

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 19. Выпуск 1

УДК 539.52:669.11.018

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166

**Анализ уравнений теории пластичности порошковых металлических систем<sup>1</sup>**

**Макаров Эдуард Сергеевич** — профессор, доктор технических наук, Тульский государственный университет.

**Гвоздев Александр Евгеньевич** — главный научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, профессор, доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

*e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru*

**Журавлев Геннадий Модестович** — профессор, доктор технических наук, Тульский государственный университет.

*e-mail: technology@tspu.ru*

**Сапожников Сергей Владимирович** — главный специалист, ООО «Тулачермет-Сталь».

*e-mail: sapozhnikov\_sv@tula-steel.ru*

**Сергеев Александр Николаевич** — заведующий кафедрой технологии и сервиса, старший научный сотрудник кафедры технологии и сервиса, профессор, доктор технических наук, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

*e-mail: technology@tspu.ru*

**Колмаков Алексей Георгиевич** — член-корреспондент РАН, профессор, доктор технических наук, заместитель директора, Институт металлургии и материаловедения им. А. А. Байкова РАН.

*e-mail: kolmalov@imet.ac.ru*

**Бреки Александр Джалюльевич** — кандидат технических наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой, Санкт-петербургский политехнический университет Петра Великого.

*e-mail: albreki@yandex.ru*

**Малий Дмитрий Владимирович** — ассистент кафедры технологии и сервиса, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого.

*e-mail: MaliyDmitriy@yandex.ru*

**Добровольский Николай Николаевич** — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет.

*e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Аннотация**

В работе дан обзор методов расчета, основных параметров процессов пластического деформирования дилатирующих материалов, типичными представителями которых являются порошковые металлические системы различных химических составов. В их основу положены математические модели, использующие не только качественное объяснение, но и количественное описание эффекта дилатансии. Приведена полная система основных уравнений теории пластичности жесткопластических изотропных дилатирующих

<sup>1</sup>Работа выполнена по федеральной целевой программе «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271).

сред. Рассмотрен пример расчета установившегося пластического течения в условиях осесимметричной деформации. Показано, что для осесимметричной деформации уравнения относительно проекций вектора скорости на характеристические направления, аналогичны уравнениям для плоской деформации. Установлено, что используемые в настоящее время условия текучести с различной степенью точности описывают виды дилатансии (разрыхление и уплотнение). Поэтому, для более точного решения некоторых задач необходимо уточнение математических моделей условия текучести. Для некоторых процессов, пластического формоизменения при решении системы уравнений дилатирующих сред целесообразно условия текучести представлять в виде отдельных областей: гиперболической, параболической и эллиптической.

*Ключевые слова:* дилатирующая среда, осесимметричная деформация, полная система уравнений, условие текучести, характеристики кривой условия текучести, порошковая металлическая система.

*Библиография:* 28 названий.

**Для цитирования:**

Э. С. Макаров, А. Е. Гвоздев, Г. М. Журавлев, А. Г. Колмаков, А. Н. Сергеев, С. В. Сапожников, А. Д. Бреки, Д. В. Малий, Н. Н. Добровольский. Анализ уравнений теории пластичности порошковых металлических систем // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 152–166.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 19. No. 1

UDC 539.52:669.11.018

DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-152-166

**Analysis of plasticity theory equations of powder metal systems**

**Makarov Eduard Sergeevich** — professor, doctor of technical sciences, Tula State University.  
**Gvozdev Alexander Evgenievich** — chief researcher of the department of technology and service, professor, doctor of technical sciences, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: gvozdev.alexandr2013@yandex.ru*

**Zhuravlev Gennady Modestovich** — professor, doctor of technical sciences, Tula State University.

*e-mail: technology@tspu.ru*

**Sapozhnikov Sergey Vladimirovich** — Chief specialist, LLC «Tulachermet-Steel».

*e-mail: sapozhnikov\_sv@tula-steel.ru*

**Sergeev Alexander Nikolaevich** — head of the department of technology and service, senior researcher of the department of technology and service, professor, doctor of technical sciences, Tula L.N. Tolstoy State Pedagogical University.

