ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 512.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-176-186

Многообразия с дробным полиномиальным ростом и проблема Шпехта

Мищенко Сергей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, Ульяновский государственнчый университет.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru
Шулежко Олеся Владимировна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры, заместитель декана по воспитательной работе факультета ФМиТО, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова.
e-mail: ol.shulezhko@gmail.com

Аннотация

Совокупность линейных алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств, следуя А.И. Мальцеву, называется многообразием. Используя язык теории алгебр Ли будем говорить, что алгебра метабелева, если она удовлетворяет тождеству $(xy)(zt) \equiv 0$. Многообразие называется шпехтовым, если оно само и любое его подмногообразие обладает конечным базисом тождеств. Рост многообразия определяется ростом последовательности размерностей полилинейных частей относительно свободной алгебры многообразия. Эту последовательность традиционно называют последовательностью коразмерностей, имея в виду полилинейные пространства идеала тождеств многообразия. В данной статье приведены результаты связанные с проблемой дробного полиномиального роста. Дается обзор новых примеров таких многообразий, а также приводятся новые примеры многообразий, которые не удовлетворяют свойству шпехтовости, то есть которые обладают бесконечно базируемыми подмногообразиями.

Ключевые слова: тождество, многообразие, рост коразмерностей, метабелевость, шпехтовость.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
С. П. Мищенко, О. В. Шулежко. Многообразия с дробным полиномиальным ростом и проблема Шпехта // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 176–186.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 512.5 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-176-186

Variety with fractional codimension growth and the Specht problem

Mishchenko Sergey Petrovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the department of applied mathematics, Ulyanovsk state University.
e-mail: mishchenkosp@mail.ru
Shulezhko Olesya Vladimirovna — candidate of physics-mathematical sciences, associate professor, deputy dean for educational work of the faculty Fmita; Ulyanovsk state pedagogical University named after I. N. Ulyanov.
e-mail: ol.shulezhko@gmail.com

Abstract

According to A.I. Maltsev, a set of linear algebras in which a fixed set of identities is called a variety. Using the language of the theory of Lie algebras, we say that the algebra is metabelian if it satisfies the identity $(xy)(zt) \equiv 0$. A variety is called Specht if it is such a variety and any of its subvariety has a finite basis of identities. Codimension growth is determined by sequence of dimensions multilinear parts of a relatively free algebra of a variety. This sequence is called a sequence codimensions, referring to the multilinear spaces of the ideal identities of the variety. This article presents the results related to the problem of fractional polynomial growth. The review gives new examples of such varieties, and also give a new example of a variety with an infinite basis of identities.

Keywords: identity, variety, codimension, metabelian, shpecht.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
S. P. Mishchenko, O. V. Shulezhko, 2018, "Variety with fractional codimension growth and the Specht problem *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 176–186.

1. Введение

На протяжении всей работы характеристика основного поля F предполагается равной нулю. Мы рассматриваем линейные алгебры, то есть векторные пространства над полем F, на которых задана бинарная билинейная операция, и их тождества. Все неопределяемые понятия можно найти в книге А. Джамбруно и М.В. Зайцева [1].

Пусть $F\{X\}$ – свободная неассоциативная алгебра со счетным множеством свободных образующих X над полем F. Для линейной алгебры A обозначим $Id(A)$ идеал тождеств алгебры A. Так как при нулевой характеристики основного поля любое тождество эквивалентно системе полилинейных тождеств, то при изучении идеала $Id(A)$ существенную роль играет теория представлений симметрических групп.

Зафиксируем натуральное число $n \geqslant 1$. Пусть P_n пространство полилинейных элементов свободной алгебры $F\{X\}$ от первых n свободных образующих $x_1, \ldots, x_n$. Так как характеристика поля F равна нулю, то последовательность пространств $P_n \cap Id(A)$, $n = 1, 2, \ldots,$ содержит всю информацию об идеале тождеств $Id(A)$. Симметрическая группа S_n действует на P_n перестановкой образующих: если $\sigma \in S_n$, $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$,

$$\sigma f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Пространство $P_n \cap Id(A)$ является инвариантным относительно этого действия и мы можем изучать строение $P_n(A) = P_n/(P_n \cap Id(A))$ как модуля группы S_n. Характер этого модуля обозначим $\chi_n(A)$ и назовем n-ым кохарактером алгебры A. В силу полной приводимости

