ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-167-175

Развитие понятия «артиновость» для алгебр Ли

Мещерина Елена Владимировна — старший преподаватель, кандидат физико-математических наук, Оренбургский государственный университет.
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
Пихтилькова Ольга Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет.
e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается развитие понятия "артиновость"для алгебр Ли. Понятие артиновости было введено для ассоциативных колец с условием минимальности. Одновременно с этим оно распространилось на модули и подалгебры. Чуть позже стали рассматривать артиновы йордановы алгебры. Для таких алгебр роль одностороннего идеала играет квадратичный идеал или, как назвал его Н.Джекобсон, вутренний идеал. Артиновость для алгебр Ли через идеалы определяли Ю.А. Бахтурин, С.А. Пихтильков и В.М. Поляков. Они рассматривали специальные артиновы алгебры Ли. С.А. Пихтильков применял артиновы алгебры Ли для построения структурной теории специальных алгебр Ли. Джорджия Бенкарт определила артиновость для алгебр Ли через внутренние идеалы. Ф. Лопес, Е. Гарсия, Г. Лозано исследовали понятие внутреннего идеала применительно к артиновости с помощью йордановых пар. Определение артиновости для алгебр Ли в данной статье представлено в трёх смыслах: через подалгебры, идеалы и внутренние идеалы. Представлена установленная авторами ранее связь между данными определениями. Рассмотрены примеры артиновых алгебр Ли. Описано применение артиновых алгебр Ли к решению проблемы Михалева: первичный радикал артиновой алгебры Ли является разрешимым.

Ключевые слова: алгебры Ли, подалгебра, артиновы алгебры Ли, внутренний идеал алгебры Ли, первичный радикал, конечномерные алгебры Ли, бесконечномерные алгебры Ли, ассоциативое кольцо, идеал кольца, условие минимальности.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
Е. В. Мещерина, О. А. Пихтилькова. Развитие понятия «артиновость» для алгебр Ли // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 167–175.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 517 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-167-175

The development of the concept of "artinian"for Lie algebras

Mescherina Elena Vladimirovna — senior lecturer, candidate of physical and mathematical sciences, Orenburg State University.
e-mail: elena_lipilina@mail.ru
Pikhtil'kova Ol'ga Aleksandrovna — candidate of physics-mathematical Sciences, associate Professor, head of chair of algebra and discrete mathematics, Orenburg State University.
e-mail: opikhtilkova@mail.ru

Abstract

In paper is considered the development of the concept of "artinian"for Lie algebras. The concept of artinian was introduced for associative rings with the minimality condition. At the same time, it extended to modules and subalgebras. A little later they began to consider Artinian Jordan algebras. For such algebras the role of a one-sided ideal is played by a quadratic ideal or, as N. Djecobson called it, the inner ideal. Artinian for Lie algebras through ideals determined Yu.A. Bakhturin, S.A. Pikhtilkov and V.M. Polyakov. They considered special Artinian Lie algebras. S.A. Pikhtilkov applied Artinian Lie algebras to construct the structural theory of special Lie algebras. Georgia Benkart defined the artinian for Lie algebras through inner ideals. F. Lopez, E. Garcia, G. Lozano explored the concept of the inner ideal applied to artinian with the help of Jordan pairs. The definition of artinian for Lie algebras in this paper is presented in three senses: via subalgebras, ideals, and inner ideals. The relationship established between these definitions is established by the authors earlier. Examples of Artinian Lie algebras are considered. The application of Artinian Lie algebras to the solution of the Mikhalev problem is described: the primary radical of the Artinian Lie algebra is solvable.

Keywords: Lie algebras, a subalgebra, Artinian Lie algebras, an inner ideal of a Lie algebra, a prime radical, finite-dimensional Lie algebras, infinite-dimensional Lie algebras, an associative ring, an ideal of a ring, and a minimality condition.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
E. V. Mescherina, O. A. Pikhtilkova, 2018, "The development of the concept of «artinian» for Lie algebras" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 167–175.

1. Введение

В 20-30-х гг. XX в. стали изучать произвольные "ассоциативные кольца и алгебры". При этом большую роль начинают играть левые и правые идеалы колец.

В. Крулль и Э. Нётер в 1925-26 гг. ввели условие максимальности и минимальности для левых идеалов и начали систематически его использовать.