*e-mail: technology@tspu.ru*

**Kolmakov Aleksey Georgievich** — corresponding member of RAS, professor, doctor of technical sciences, deputy director, Institute of Metallurgy and Materials Science A.A. Baikova of the Russian Academy of Sciences.

*e-mail: kolmalov@imet.ac.ru*

**Breki Alexander Jalulievich** — candidate of technical sciences, assistant professor, deputy head of the department, State Petersburg Polytechnic University of Peter the Great.

*e-mail: albreki@yandex.ru*

**Maliy Dmitriy Vladimirovich** — assistant of the department of technology and service, Tula State L.N. Tolstoy Pedagogical University.

*e-mail: MaliyDmitriy@yandex.ru*

**Dobrovolsky Nikolai Nikolaevich** — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University.

*e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com*

**Abstract**

The paper provides the review of calculation method and basic parameters of moulding processes in dilatant materials which are typical representatives of powder metal systems of different chemical compositions. They are based on mathematical models that use not only qualitative explanation, but also quantitative description of the dilatancy effect. The work shows the complete system of basic plasticity theory equations of the rigid-plastic isotropic dilatant media. It considers an example of the steady-state plastic flow calculation under conditions of axisymmetric deformation. It is shown that for axisymmetric deformation the equations relative to velocity vector projection on the characteristic directions are similar to the equations for planar deformation. It is established that the current yield conditions with varying degrees of accuracy describe the types of dilatancy (loosening and compaction). Therefore, for a more precise solution of some problems, it is necessary to refine the mathematical models of the yield condition. For some processes of plastic shaping when solving the system of equations of dilatant media, it is expedient to represent the flow conditions in the form of separate regions: hyperbolic, parabolic and elliptic.

---

*Keywords:* dilatant medium, axisymmetric deformation, complete system of equations, condition of fluidity, characteristics of the yield curve, powder metal system.

*Bibliography:* 28 titles.

**For citation:**

[E. S. Makarov](#), A. E. Gvozdev, G. M. Zhuravlev, A.G. Kolmakov, A. N. Sergeev, S. V. Sapozhnikov, A. D. Breki, D. V. Maliy, N. N. Dobrovolsky, 2018, "Analysis of plasticity theory equations of powder metal systems", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 152–166.

## 1. Введение

Современные возрастающие требования к качеству изделий требуют более полного подхода к анализу и проектированию процессов производства. Одной из основных тенденций современного машиностроения является повышение эффективности существующих и разработка новых технологических процессов, обеспечивающих повышение качества выпускаемых изделий при снижении себестоимости и трудоемкости их производства, экономии материальных и энергетических ресурсов. В связи с этим в различных отраслях промышленности в настоящее время возникает необходимость учета необратимого изменения объема материала при расчетах многих технологических процессов, например, формования порошковых материалов, обработки давлением и резанием пористых заготовок, уплотнения грунтов, закрытой прокладке трубопроводов способом прокола.

## 2. Подход к расчету основных параметров пластического деформирования дилатирующих материалов

В результате экспериментальных и теоретических исследований, выполненных в нашей стране и за рубежом, разработаны некоторые методы расчета основных параметров процессов пластического деформирования дилатирующих материалов. В основу, которых положены математические модели, использующие не только для качественного объяснения, но и количественного учета и описания эффекта дилатансии. Установлено, что наиболее плодотворным является использование континуальных моделей пластической дилатансии, в том числе и стохастических. Первый шаг на этом пути сделали в 1952 г. Д. Друккер и В. Прагер [1], которые подошли к этому с позиции теории пластического потенциала на основе линейного условия текучести.