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

где χ_λ – неприводимый характер симметрической группы соответствующий разбиению λ числа n, а $m_\lambda \geqslant 0$ – соответствующая кратность. Степень n-ого кохарактера $\chi_n(A)$ совпадает с размерностью пространства полилинейных элементов $c_n(A) = \dim P_n(A)$ и называется n-ой коразмерностью алгебры A. Таким образом, $c_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda$, где $d_\lambda = \deg \chi_\lambda$ – степень неприводимого характера χ_λ.

В работе [2] А.И. Мальцев назвал совокупность линейных алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств, многообразием. На "языке" многообразий, если $\mathbf{V} = var(A)$ многообразие, порожденное алгеброй A, то мы пишем $Id(\mathbf{V}) = Id(A)$ и $c_n(\mathbf{V}) = c_n(A)$. Рост многообразия $\mathbf{V}$ определяется ростом последовательности коразмерностей алгебры A.

В этой статье мы рассматриваем многообразия полиномиального роста, то есть многообразия $\mathbf{V}$, для которых существует такие константы $\alpha, t > 0$, что для всех n выполняется неравенство $c_n(\mathcal{V}) \leqslant \alpha n^t$. В случае ассоциативных, лиевых или йордановых алгебр, как доказано В. Дренски [3], последовательность коразмерностей асимптотически ведет себя как многочлен. Более точно, он доказал, что для таких многообразий $\mathbf{V}$ существует натуральное k и число C, что выполняется равенство

$$c_n(\mathcal{V}) = Cn^k + O(n^{k-1}),$$

где $O(n^{k-1})$ есть многочлен степени $\leqslant k - 1$.

В случае отсутствия тождества ассоциативности, исследование линейных алгебр является сложным в силу необходимости при вычислениях следить за расстановками скобок. Задача становится несколько проще, если мы имеем дело с метабелевыми алгебрами. Мы будем так называть алгебры, в которых выполняется тождество $(xy)(zt) \equiv 0$. Ситуация упрощается еще больше, если при этом дополнительно выполняется тождество коммутативности или антикоммутативности. Тогда, все мономы равны левонормированным мономам, то есть мономам, в которых умножение происходит слева направо. Договоримся опускать скобки в случае их левонормированной расстановки, то есть $xyz = (xy)z$.

Простейшей ситуацией, в которой только левонормированные мономы могут быть отличны от нуля, является так называемое многообразие ${}_2\mathbf{N}$ левой нильпотентности ступени два. Это многообразие определяется тождеством $x(yz) \equiv 0$. Рассмотрим обобщение этого тождества, которое также позволяет все переписывать с левонормированными расстановками скобок, а именно

$$x(yz) \equiv \alpha(xy)z, \tag{1}$$

в котором α – некоторое число. Если $\alpha = 0$, то мы получаем многообразие ${}_2\mathbf{N}$. Выписанное тождество, вероятно, впервые было проанализировано в статье [4] (см. Замечание 1). Там изложен следующий результат.

Пусть $\mathbf{V}$ многообразие, задаваемое тождеством (1), в котором $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда выполняется одно из следующих трех условий:

1. многообразие $\mathbf{V}$ нильпотентно ступени три, то есть любое произведение четырех элементов равно нулю;
2. $\mathbf{V}$ – многообразие всех ассоциативных алгебр;
3. $\mathbf{V} = {}_2\mathbf{N}$.