Примерно в то же время Э. Артин перенес результаты Дж. М. Веддерберна о разложении полупростых алгебр на все ассоциативные кольца и алгебры, левые идеалы которых одновременно удовлетворяют и условию максимальности, и условию минимальности.

В 1944 г. году Эмиль Артин совместно с Сесил Несбитт и Робертом Траллом опубликовал работу, в которой подробно рассматриваются кольца с условием минимальности. Такие кольца теперь называют Артиновыми.

2. Основной текст статьи

Определение. Ассоциативное кольцо R называется право (лево) артиновым, если любая убывающая цепочка его правых (левых) идеалов – стабилизируется.[1], [2]

Понятие артиновости играет важную роль в теории колец.

Известны примеры право, но не лево артиновых колец [1].

В 70-е годы понятие артиновости было введено для йордановых алгебр. Для таких алгебр роль одностороннего идеала играет квадратичный идеал или, как назвал его Н.Джекобсон, вутренний идеал. [3]

Кэвин Маккриммон в работе [4] составил характеристику всех внутренних идеалов полупростых йордановых алгебр с условием убывающей цепи. Он заметил, что «внутренние идеалы играют роль в квадратичных йордановых алгебрах, аналогичную роли односторонних идеалов в теории ассоциативных алгебр. В частности йордановы алгебры с условием убывающей цепи на внутренние идеалы тесно связаны с артиновыми ассоциативными алгебрами». [4, стр. 445]

Так же артиновы йордановы алгебры рассматривал Джером Кац.[5]

В дальнейшем, говоря артинова алгебра или артиново кольцо мы будем иметь в виду правую артиновость.

Понятие артиновости используется как одно из условий конечности (конечномерности).

Так, например, радикал Джекобсона артинова кольца является нильпотентным, полупростая артинова алгебра является прямой суммой простых артиновых подалгебр, артинова простая алгебра изоморфна алгебре матриц над телом [2].

Ситуация для алгебр Ли отличается. Любой идеал алгебры Ли является двусторонним.

Артиновость для алгебр Ли через идеалы определяли Ю.А. Бахтурин [6], С.А. Пихтильков [7] и В.М. Поляков [8]. Они рассматривали специальные артиновы алгебры Ли.

Ю.А. Бахтурин в 1982 году доказал, что артинова полупростая специальная алгебра Ли изоморфно вложима как кольцо Ли в алгебру Ли, конечнопорожденную как модуль над подходящим коммутативным кольцом.[6] Он так же доказал и обратное утверждение.

С.А. Пихтильков в 2001 году при построении структурной теории специальных алгебр Ли [9], заметил, что нельзя рассчитывать построить хорошую структурную теорию для произвольных специальных алгебр Ли, следует выделить классы алгебр, для которых такая теория существует. Для ассоциативных алгебр существует хорошая теория для артиновых и нетеровых алгебр. Поэтому он стал рассматривать артиновы специальные алгебры Ли.

Он доказал, что первичный радикал такой алгебры разрешим [7]. Это утверждение справедливо и для супералгебр Ли.[10]

Так же он доказал, что для артиновой и нетеровой одновременно специальной алгебры Ли L справедливы утверждения: 1)наибольший локально нильпотентный идеал N алгебры L является нильпотентным; 2) для каждого $a \in N$, $ad\ a$ нильпотентно; 3) если B - такой идеал алгебры L, что $ad\ b$ нильпотентно для всех $b \in B$, то $B \subseteq N$; 4) N - множество таких элементов $b \in L$, что $ad\ b$ принадлежит радикалу Джекобсона $J(Ad_u L)$ ассоциативной алгебры $Ad_u L$, полученной из алгебры $Ad\ L$ с помощью присоединения единицы из алгебры $End\ L$. Алгебра $J(Ad_u L)$ нильпотентна.

В.М. Поляков в 2005 году доказал, что локально нильпотентная артинова алгебра Ли разрешима.[8]

Возможно лучшим аналогом одностороннего идеала для алгебр Ли являются подалгебры или внутренние идеалы.

Понятие внутреннего идеала для алгебр Ли было введено Джоном Фолкнером в 1973 г. Систематическим изучением внутренних идеалов в алгебрах Ли впервые занялась Джорджия Бенкарт. [11] Она же и определила артиновость для алгебр Ли через внутренние идеалы в 1975 году.

Определение. Скажем, что подпространство B алгебры Ли L является внутренним идеалом, если $[B,[B,L]] \subseteq B$.

