, для которой выполнены неравенства

$$\frac{1}{\alpha-1} = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} < \zeta(\alpha) < 1 + \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha-1}.$$

Приведем необходимые леммы из работы [26].

Лемма 5. *Для любого действительного σ выполняется неравенство*

$$\left|\int\limits_{-1}^{1}(1-|x|)e^{2\pi i\sigma x}dx\right| \leqslant (\overline{\sigma})^{-2}, \tag{15}$$

где $\overline{\sigma} = \max(1, |\sigma|)$.

Доказательство. См. [26]. $\square$

Лемма 6. *Пусть функция $\rho_r(x)$ определена равенствами*

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ 1-(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}C_{r-1}^{\nu}\dfrac{(-1)^\nu}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1-(-1)^r(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}C_{r-1}^{\nu}\dfrac{1}{r+\nu}x^{r+\nu}, & \text{при } -1 < x < 0 \end{cases}. \tag{16}$$

Тогда для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_r(\sigma) = \int\limits_{-1}^{1}\rho_r(x)e^{2\pi i\sigma x}dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)| \leqslant \frac{B(r)}{\overline{\sigma}^{r+1}} \tag{17}$$

и функция $\rho_r(x)$ — весовая функция порядка $r+1$ с константой $B(r)$, где

$$B(r) = \frac{(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}}{\pi(2\pi)^r}\sup_{|\sigma|>1}\left|\big(P_{r-1}(1)e^{2\pi i\sigma} - P_{r-1}(0)\big) - \int\limits_0^1 P_{r-1,r}(x)e^{2\pi i\sigma x}dx\right|,$$

и при $0 \leqslant \nu \leqslant r-1$ имеем:

$$\big(((1-x)x)^{r-1}\big)^{(\nu)} = ((1-x)x)^{r-1-\nu}P_\nu(x),$$

где

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_{\nu+1}(x) = \nu(1-2x)P_\nu(x) + x(1-x)P'_\nu(x) \quad (\nu = 0, \ldots, r-2),$$
$$P_{r-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu C_{r-1}^{\nu}\prod_{k=0}^{r-2}(r-1+\nu-k)x^\nu,$$

и при $r \leqslant \nu \leqslant 2r-2$ имеем:

$$\left(((1-x)x)^{r-1}\right)^{(\nu)} = P_{r-1,\nu}(x), \quad P_{r-1,r}(x) = P'_{r-1}(x),$$
$$P_{r-1,\nu}(x) = \sum_{\mu=\nu+1-r}^{r-1} (-1)^{\mu} C_{r-1}^{\mu} \prod_{k=0}^{\nu-1} (r-1+\mu-k) x^{r-1+\mu-\nu} =$$
$$= P'_{r-1,\nu-1}(x) = P_{r-1}^{(\nu-r+1)}(x),$$
$$P_{r-1,2r-2}(x) = (-1)^{r-1}(2r-2)!.$$

Доказательство. См. [26]. □

Заметим, что лемма 5 является уточнением леммы 6, так как $\rho_1(x) = 1-|x|$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Из доказанной леммы следует, что функция $\rho_r(\vec{x})$, заданная равенством

$$\rho_r(\vec{x}) = \prod_{j=1}^{s} \rho_r(x_j), \tag{18}$$

является весовой функцией порядка $r+1$.

Лемма 7. *Для любого действительного σ и $\gamma > 1$ для величины $\psi_{\gamma,r}(\sigma)$, заданной равенством*

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \overline{m}^{\,-\gamma} (\overline{m+\sigma})^{-r},$$

выполняется неравенство

$$\psi_{\gamma,r}(\sigma) \leqslant \begin{cases} \dfrac{2\,(1+\zeta(\gamma)) + (1+2\zeta(\gamma))\,2^{\gamma}}{(\overline{\sigma})^{\gamma}} & \text{при } 1 < \gamma \leqslant r, \\ \dfrac{2\,(1+\zeta(r)) + (1+2\zeta(r))\,2^{r}}{(\overline{\sigma})^{r}} & \text{при } \gamma > r. \end{cases} \tag{19}$$