В силу простоты приведем доказательство этого факта. Если $\alpha = 1$, то мы получим многообразие ассоциативных алгебр, а если $\alpha = 0$, то мы получим многообразие ${}_2\mathbf{N}$. Предположим, что $\alpha \neq 0, 1$. Используя тождество $x(yz) \equiv \alpha(xy)z$, мы получаем

$$(xy)(zt) \equiv \alpha((xy)z)t \equiv (x(yz))t \equiv \frac{1}{\alpha}x((yz)t) \equiv \frac{1}{\alpha^2}x(y(zt)) \equiv \frac{1}{\alpha}(xy)(zt).$$

Следовательно, $(xy)(zt) \equiv 0$. Более того

$$((xy)z)t \equiv \frac{1}{\alpha}(xy)(zt) \equiv 0,$$

$$t((xy)z) \equiv \frac{1}{\alpha}t(x(yz)) \equiv (tx)(yz) \equiv 0,$$

Отсюда получаем еще два тождества

$$(z(xy))t \equiv \alpha((zx)y)t \equiv 0, \quad t(z(xy)) \equiv \alpha t((zx)y) \equiv 0.$$

Таким образом, мы получаем, что в многообразии $\mathbf{V}$ любое произведение четырех и более элементов равно нулю, то есть многообразие состоит из нильпотентных алгебр. Еще раз отметим, что для всех $n \geqslant 4$ выполняются равенства $c_n(\mathbf{V}) = 0$.

Одной из мотиваций популяризации многообразия ${}_2\mathbf{N}$ является тот факт, что в этом классе алгебр построено множество примеров с экзотическим поведением числовых характеристик.

Например, известно, что в ассоциативном случае или в случае алгебр Ли не существует многообразий промежуточного роста между полиномиальным и экспоненциальным. В то же время в статье [5] построена серия подмногообразий многообразия ${}_2\mathbf{N}$ промежуточного роста. Более точно, для любого действительного числа β, $0 < \beta < 1$, построено такое многообразие $\mathbf{V}_\beta \subseteq {}_2\mathbf{N}$, что выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty} \log_n \log_n c_n(\mathbf{V}_\beta) = \beta,$$

то есть последовательность $c_n(\mathbf{V}_\beta)$ растет как n^{n^β}, $n = 1, 2, \ldots$.

Что касается поведения экспоненты многообразия, то известно, что в ассоциативном случае экспонента всегда существует и является целым числом. Дробная экспонента возможна уже для случая многообразий алгебр Ли. В случае алгебр Ли первый пример дробной экспоненты равной примерно 3.6 был построен в работе [6] и позже даже дискретная серия многообразий алгебр Ли, экспоненты которых являются дробными числами, большими трех, но меньшими четырех, с предельной точкой равной 4 (см. [7], [8]). Многообразие, порожденное алгеброй Ли векторных полей на плоскости имеет еще большую дробную экспоненту (см. [9]). Однако, во всех примерах дробная экспонента многообразия алгебр Ли всегда больше трех. В случае алгебр Ли доказано также, что экспонента не может быть между 1 и 2. Интересная и, вероятно, сложная гипотеза, которая остается недоказанной, что в случае алгебр Ли экспонента не может быть также между 2 и 3.

В статье [10] для любого действительного числа $\alpha > 1$ построена такая алгебра $A_\alpha \in {}_2\mathbf{N}$, что $\exp(A_\alpha) = \alpha$. А в статье [11] для любого действительного числа $\alpha > 1$ построена алгебра $A_\alpha \in {}_2\mathbf{N}$ экспоненциального роста коразмерностей, у которой нижняя PI экспонента равна 1, а верхняя равна α. То есть построена континуальная серия многообразий экспоненциального роста, для которых верхняя и нижняя экспоненты различны, а следовательно, сама экспонента не существует.

Вернемся к вопросу возможности дробного полиномиального роста. Первый пример многообразия с дробным полиномиальным ростом был построен в статье [12]. В ней построена алгебра $A \in {}_2\mathbf{N}$, для которой выполнено условие $c_n(A) \simeq n^{3,5}$. Кроме того анонсировано существование в случае нулевой характеристики основного поля для любого вещественного $3 < \alpha < 4$ линейной алгебры $A_\alpha \in {}_2\mathbf{N}$, что при достаточно больших n выполняется условие

$$C_1 n^\alpha < c_n(A_\alpha) < C_2 n^\alpha,$$

где C_1, C_2 – некоторые положительные константы.

На основе континуального семейства многообразий с дробным полиномиальным ростом в статье [14] построено не шпехтово коммутативное метабелево многообразия, коразмерность которого ограничена n^6. В этом разделе по аналогии мы построим антикоммутативный аналог.