Бенкарт доказала теорему о структуре внутреннего идеала простых ассоциативных артиновых колец:

Теорема. Пусть R – простое ассоциативное артиново кольцо характеристики не 2 или 3. Каждый внутренний идеал алгебры Ли $[R,R]/Z \cap [R,R]$ имеет вид bRf где b и f – идемпотенты в R.[12, стр. 578]

И как следствие из теоремы получила, что алгебра Ли такого типа удовлетворяет условиям обрыва и убывающей, и возрастающей цепей внутренних идеалов.

Ф. Лопес, Е. Гарсия, Г. Лозано исследовали понятие внутреннего идеала применительно к артиновости с помощью йордановых пар.

В работе [13], опубликованной в 2006 г. они рассматривают внутренние идеалы бесконечномерных финитарных простых алгебр Ли над полем характеристики нуль с геометрической точки зрения. Они изучили, в каких случаях эти внутренние идеалы являются главными или минимальными и охарактеризовали регулярные элементы фон Неймана. Как следствие они доказывают, что любая финитарная центральная простая алгебра Ли над полем характеристики нуль удовлетворяет условию убывающей цепи на главные внутренние идеалы. Они также определяют условия, при выполнимости которых эти алгебры являются артиновыми, доказывая, в частности, что финитарная простая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль артинова, если и только если она конечномерна [13, стр. 97].

В работе “Inner ideal structure of nearly Artinian Lie Algebras” [14], опубликованной в 2007 году, они изучают структуру внутренних идеалов непорожденных алгебр Ли с естественным цоколем и рассматривают случай, когда цоколь является артиновым. Они определили цоколь непорожденной алгебры Ли как сумму всех ее минимальных внутренних идеалов.

В 2008 году эти же ученые представили статью “An Artinian theory for Lie algebras” [15], в которой они классифицируют простые непорожденные артиновы алгебры Ли над полем характеристики нуль или больше чем 7 и описывают структуру внутреннего идеала Ли простой алгебры Ли, возникающей из простой ассоциативной алгебры с ненулевым цоколем.

Годом позже выходит совместная статья Джорджии Бенкарт и Антонио Фернандез Лопез под названием “The inner ideal structure of associative rings revisited” [16]. В ней они приводят полное описание структуры внутреннего идеала Ли простых артиновых колец с инволюцией и простых колец с инволюцией и минимальных односторонних идеалов.

В 2013 году Е.В. Мещерина и С.А. Пихтильков в работе [17] рассмотрели различные определения артиновости и установили связь между ними.

Рассмотрим определения артиновости в трех смыслах.

Пусть L – алгебра Ли.

а) Если убывающая цепочка идеалов стабилизируется, то алгебра называется i-артиновой;

б) если убывающая цепочка алгебр стабилизируется, то алгебра называется a-артиновой;

в) если убывающая цепочка внутренних идеалов стабилизируется, то алгебра называется inn-артиновой.

Доказано, что из inn-артиновости следует i-артиновость и из a-артиновости следует i-артиновость, но из i-артиновости может не следовать a-артиновость и inn-артиновость; из inn-артиновости может не следовать a-артиновость. Это значит, что свойства a-артиновости и inn-артиновости сильнее, чем свойство i-артиновости.

Рассмотрим примеры артиновых алгебр Ли из [17].

Пример 1. Пусть F – поле характеристики нуль,

$$K = F(x_1, x_2, ..., x_n, ...)-$$

поле рациональных функций от счетного числа коммутирующих переменных $x_1, x_2, ..., x_n, ...$

Обозначим через L алгебру Ли матриц порядка 2 над полем K со следом нуль $L = sl_2(K)$. Будем рассматривать L как алгебру Ли над полем F. Она является i-артиновой, но не является a-артиновой.

Пусть I – идеал алгебры Ли L, $a \in L, a \neq 0$. Из простоты L над полем K следует, что элемент a представим в виде

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [...[a, l_{i1}], l_{i2}], ...], l_{i,k_i}], \ \alpha_i \in K, \ l_{ij} \in L.$$

Пусть $\beta \in K$ – произвольный. Тогда элемент

$$\beta a = \sum_{i=1}^{n} [...[a, \beta\alpha_i l_{i1}], l_{i2}], ...], l_{i,k_i}], \ \alpha_i \in K, \ l_{ij} \in L.$$

принадлежит I. Следовательно, идеал I является векторным пространством над K.