Доказательство. См. [26]. □

Лемма 8. *Для любого абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty} |\, u_\nu \,|$ при $\alpha > 1$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\, u_\nu \,|^{\alpha} \leqslant \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |\, u_\nu \,| \right)^{\alpha}. \tag{20}$$

Доказательство. См. [26]. □

3. Ряд Фурье для специальной весовой функции порядка 2

Согласно теореме 1 (см. стр. 207) для вычисления величины $S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{0})$ со специальной весовой функцией $\rho_r(\vec{x})$ порядка $r+1 \geqslant 2$ достаточно вычислить

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{0}) = 1 + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}{}' \int_{-1}^{1} \ldots \int_{-1}^{1} \rho_r(\vec{y}) e^{-2\pi i (\vec{y},\vec{x})} d\vec{y}, \tag{21}$$

где

$$\rho_r(\vec{x}) = \rho_r(x_1) \cdot \ldots \cdot \rho_r(x_s),$$

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ 1 - (2r-1)C_{2r-2}^{r-1} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \dfrac{(-1)^{\nu}}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 - (-1)^r (2r-1)C_{2r-2}^{r-1} \sum\limits_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \dfrac{1}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Кроме того из доказательства теоремы 1 вытекает, что важную роль в рассматриваемых вопросах играет кратный ряд Фурье для функции

$$g_r(\vec{x}\,) = \begin{cases} \rho_r(\vec{x}^{\,*}) e^{2\pi i (\vec{x}^{\,*}, \vec{m})}, & \text{при } \vec{x} \in K_s(q), \\ g_r(\vec{y}\,), & \text{при } \vec{x} = \vec{y} + q\vec{n},\ \vec{y} \in K_s(q),\ \vec{n} \in \mathbb{Z}^s, \end{cases}$$

который имеет вид

$$g_r(\vec{x}) = \sum_{\vec{n}=-\infty}^{+\infty} c_r(\vec{n}) e^{2\pi i \frac{(\vec{n}, \vec{x})}{2q}},$$

где

$$c_r(\vec{n}) = (2q)^{-s} \iint\limits_{K_s(q)} g_r(\vec{x}) e^{-2\pi i \frac{(\vec{n},\, \vec{x}\,)}{2q}} d\vec{x}. \tag{22}$$

Начиная с этого места для упрощения исследования будем рассматривать только весовую функцию $\rho_1(y) = 1 - |y|$ при $|y| \leqslant 1$.

Лемма 9. *Для интеграла*

$$I_1(x) = \int\limits_{-1}^{1} \rho_1(y) e^{-2\pi i y x} dy$$

справедливы равенства:

$$I_1(x) = \begin{cases} 1, & \textit{при } x = 0, \\ \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}, & \textit{при } x \neq 0. \end{cases} \tag{23}$$

Доказательство. Действительно, при $x = 0$ по свойствам весовой функции имеем:

$$I_1(0) = \int\limits_{-1}^{1} \rho_1(y) dy = \int\limits_{0}^{1} \left(\rho_1(y) + \rho_1(y-1)\right) dy = \int\limits_{0}^{1} dy = 1.$$

Пусть $x \neq 0$, тогда для интеграла $I_1(x)$ справедливы преобразования

$$I_1(x) = \int\limits_0^1 \rho_1(y) e^{-2\pi ixy} dy + \int\limits_0^1 \rho_1(y-1) e^{-2\pi ix(y-1)} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (1-y) e^{-2\pi ixy} dy + \int\limits_0^1 y e^{-2\pi ix(y-1)} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 e^{-2\pi ixy} dy + \left(e^{2\pi ix} - 1\right) \int\limits_0^1 y e^{-2\pi ixy} dy =$$

$$= \frac{e^{-2\pi ix} - 1}{-2\pi ix} + \left(e^{2\pi ix} - 1\right) \left(\left. \frac{y e^{-2\pi ixy}}{-2\pi ix} \right|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{e^{-2\pi ixy}}{-2\pi ix} dy \right) =$$