Пусть $w = w_1 w_2 \cdots w_m$ – слово в алфавите $\{0, 1\}$. Обозначим через $A(w)$ алгебру над полем F с базисом $\{a, b, z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}\}$ и таблицей умножения, заданной формулами

$$z_i a = -a z_i = (1 - w_i) z_{i+1},$$

$$z_i b = -b z_i = w_i z_{i+1},$$

для $i = 1, 2, \ldots, m$, а все остальные произведения равны нулю.

Зафиксируем произвольное действительное число α, $0 < \alpha < 1$, и для каждого $m \geqslant 1$ определим $a_m = [m^\alpha]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x. Заметим, что $a_m \neq m$, а также $a_m < m$ для всех $m \geqslant 2$.

Для заданных целых чисел $m \geqslant 2$ и $1 \leqslant s \leqslant a_m$, обозначим

$$w(m, s) = w_1 \cdots w_m,$$

слово в алфавите $\{0, 1\}$ такое, что $w_s = w_m = 1$ и $w_i = 0$ для всех остальных i. Тогда

$$A(\alpha, m) = A(w(m, 1)) \oplus A(w(m, 2)) \oplus \cdots \oplus A(w(m, a_m)).$$

Основные свойства алгебры $A(\alpha, m)$ приведены ниже.

Лемма 1. Для любого целого числа m алгебра $A(\alpha, m)$ является антикоммутативной метабелевой и нильпотентной ступени m.

Доказательство. Мы должны показать, что имеют место следующие тождества:

$$x_1x_2 \equiv x_2x_1,\ (x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0,\ x_1x_2\cdots x_{m+1} \equiv 0.$$

В последнем тождестве мы требуем, чтобы скобки были поставлены всеми возможными способами, то есть любое произведение $m+1$ элемента было равно нулю независимо от расположения скобок. Для этого достаточно проверить их на конкретном слагаемом, скажем, $A(w(m,i))$.

Так как $w(m,i) = w_1w_2\cdots w_m = 00\cdots 0\underset{i}{1}00\cdots 00\underset{m}{1}$, то единственными ненулевыми произведениями среди элементов базиса $A(w(m,i))$ являются

$$z_1a = -az_1 = z_2,\ z_2a = -az_2 = z_3,\ \ldots,\ z_ib = -bz_i = z_{i+1},\ z_{i+1}a = -az_{i+1} = z_{i+2},$$

$$\ldots,\ z_{m-1}a = -az_{m-1} = z_m,\ z_mb = -bz_m = z_{m+1},$$

и это говорит о том, что выполняются тождества $x_1x_2 \equiv x_2x_1$ и $(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0$. В частности, мы можем рассматривать только левонормированные мономы. Отсюда следует, что

$$z_1\underbrace{aa\cdots a}_{i-1}b\underbrace{aa\cdots a}_{m-i-1}b$$

является единственным самым длинным ненулевым мономом. Следовательно, произведение любых $m+1$ элементов равно нулю. Доказательство леммы завершено.

В частности, из леммы 1 следует, что любой элемент из $F\{X\}/Id(A(\alpha,m))$, относительно свободной алгебры многообразия, порожденного $A(\alpha,m)$, записывается как линейная комбинация левонормированных мономов.

Нашим главным объектом исследования в этом разделе будет рост коразмерностей алгебры

$$A_\alpha = \bigoplus_{m>1} A(\alpha,m).$$

Ясно, что A_α удовлетворяет тождествам

$$x_1x_2 + x_2x_1 \equiv 0\ \ (x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0.$$

Асимптотическое поведение коразмерностей A_α описано в следующей теореме, которая полностью совпадает с теоремой из статьи [14](см. с. 426).

Теорема 1. Пусть α – действительное число, $0 < \alpha < 1$. Тогда для $a_n = [n^\alpha] \geqslant 5$ коразмерности A_α удовлетворяют следующим неравенствам

$$(a_n - 4)\frac{n(n-1)(n-5)}{6} \leqslant c_n(A_\alpha) \leqslant n^3a_n + n^2(2n + 3a_n) + n^2.$$

В частности, $\lim_{n\to\infty}(\log_n c_n(A_\alpha)) = 3 + \alpha$.