Показано, что L, как алгебра над F – простая. В то же время, она содержит бесконечную убывающую цепочку подалгебр над F:

$$sl_2(F[x_1, x_2, ...]) \supseteq sl_2(F[x_{21}, x_3, ...]) \supseteq ... \supseteq sl_2(F[x_n, x_{n+1}, ...]) \supseteq ...$$

Пример 2. Пусть V векторное пространство над полем F и W – подпространство V с базисом $e_1, e_2, ..., e_n, ...$, где $\dim V/W = \infty$.

Обозначим через W_n подпространство, порожденное векторами $e_n, e_{n+1}, ...$. Получим $W = W_1$.

Пусть $L = L(V)^{(-)}$ алгебра Ли, полученная из полной алгебры линейных отображений V с помощью операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$. Известно, что L – простая алгебра Ли. Она является i-артиновой, но не является inn-артиновой.

Обозначим через I_n множество линейных отображений $f : V \to V$ таких, что $f(V) \subseteq W_n$, $f(W) = 0$.

Проверим, что $I_n, n = 1, 2, ...$ – являются внутренними идеалами.

Рассмотрим $f, g \in I_n, h \in L, x \in V$. Тогда

$$[f, [g, h]](x) = f[g, h](x) - [g, h]f(x) =$$

$$= f(g(h(x))) - f(h(g(x))) - g(h(f(x))) + h(g(f(x))) =$$

$$= -f(h(g(x))) - g(h(f(x))) \subseteq W_n.$$

Использовано свойство отображений из $I_n : fg = gf = 0$.

Следовательно, $[f, [g, h]] \subseteq I_n$.

Это значит, что множество линейных отображений I_n является внутренним идеалом алгебры Ли L.

Цепочка внутренних идеалов $I_1 \supseteq I_2 \supseteq ... \supseteq I_n \supseteq ...$ простой алгебры Ли L является строго убывающей, бесконечной.

В той же работе приведен пример бесконечномерной inn-артиновой алгебры Ли. Рассмотрим его.

Пример 3. Пусть F – поле характеристики нуль, K - бесконечномерное алгебраически замкнутое расширение поля F. Алгебра Ли $L = sl_2 K$, бесконечномерная над F, является inn-артиновой алгеброй Ли. Можно отметить, что алгебра L содержит бесконечномерную абелеву подалгебру. Следовательно, алгебра Ли L не является a-артиновой.

В качестве примера a-артиновой алгебры Ли может служить любая конечномерная алгебра Ли.

?Пример 4. Рассмотрим подалгебру B полной линейной алгебры Ли $gl(n, C)$, состоящую из всех верхнетреугольных матриц. B - разрешимая алгебра Ли, значит, она содержит конечную убывающую цепочку подалгебр. Следовательно, она является a-артиновой и i-артиновой.

Бесконечномерные a-артиновы алгебр Ли так же представляют интерес.

Как известно, многие результаты переносятся с групп на алгебры Ли.

Среди групп существуют даже квазициклические группы - абелевы бесконечные группы удовлетворяющие условию минимальности для подгрупп.

Примером такой группы является мультипликативная группа комплексных корней уравнений $x^{p^n} = 1, n = 1, 2, ...$ для простого числа p.

Все подгруппы квазициклических групп конечны. О.Ю. Шмидт сформулировал проблему о существовании бесконечных неабелевых групп все, подгруппы которых конечны.

Эта проблема была решена А.Ю. Ольшанским [18].

Однако, для алгебр Ли ситуация иная. Все абелевы a-артиновы алгебры Ли – конечны.

В работе [19] показано, что все специальные алгебры Ли с условием максимальности на абелевы подалгебры – конечномерны.

Условие максимальности на абелевы подалгебры означает отсутствие бесконечных абелевых подалгебр. Оно эквивалентно условию минимальности на абелевы подалгебры.

В работе [20] доказана эквивалентность вопроса о существовании бесконечномерных a-артиновых алгебр Ли вопросу о существовании первичных бесконечномерных a-артиновых алгебр Ли. Но ответить на данные вопросы до сих пор не удалось.

В 2001 году А.В. Михалев на семинаре механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова "Кольца и модули"поставил проблему: существует ли артинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?

Выше уже было отмечено, что С.А. Пихтильков доказал разрешимость первичного радикала специальной i-артиновой алгебры Ли. [7].

Известно, что первичный радикал произвольной алгебры Ли является слабо разрешимым, может не быть разрешимым и даже локально разрешимым [21].