$$= \frac{e^{-2\pi ix} - 1}{-2\pi ix} + \frac{1 - e^{-2\pi ix}}{-2\pi ix} + \left(1 - e^{2\pi ix}\right) \left. \frac{e^{-2\pi ixy}}{(-2\pi ix)^2} \right|_0^1 =$$

$$= \frac{\left(1 - e^{2\pi ix}\right)\left(1 - e^{-2\pi ix}\right)}{4\pi^2 x^2} = \frac{1 - \cos 2\pi x}{2\pi^2 x^2} = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}$$

и лемма полностью доказана. □

Замечание 1. *Так как*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2} = 1,$$

то можно писать $I_1(x) = \frac{\sin^2 \pi x}{\pi^2 x^2}$ *для любого* x.

4. Тригонометрическая сумма алгебраической сетки со специальной весовой функцией порядка 2

Так как $I_1(x)$ — чётная функция, то лемму 5 можно существенно уточнить:

$$\int\limits_{-1}^1 (1 - |x|) e^{2\pi i\sigma x} dx = \frac{\sin^2 \pi\sigma}{\pi^2 \sigma^2}.$$

Отсюда и из теоремы 1 следует, что справедливо равенство

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}{}' \prod_{\nu=1}^s \frac{\sin^2 \pi(m_\nu - x_\nu)}{\pi^2 (m_\nu - x_\nu)^2}. \tag{24}$$

При $\vec{m} = \vec{0}$ мы получаем

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))}{}' \prod_{\nu=1}^s \frac{\sin^2 \pi x_\nu}{\pi^2 x_\nu^2}. \tag{25}$$

Теорема 2. *При* $t \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2} \right). \tag{26}$$

Доказательство. Действительно, согласно лемме 5 имеем:

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{0})-1\right| \leqslant \sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}' \frac{1}{(\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^2} = \zeta(\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))|2).$$

Согласно известной асимптотической формуле для гиперболической дзета-функции алгебраической решётки (см. [27]) имеем:

$$\zeta_H(\Lambda(t)|\alpha) = C(\Lambda,\alpha)\frac{\ln^{s-1}(\det\Lambda(t))}{(\det\Lambda(t))^\alpha} + O\left(\frac{\ln^{s-2}(\det\Lambda(t))}{(\det\Lambda(t))^\alpha}\right), \tag{27}$$

где

$$C(\Lambda,\alpha) = \frac{2(\det\Lambda)^\alpha}{R(s-1)!}\sum_{(\omega)}|N(\omega)|^{-\alpha}, \qquad R \text{ — регулятор поля.}$$

Отсюда при $\alpha = 2$ следует утверждение теоремы. □

Доказанную теорему можно перенести на случай тригонометрической суммы алгебраических сеток с весами для произвольного вектора $\vec{m}$.

Теорема 3. *При $t\to\infty$ для произвольного вектора $\vec{m}\neq\vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^2\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^2}\right). \tag{28}$$

Доказательство. Действительно, согласно теореме 1 и лемме 5 имеем:

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m})\right| \leqslant \sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}' \frac{1}{(\overline{m_1-x_1}\ldots\overline{m_s-x_s})^2}.$$

Воспользуемся неравенством

$$\frac{1}{\overline{m-x}} \leqslant \frac{2\overline{m}}{\overline{x}},$$

которое доказывается непосредственно, получим

$$\left|S_{M(t),\vec{\rho}_1}(\vec{m})\right| \leqslant \sum_{\vec{x}\in\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))}{}' \frac{4^s(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^2}{(\overline{x_1}\ldots\overline{x_s})^2} = 4^s(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^2\zeta(\Lambda(t\cdot T(\vec{a}))|2).$$

Повторяя рассуждения из доказательства предыдущей теоремы, получим доказываемое утверждение. □

5. Заключение

Из теоремы 1, используя лемму 6 вместо леммы 5, можно доказать следующие теоремы:

Теорема 4. *При $t\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{29}$$

Теорема 5. *При $t\to\infty$ для произвольного вектора $\vec{m}\neq\vec{0}$ справедлива асимптотическая формула*

$$S_{M(t),\vec{\rho}_r}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1}\ldots\overline{m_s})^{r+1}\ln^{s-1}\det\Lambda(t)}{(\det\Lambda(t))^{r+1}}\right). \tag{30}$$

В заключение выражаю благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, постоянное внимание и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

2. Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3–18.