Доказательство этой теоремы может быть дословно изложено как доказательство аналогичной теоремы в коммутативном случае из статьи [14] (см. [14], леммы 2-6 и их доказательства на с. 426-433, а также доказательство теоремы на с. 434).

2. Пример нешпехтового антикоммутативного метабелева многообразия

Данный раздел написан также с использованием статьи [14], в которой речь идет о коммутативном случае. Некоторые фрагменты являются просто дословным переводом. Напомним, что многообразие $\mathbf{V}$ является шпехтовым, если каждое подмногообразие, включая $\mathbf{V}$, имеет конечно порожденный T-идеал тождеств.

Рассмотрим алгебру

$$A = \bigcup_{0<\alpha<1} A_\alpha,$$

где A_α являются алгебрами, построенными в предыдущем разделе, и пусть $\mathbf{V} = var(A)$ – многообразие, порожденное A. Пусть

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi_n(A) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda(\mathcal{V})\chi_\lambda \tag{2}$$

n-й кохарактер $\mathbf{V}$. Обратим внимание, что $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$, как только разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: $\lambda_4 \neq 0$, $\lambda_3 > 1$ или $\lambda_2 + \lambda_3 > 3$. На самом деле это свойство выполняется для всех алгебр A_α, $0 < \alpha < 1$. Это говорит о том, что кратности в (2) могут быть отличными от нуля только для разбиений (n), $(n-1,1)$, $(n-2,2)$, $(n-2,1,1)$, $(n-3,3)$, $(n-3,2,1)$.

Так как мы можем рассматривать только левонормированные полиномы, то кратности $m_\lambda(A)$ ограничены размерностями соответсвующих неприводимых представлений d_λ, получаем, что

$$c_n(\mathcal{V}) \leqslant d^2_{(n)} + d^2_{(n-1,1)} + d^2_{(n-2,2)} + d^2_{(n-2,1,1)} + d^2_{(n-3,3)} + d^2_{(n-3,2,1)} \leqslant n^6,$$

и $\mathbf{V}$ – многообразие полиномиального роста не выше n^6.

Теперь мы готовы доказать следующий результат.

Теорема 2. Многообразие $\mathbf{V}$ является антикоммутативным метабелевым не шпехтовым многообразием полиномиального роста.

Доказательство. Предположим сначала, что $F = \mathbb{Q}$ – поле рациональных чисел. Если $\mathbf{V}$ является многообразием Шпехта, то есть T-идеал тождеств каждого подмногообразие конечно порожден, то из этого следует, что $\mathbf{V}$ имеет только счетное множество подмногообразий. Но для каждого $0 < \alpha < 1$, многообразия $\mathrm{var}(A_\alpha)$, содержится в $\mathbf{V}$. Следовательно, $\mathbf{V}$ содержит несчетное семейство подмногообразий и, следовательно, $\mathbf{V}$ не является шпехтовым.

В частности, существует бесконечная последовательность полилинейных многочленов с рациональными коэффициентами $f_1, f_2, \dots$ таких, что

$$f_{N+1} \notin \langle f_1, \dots, f_N\rangle_T^{\mathbb{Q}}$$

для любых $N \geqslant 1$, где $\langle f_1, \dots, f_N\rangle_T^{\mathbb{Q}}$ – T-идеал в $\mathbb{Q}(X, \mathbf{V}) \cong \mathbb{Q}\{X\}/Id(\mathbf{V})$ порожденных $f_1, \dots, f_N$.

Пусть теперь F – произвольное поле нулевой характеристики. Рассмотрим полиномы $f_1, f_2, \dots$ как F-полиномы, и пусть f_{N+1} является следствие $f_1, \dots, f_N$ в $F(X, \mathbf{V})$,, то есть

$$f_{N+1} \in \langle f_1, \dots, f_N\rangle_T^F.$$

Получаем

$$f_{N+1} = \beta_1 h_1 + \dots + \beta_t h_t \tag{3}$$

где $h_1, \dots, h_t$ – многочлены типа

$$p_i f_i(a_1, \dots, a_{n_i}) q_i,$$

$\beta_1, \dots, \beta_t \in F$ и $p_i, q_i, a_1, \dots, a_{n_i}$ являются одночленами на X с коэффициентом 1.