В работе [22], опубликованной в 2013 году, нами доказано, что если L – a-артинова или inn-артинова алгебра Ли, тогда первичный радикал $P(L)$ алгебры Ли L – разрешим.

В 2015 году С.А. Пихтильков и А.Н. Благовисная доказали, что первичный радикал слабоартиновой алгебры Ли разрешим. Под слабоартиновой алгеброй Ли авторы подразумевают i-артиновость.[23]

Так же для такой алгебры авторы доказали локальную нильпотентность первичного радикала.

3. Заключение

Как было отмечено выше, артиновость оказалась полезным условием для построения структурной теории специальных алгебр Ли.

При изучении артиновых алгебр Ли возникает множество новых вопросов, ответы на которые предстоит найти.

Известно, что алгебры Ли имеют приложения в теории кодирования, криптографии, физике и других науках. Надеемся, что в скором времени и артиновы алгебры Ли найдут приложение в различных областях науки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламбек И. Кольца и модули. М.: Мир, 1971. 279 с.
2. Херстейн И. Некоммутативные кольца. М.: Мир, 1972. 191 с.
3. Мещерина Е. В. История развития понятия "Внутренний идеал"// История науки и техники. 2015. № 9. С. 3-7.
4. McCrimmon K. Inner ideals in quadratic Jordan algebras // Trans. Amer. Math.Soc. 1971. Vol. 159. P. 445-468.
5. Katz J. Isomorphisms of the lattice of inner ideals of certain quadratic Jordan algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 185. P. 309-329.
6. Бахтурин Ю. А. Артиновы специальные алгебры Ли // Алгебра. М.: Изд-во МГУ, 1982. С. 24-26.
7. Пихтильков С. А. Артиновые специальные алгебры Ли // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп: межвуз. сборник. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого, 2001. С. 189-194.
8. Пихтильков С. А., Поляков В. М. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли // Чебышевский сборник. 2005. Т. 6, № 1. С. 163-169.
9. Пихтильков С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли : монография. Тула: Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2005. 130 с.
10. Pikhtilkov S. A., Polyakov V. M. Artinal special Lie superalgebras // Bull. Academie de stinte a republicii Moldova. Matematica. 2004. Vol. 44, № 1. P. 116-119.
11. Benkart G. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras // Transaction of the American Mathematical Society. 1977. Vol. 232. P. 61-81.
12. Benkart G. The Lie inner ideal structure of associative rings // J. of Algebra. 1976. Vol. 43. P. 561-584.

13. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. Inner ideals of finitary simple Lie algebras // J. Lie Theory. 2006. Vol. 16. P. 97-114.

14. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. Inner ideal structure of nearly artinian Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 137. P. 1-9.

15. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M. An artinian theory for Lie algebras // J. of Algebra. 2008. Vol. 319, № 3. P. 938-951.

16. Benkart G., Fernandez Lopez A. The inner ideal structure of associative rings revisited // Communications in Algebra. 2009. Vol. 37. P. 3833–3850.

17. Мещерина Е. В., Пихтильков С. А. О некоторых свойствах внутренних идеалов алгебры Ли // Вестник Оренбург. гос. ун-та. 2013. № 9 (158). С. 110-114.

18. Ольшанский А. Ю. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. 1980. Т. 44, № 2. С. 309-321.

19. Бейдар К. И., Зайцев М. В., Пихтильков С. А. Алгебры Ли с условием максимальности на абелевы подалгебры // Вестник МГУ. Сер. 1.: Математика. Механика. 2002. № 5. С. 27-32.

20. Мещерина Е. В. О различных определениях артиновости для алгебр Ли // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14. № 3 (47). С. 86-91; то же [Электронный ресурс] . URL: http://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/107/103

21. Балаба И. Н., Михалев А. В., Пихтильков С. А. Первичный радикал градуированных Ω-групп // Фундамент. и приклад. математика. 2006. Т. 12, № 2. С. 159-174.

22. Мещерина Е. В., Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А. О проблеме А.В. Михалева для алгебр Лиеbreak // Изв. Саратов. ун-та. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 84-89.

23. Благовисная А. Н., Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А. О свойствах первичного радикала слабоартиновой алгебры Ли //Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 1. С. 134-142. ; то же [Электронный ресурс] . URL: http://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/309/282

REFERENCES

1. Lambek, I., 1971, *Kol'ca i moduli [Rings and modules]*, Mir, Moscow. 279p.

2. Herstein, I., 1972, *Nekommutativnye kol'ca [Noncommutative rings]*, Mir, Moscow. 191p.

3. Mescherina, E.V., 2015, *"History of the development of the concept of "inner ideal"."*, *History of Science and Engineering*, Moscow, no. 9, pp. 3-7.