3. Бочарова (Добровольская) Л. П. Алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2007 Т. 8, вып. 1(21). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4 — 109.

4. А. С. Герцог, Е. Д. Ребров, Е. В. Триколич О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул // Чебышевский сб. — Т. X. Вып. 2(30). — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2009. — С. 10–54.

5. А. С. Герцог Численное вычисление четырехкратных интегралов по методу Фролова с использованием алгебраических сеток биквадратичного поля Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 3. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. — С. 22–30.

6. А. С. Герцог Параметризация четырехмерной сетки биквадратичного поля Дирихле // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. №23(188). Вып. 5. Белгород: Изд-во БелГУ, 2011. С. 41–53.

7. А. С. Герцог ПОИВС ТМК: Биквадратичные поля и квадратурные формулы // Материалы международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии" посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2011. С. 242–247.

8. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Огородничук Н. К., Ребров Е. Д., Реброва И. Ю. Некоторые вопросы теоретико-числового метода в приближенном анализе // Труды X международной конференции "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения" Ученые записки Орловского государственного университета. 2012. № 6. Часть 2. С. 90 — 98.

9. Добровольская Л. П., Добровольский М. Н. , Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012 Т. 13. Вып. 4(44). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 4 — 107.

10. Л. П. Добровольская, Н. М. Добровольский, А. С. Симонов О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник 2008 Т. 9, вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185 — 223.

11. Н. М. Добровольский Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6089–84.

12. Н. М. Добровольский Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6090–84.

13. Н. М. Добровольский О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

14. Н. М. Добровольский Теоретико–числовые сетки и их приложения. Дис. ... канд. физ.–мат. наук. Тула, 1984.

15. Н. М. Добровольский Теоретико–числовые сетки и их приложения. Автореф. дис. ... канд. физ.–мат. наук. Москва, 1985.

16. Н. М. Добровольский Теоретико–числовые сетки и их приложения // Теория чисел и ее приложения: Тез. докл. Всесоюз. конф. Тбилиси, 1985. С. 67–70.

17. Коробов Н. М. Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 19 — 25.

18. Коробов Н. М. О приближенном вычислении кратных интегралов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, № 6. С. 1207 — 1210.

19. Коробов Н. М. Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов // ДАН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1009—1012.

20. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

21. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

22. Локуциевский О. В., Гавриков М. Б. Начала численного анализа. М.: ТОО Янус, 1995.

23. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.

24. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.

25. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник 2009 Т. 10, вып. 1(29). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 65–77.

26. Ребров Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 53–90.

27. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.

28. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818–821.

29. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.

30. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" , Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.

REFERENCES

1. Babenko, K.I. 1986, Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.

2. Bakhvalov, N.S. 1959, “On approximate computation of multiple integrals”, Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 3–18.

3. Bocharova (Dobrovol’skaya), L.P. 2007, “Algorithms for finding the optimal coefficients”, Chebyshevskij sbornik, vol. 8, no. 1(21), pp. 4–109.

4. Gertsog, A.S., Е. Д. Ребров, Е. В. Триколич О методе К. К. Фролова в теории квадратурных формул // Чебышевский сб. — Т. X. Вып. 2(30). — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2009. — С. 10–54.

5. Gertsog, A.S. Численное вычисление четырехкратных интегралов по методу Фролова с использованием алгебраических сеток биквадратичного поля Дирихле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. Вып. 3. — Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. — С. 22–30.