Зафиксируем базис B поля F над полем $\mathbb{Q}$, содержащий 1, и рассмотрим разложение

$$\beta_j = \mu_0^j + \mu_1^j b_1 + \dots + \mu_{k_j}^j b_{k_j}, \tag{4}$$

для всех $j = 1, \dots, t$, где $\mu_0^j, \mu_1^j, \dots, \mu_{k_j}^j \in \mathbb{Q}$ и $1 \neq b_1, \dots, b_{k_j} \in B$. Теперь мы подставляем выражение (4) в (3). Учитывая, что f_{N+1} является многочленом с рациональным коэффициентами получаем, что

$$f_{N+1} = \mu_0^1 h_1 + \dots + \mu_0^t h_t.$$

Отсюда следует, что $f_{N+1} \in \langle f_1, \dots, f_N \rangle_T^{\mathbb{Q}}$, противоречие. Следовательно, $\langle f_1, \dots, f_N \rangle_T^F$ – бесконечно порожденный Т-идеал $F(X, \mathbf{V})$ и $\mathbf{V}$ – не шпехтовое многообразие F-алгебр. Доказательство завершено.

3. Не шпехтово метабелево многообразие роста близкого к квадратичному

Пусть A линейная алгебра с одним порождающим элементом a и следующими определяющими соотношениями: каждое слово содержащее более одного подслова равного a^2 должно быть равно 0. Пример этой алгебры приведен в работе [15], в ней же доказано, что разложение соответствующего кохарактера имеет вид

$$\chi_n(A) = m_{(n)}\chi_{(n)} + m_{(n-1,1)}\chi_{(n-1,1)},$$

причем $m_{(n)} = 2^{n-2}$. Отметим, что последняя формула для кратности обосновывается различными скобочными структурами на слове степени n. Пусть L_a и R_a – линейные операторы на алгебре A левого и правого умножения на элемент a соответственно. Договоримся результат применения оператора записывать таким образом: $xL_a = ax$, $xR_a = xa$. Если $w(L_a, R_a)$ некоторое слово длины $n-2$ в алфавите $\{L_a, R_a\}$, то $a^2 w(L_a, R_a)$ равен результату подстановки в вектор старшего веса неприводимого модуля симметрической группы, соответствующего разбиению $(n) \vdash n$. Так как существует 2^{n-2} различных линейно независимых таких слов, то мы получаем 2^{n-2} линейно независимых векторов старших весов.

Нам потребуется дополнительная информация о свойствах многообразия, порожденного алгеброй A.

Предложение 1. Пусть T некоторая расстановка скобок, при которой пространство $P_n^T(A) \neq 0$, тогда $\chi_n(A)^T = \chi_{(n)} + 2\chi_{(n-1,1)}$.

Доказательство см. [16].

Ниже изложен материал, существенно использующий статью [13]. Зафиксируем действительное число $\alpha, 0 < \alpha < 1$. Обозначим через $B = B_\alpha$ алгебру, которая является фактор-алгеброй алгебры A и порождается единственным элементом b, а также удовлетворяет следующим определяющим соотношениям. Во-первых, каждое слово, содержащее более одного подслова равного b^2, равно 0. Во-вторых, также равны нулю все слова вида $b^2 w(L_b, R_b)$, в которых степень монома $w(L_b, R_b)$ по переменной L_b больше или равна трем. А, в-третьих, равны нулю также слова, имеющие вид $b^2 w(L_b, R_b)$, в которых степень $w(L_b, R_b)$ по L_b равна двум, то есть слова вида

$$(b((b(b^2\underbrace{bb\dots b}_{p}))\underbrace{bb\dots b}_{q}))\underbrace{bb\dots b}_{r},\ p = 0, 1, \dots,\ q = 0, 1, \dots,\ r = 0, 1, \dots,$$

в которых $p < q^\alpha$.