$$\alpha J_1 + \sqrt{J_2'} = \Upsilon \quad (1)$$

где  $J_1$  - сумма главных напряжений,  $J_2'$  - второй инвариант девиатора напряжений,  $\alpha$  и  $\Upsilon$  - положительные константы, получили для скорости объемной пластической деформации  $\varepsilon$  выражение

$$\varepsilon = 3\alpha\lambda \quad (2)$$

причем из определяющих соотношений, ассоциированных с условием (1), следует, что коэффициент пропорциональности  $\lambda$  между компонентой  $\varepsilon_{ij}$  тензора скоростей деформаций и частной производной пластического потенциала  $f$  по соответствующей компоненте тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  равен интенсивности скоростей деформаций сдвига  $H$ .

Величина

$$\Lambda = \varepsilon/H, \quad (3)$$

определяемая отношением скорости объемной деформации к интенсивности скоростей деформаций сдвига, называется скоростью дилатансии [2].

В терминах среднего напряжения  $\sigma$  и интенсивности касательных напряжений  $T$ , связанных с инвариантами  $J_1$  и  $J_2'$  соотношениями

$$J_1 = 3\sigma, \quad J_2' = T^2, \quad (4)$$

условие Друккера – Прагера переписывается в виде

$$3\alpha\sigma + T = \Upsilon. \quad (5)$$

Полагая

$$f = 3\alpha\sigma + T - \Upsilon \quad (6)$$

согласно концепции пластического потенциала получаем

$$\varepsilon = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 3\alpha\lambda, \quad H = \lambda \frac{\partial f}{\partial T} = \lambda, \quad (7)$$

откуда находим

$$\Lambda = 3\alpha > 0, \quad (8)$$

т.е. дилатирующая среда, поведение которой подчиняется условию текучести Друккера – Прагера и ассоциированному закону течения, в процессе деформирования - разрыхляется.

Кроме того, во многих случаях дилатирующие материалы подвергаются преимущественно уплотнению. Таковы, например, процессы прокатки, экструзии и прессования порошковых и пористых металлов [3-9].

Поэтому в связи с необходимостью учета уплотнения материала гипотеза о связно-сыпучей среде, соответствующей идеальной пластичности, встретила ряд возражений, опиравшихся на экспериментальные результаты.

Необходимые обобщения условия (1), обеспечивавшие в той или иной степени согласование теории дилатансии с экспериментами, выполнили в 1957г. Д. Друккер, Р. Гибсон и Д. Хенкель, в 1959г. – Э. Дженике и Р. Шилд, в 1969г. – Н. Су, Дж. Вейдлер и П. Пэсли, в 1970г. – Ф. Димаджио и И. Сандлер, - полученные ими результаты сводились в основном к построению замкнутых поверхностей текучести в пространстве напряжений.

Наибольшее распространение в расчетах технологических процессов порошковой металлургии получили квадратичное условие текучести Р. Грина и его различные модификации, охватываемые выражением

$$AJ_2' + BJ_1^2 = D\Upsilon_0^2, \quad (9)$$

где  $A, B, D$  - функции относительной плотности  $R$  (отношения плотностей пористого и компактного металлов) или, что то же, пористости  $\Pi = 1 - R$ ,  $\Upsilon_0$  - предел текучести компактного металла.

В условии текучести Грина

$$A = 3, B = \frac{1}{4} \left[ \frac{3(1 - \Pi^{1/3})}{(3 - 2\Pi^{1/4}) \ln \Pi} \right]^2, D = \left[ \frac{3(1 - \Pi^{1/3})}{3 - 2\Pi^{1/4}} \right]^2.$$

В рамках закона пластического течения, ассоциированного с условием текучести (9), для скорости дилатансии находим

$$\Lambda = 9B\sigma / (AT), \quad (10)$$

откуда следует, что знаки скорости дилатансии и среднего напряжения совпадают и что  $\Lambda = 0$  при  $\sigma = 0$ .