4. McCrimmon, K., 1971, "*Inner ideals in quadratic Jordan algebras*", *Trans. Amer. Math.Soc*, USA, vol. 159, pp. 445-468.

5. Katz, J., 1973, "*Isomorphisms of the lattice of inner ideals of certain quadratic Jordan algebras*", *Trans. Amer. Math.Soc*, USA, vol. 185, pp. 309-329.

6. Bakhturin, Yu.A., 1982, "*Artinian special Lie algebras*", *Algebra*, Izd-vo MGU, Moscow, pp. 24-26.

7. Pikhtilkov, S.A., 2001, "*Artinian special Lie algebra*", *Algorithmic problems of the theory of groups and semigroups*, Izd-vo Tul. gos. ped. univ. im. L.N.Tolstogo, Tula, pp. 189-194.

8. Pikhtilkov, S.A., Polyakov, V.M., 2005, "*About locally nilpotent Artinian Lie algebras*", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 6, issue 1, pp. 163-169.

9. Pikhtilkov, S.A., 2005, "*Strukturnaya teoriya special'nyh algebr Li [The structural theory of special Lie algebras]*", Izd-vo TGPU im. L.N. Tolstogo, Tula, pp. 45-48.

10. Pikhtilkov, S.A, Polyakov, V.M., 2004, "*Artinian special Lie superalgebras*", *Bull. Academie de stinte a republicii Moldova. Matematica*, vol. 44, no. 1, pp. 116-119.

11. Benkart, G., 1977, "*On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras*", *Transaction of the American Mathematical Society*, USA, vol. 232, pp. 61-81.

12. Benkart, G., 1976, "*The Lie inner ideal structure of associative rings*", *J. Algebra*, USA, vol. 43, pp. 561-584.

13. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M., 2006, "*Inner ideals of the finitary simple Lie algebras*", *J. Lie Theory*, USA, vol. 16, pp. 97-114.

14. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M., 2009, "*Inner ideal structure of almost artinian Lie algebras*, *Proc. Amer. Math. Soc*, USA, vol. 137, pp. 1-9.

15. Fernandez Lopez A., Garcia E., Gomez Lozano M., 2008, "*An artinian theory for Lie algebras*, *Journal of Algebra*, USA, vol. 319, no. 3, pp. 938-951.

16. Benkart, G., Fernandez Lopez A., 2009, "*The inner ideal structure of associative rings revisited*", *Communications in Algebra*, USA, vol. 37, pp. 3833-3850.

17. Meshcherina, E.V., Pichtilkov, S.A., 2013,"*On some properties of inner ideals of a Lie algebra*", *Vestnik OGU*, no. 9 (158), pp. 110-114.

18. Olshansky, A.Yu., 1980, "*Infinite group with subgroups of prime orders*", *Izv. AN SSSR. Ser. mat.*, part 44, no. 2, pp. 309-321.

19. Beidar, K.I., Zaytsev, M.V., Pikhtilkov, S.A., 2002, "*Lie algebras with the maximality condition on abelian subalgebras*", *Vestnik MGU, Ser. 1. Mat., Mekh.*, no. 5, pp. 27-32.

20. Meshcherina, E.V., 2013, "*On the different definitions of Artinian for Lie Algebras*", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 14, issue 3 (47), pp. 86-91.

    Available at: http://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/107/103

21. Balaba, I.N., Mikhalev, A.V., Pikhtilkov, S.A., 2006, "*The primary radical of graded Ω -groups*", *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 12, no. 2, pp. 159-174.

22. Meshcherina, E.V., Pikhtilkov, S.A., Pikhtilkova, O.A., 2013, "*On the problem of A.V. Mikhalev for Liealgebras*", *Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Novaya seriya. Seriya Mathematika. Mechanika. Informatika*, vol. 4, part 2, pp. 84-89.

23. Blagovisnaya, A.N., Pikhtilkov, S.A., Pikhtilkova, O.A., 2017, "*On the properties of the primary radical of the weakly-Artinian Lie algebra*", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, issue 1, pp. 134-142. Available at: http://www.chebsbornik.ru/jour/article/view/309/282