Выпишем ненулевые линейно независимые элементы (слова) алгебры B :

$$b\,;\ b^2\underbrace{bb\dots b}_{p},\ p = 0, 1, \dots;\ (b(b^2\underbrace{bb\dots b}_{p}))\underbrace{bb\dots b}_{q},\ p = 0, 1, \dots,\ q = 0, 1, \dots,$$

$$(b((b(b^2\underbrace{bb\dots b}_{p}))\underbrace{bb\dots b}_{q}))\underbrace{bb\dots b}_{r},\ p = 0, 1, \dots,\ q = 0, 1, \dots,\ r = 0, 1, \dots,$$

в которых $p < q^\alpha$. При степени равной $n \geqslant 2$ соответствующие выписанным элементам расстановки скобок обозначим T_p, $p = n-2$; $T_{p,q}$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p+q = n-3$; $T_{p,q,r}$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, $p+q+r = n-4$, $p < q^\alpha$, а их количество обозначим t_n.

Теорема 3. Пусть $\mathbf{V}_\alpha$ – многообразие линейных алгебр, порожденное алгеброй B_α. Тогда при $n \geqslant 1$ для многообразия $\mathbf{V}_\alpha$ выполняется условие

$$\frac{n^2 n^\alpha}{3 \cdot 3^\alpha} \leqslant c_n(\mathbf{V}_\alpha) < 2n^2(1+n^\alpha).$$

При доказательстве используется предложение 1 и несложные оценки для числа различных скобочных расположений t_n.

Заметим, что по определению при $\alpha < \beta$ выполняется строгое включение $\mathbf{V}_\alpha \subset \mathbf{V}_\beta$. Поэтому $\mathbf{V}_\beta$ для любого $0 < \beta < 1$ содержит континуум различных подмногообразий $\mathbf{V}_\alpha$, для которых $0 < \alpha \leqslant \beta$. Таким образом, рассуждения предыдущего раздела, проведенные в теореме 2, показывают, что многообразие $\mathbf{V}_\beta$ не является шпехтовым, но является метабелевым и имеет полиномиальный рост типа $n^{2+\beta.}$ Так как число β может быть выбрано сколь угодно малым, то рост будет близок к квадратичному.

В заключение отметим, что В.Дренски в статье [17], вероятно впервые, построил не шпехтово многообразие квадратичного роста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Providence: American Mathematical Society,2005. 352 p. (Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 122.)

2. Мальцев А. И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Математический сборник. 1950. Т. 26(68), № 1. С. 19–33.

3. Drensky V. Relations for the cocharacter sequences of T-ideals // Proc. of the International Conference on Algebra Honoring A. Malcev, Contemp. Math. 1992. Vol. 131, p. 2. P. 285–300.

4. Mishchenko S., Valenti A. Codimension and colength sequences of algebras and growth phenomena // Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences. 2016. Vol. 10, is. 2. P. 263–272.

5. Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Algebras with intermediate growth of the codimensions // Adv. in Appl. Math. 2006. Vol. 37, № 3. P. 360–377.

6. Mishchenko S.P., Zaicev M.V. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent // Journal of Mathematical Sciences. 1999. Vol. 93, № 6. P. 977–982.

7. Malyusheva O., Mishchenko S., Verevkin A. Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents // Compt. rend. Acad. Bulg. Sci. 2013. Vol. 66, № 3. P. 321–330.

8. Bogdanchuk O. A., Mishchenko S. P., Verëvkin A. B. On Lie algebras with exponential growth of the codimensions // Serdica Math. J. 2014. Vol. 40, № 3-4. P. 209–240.

9. Мищенко С. С. Новый пример многообразия алгебр Ли с дробной экспонентой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2011. № 6. С. 44–47.

10. Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Codimensions of Algebras and Growth Functions // Advances in Mathematics. 2008. Vol. 217, № 3. P. 1027–1052.

11. Zaicev M. On existence of PI-exponents of codimension growth // Electron. Res. Announc. Math. Sci. 2014. № 21. P. 113–119.

12. Зайцев М. В., Мищенко С. П. Пример многообразия линейных алгебр с дробным полиномиальным ростом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2008. № 1. С. 25–31.