6. Gertsog, A.S. Параметризация четырехмерной сетки биквадратичного поля Дирихле // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. №23(188). Вып. 5. Белгород: Изд-во БелГУ, 2011. С. 41–53.

7. Gertsog, A.S. ПОИВС ТМК: Биквадратичные поля и квадратурные формулы // Материалы международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии" посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина. Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2011. С. 242–247.

8. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, N. M., Dobrovol’skii, N. N., Ogorodnichuk, N. K., Rebrov, E. D. & Rebrova, I. YU. 2012, “Some questions of the number-theoretic method in the approximate analysis”, Trudy X mezhdunarodnoj konferentsii “Algebra i teoriya chisel: sovremennye problemy i prilozheniya” Uchenye zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta [Proceedings of the X international conference "Algebra and number theory: modern problems and applications"scientific notes of Orel state University], no. 6, part 2, pp. 90-98.

9. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, M. N., Dobrovol’skii, N. M. & Dobrovol’skii, N. N. 2012, “The hyperbolic Zeta function of grids and lattices, and calculation of optimal coefficients”, Chebyshevskij sbornik, vol. 13, no. 4(44), pp. 4–107.

10. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, “On the error of approximate integration over modified grids”, Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

11. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids", Dep. v VINITI, no. 6089–84.

12. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "The hyperbolic Zeta function of lattices", Dep. v VINITI, no. 6090–84.

13. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$", Dep. v VINITI, no. 6091–84.

14. Dobrovol'skii, N. M. 1984, "Number-theoretic meshes and their applications", Ph.D. Thesis, Tula, Russia.

15. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Abstract of Ph.D. dissertation, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russia.

16. Dobrovol'skii, N. M. 1985, "Number-theoretic meshes and their applications", Teoriya chisel i ee prilozheniya: Tezisy dokladov Vsesoyuznoj konferentsii, Tbilisi, USSR, pp. 67–70.

17. Korobov, N.M. 1959, "The evaluation of multiple integrals by method of optimal coefficients", Vestnik Moskovskogo universiteta, no. 4, pp. 19–25.

18. Korobov, N.M. 1959, "On approximate computation of multiple integrals", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 124, no. 6, pp. 1207–1210.

19. Korobov, N.M. 1960, "Properties and calculation of optimal coefficients", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 132, no. 5, pp. 1009–1012.

20. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

21. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

22. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, Nachala chislennogo analiza [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.

23. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. Об алгоритме численного интегрирования с правилом остановки // Материалы 7 международной конференции <Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения>. 2010. Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 153 — 158.

24. Огородничук Н. К, Ребров Е. Д. ПОИВС ТМК: Алгоритмы интегрирования с правилом остановки // Международной научно-практической конференции "Многомасштабное моделирование структур и нанотехнологии, посвященной 190-летию со дня рождения академика Пафнутия Львовича Чебышёва, столетию со дня рождения академика Сергея Васильевича Вонсовского и 80-летию со дня рождения член-корреспондента Виктора Анатольевича Буравихина" Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. 2011. С. 153 — 158.

25. Ребров Е. Д. Алгоритм Добровольской и численное интегрирование с правилом остановки // Чебышевский сборник 2009 Т. 10, вып. 1(29). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 65–77.

26. Ребров Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 53 — 90.

27. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. – Ч. I. – 232 с.

28. Frolov, K.K. 1976, "Upper bounds on the error of quadrature formulas on classes of functions", Doklady Akademii nauk SSSR, vol. 231, no.4, pp. 818–821.

29. Frolov, K.K. 1979, Quadrature formulas on classes of functions, Ph.D. Thesis, Vychislitel'nyj tsentr Akademii Nauk SSSR, Moscow, USSR.

30. Nikolay M. Dobrovolskiy, Larisa P. Dobrovolskaya, Nikolay N. Dobrovolskiy, Nadegda K. Ogorodnichuk, and Evgenii D. Rebrov Algorithms fot computing optimal coefficients // Book of abstracts of the International scientific conference "Computer Algebra and Information Technology" , Odessa, August 20—26, 2012. p. 22 — 24.