13. Мищенко С. П. Пример многообразия линейных алгебр с дробным полиномиальным ростом меньшим трех // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2013. № 3, С. 51–54.

14. Polynomial codimension growth and Specht problem / A. Giambruno [et al.]. // Journal of Algebra. 2017. № 469. P. 421-436.

15. Giambruno A., Mishchenko S. P. Polynomial growth of the codimensions: A characterization // Proc. Amer. Math. Soc. 2010. Vol. 138, No 3. P. 853–859.

16. Мищенко С. П., Верёвкин А. Б. О многообразиях с тождествами однопорожденной свободной метабелевой алгебры // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 2(58). С. 21–55.

17. Дренски В. С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Математический сборник. 1981. Т. 115 (157). С. 98-115.

REFERENCES

1. Giambruno, A., Zaicev, M. 2005, "Polynomial Identities and Asymptotic Methods", Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI, vol. 122, 352 p.

2. Mal'tsev, A.I. 1950. "On algebras defined by identities," Mat. Sb., vol. 26(68), issue 1, pp. 19–33. (in Russian)

3. Drensky, V. 1992, "Relations for the cocharacter sequences of T-ideals", Proc. of the International Conference on Algebra Honoring A. Malcev, Contemp. Math., vol.131, part 2, pp. 285–300.

4. Mishchenko, S., Valenti, A. 2016, "Codimension and colength sequences of algebras and growth phenomena",Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences, vol. 10 , issue 2, pp. 263–272. Article First Online: 30 November 2015 DOI: 10.1007/s40863-015-0025-1

5. Giambruno, A., Mishchenko, S., Zaicev, M. 2006, "Algebras with intermediate growth of the codimensions", Adv. in Appl. Math. 37, no. 3, pp.360 – 377.

6. Mishchenko, S.P., Zaicev, M.V. 1999, "An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent", Journal of Mathematical Sciences (New York), vol. 93,no 6, pp. 977–982.

7. Malyusheva,O., Mishchenko, S., Verevkin, A. 2013, "Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents", Compt. rend. Acad. Bulg. Sci., 66, no 3, pp. 321–330.

8. Bogdanchuk, O.A., Mishchenko, S.P., Verëvkin,A.B. 2014, "On Lie algebras with exponential growth of the codimensions", Serdica Math. J., vol. 40, no 3-4, pp. 209–240.

9. Mishchenko, S.S., 2011, "New example of a variety of lie algebras with fractional exponent", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, no 6, pp. 44–47; English translation in: *Moscow University Mathematics Bulletin*, vol. 66, no 6, pp. 264–266.

10. Giambruno, A., Mishchenko, S., Zaicev, M. 2008, "Codimensions of Algebras and Growth Functions", Advances in Mathematics, vol. 217, no 3, pp. 1027–1052.

11. Zaicev, M. 2014, ”On existence of PI-exponents of codimension growth”, Electron. Res. Announc. Math. Sci., vol.21, pp. 113–119.

12. Zaicev, M., Mishchenko, S. 2008, ”The example of linear algebras variety with fractional polynomial growth”, Vestn. Mosk. Univ., ser. I , vol.1, pp. 25–31. (in Russian)

13. Mishchenko, S.P. 2013,”The example of linear algebras variety with fractional polynomial growth less than 3”, Vestn. Mosk. Univ., ser. I , no 3, pp. 51–54. (in Russian)

14. Giambruno, A., Mishchenko S., Valenti, A., Zaicev, M. 2017, ”Polynomial codimension growth and Specht problem”, Journal of Algebra, no. 469 , pp. 421-436.

15. Giambruno, A., Mishchenko, S.P. 2010, ”Polynomial growth of the codimensions: A chara-cOfitserovterization”, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 138, no 3, pp. 853–859.

16. Mishchenko, S.P., Verevkin, A.B. 2016, ”On varieties with identities of one generated free metabelian algebra”, Chebyshevskii sbornik, vol. 17, no. 2 (58), pp. 21–55. (in Russian)

17. Drenski, V.S. 1982, ”Representations of the symmetric group and varieties of linear algebras”, Math. USSR Sbornik, vol. 43, no. 1, pp. 85–101.