Достоинством всех условий является то, что, во-первых, при  $\Pi = 0$  ( $R = 1$ ) они обращаются в классическое условие пластичности Мизеса, во-вторых, учитывают упрочнение и разупрочнение дилатирующего материала и, в-третьих, предусматривают изменение знака дилатансии с изменением знака нормального октаэдрического напряжения. Недостаток этих

условий заключается в том, что они предсказывают одинаковую сопротивляемость материала растяжению и сжатию, а также нулевую скорость дилатансии в отсутствие гидростатического давления. Последние замечания снимаются, если ввести еще одну материальную функцию  $c \geq 0$  и записать условие текучести в виде

$$J_2' + B(J_1 + 3c)^2 = D\Upsilon_0^2. \quad (11)$$

При этом прочностные характеристики при сжатии будут выше, чем при растяжении, а скорость дилатансии составит

$$\Lambda = 9B(\sigma + c)/(AT) \quad (12)$$

и будет положительной при  $\sigma = 0$ , т.е. в отсутствие гидростатического давления дилатирующий материал разрыхляется.

Геометрическая интерпретация условий текучести даны на рис. 1 и рис. 2.

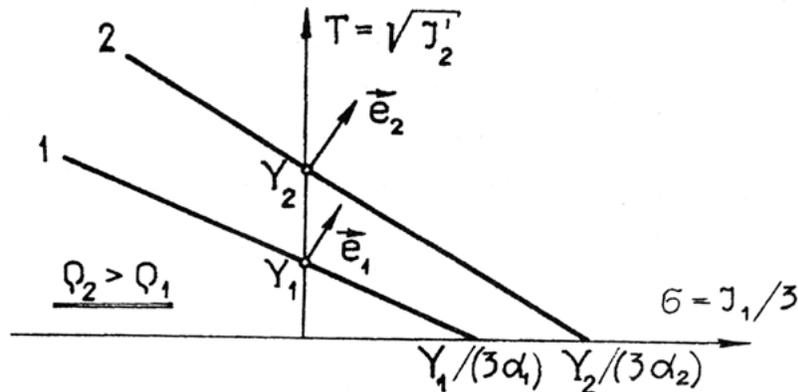


Рис. 1: Условие текучести Друккера-Прагера.

Однако дальнейшее развитие техники выдвигает все более сложные задачи, эффективное решение которых связано с уточнением математических моделей изучаемых процессов, когда при решении системы уравнений дилатирующих сред условия текучести представляется в виде отдельных участков условия текучести.

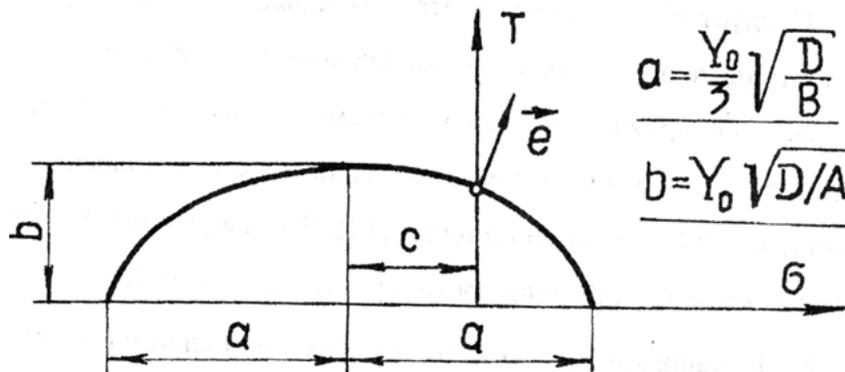


Рис. 2: Условие текучести Грина.

### 3. Полная система уравнений

Дилатирующая среда считается жесткопластической изотропной [10]. Массовыми силами пренебрегаем. Полная система уравнений теории течения такой среды содержит уравнения равновесия и неразрывности, условие пластичности, соотношения ассоциированного закона течения

$$\sigma_{ij,j} = 0, \dot{\rho} + \rho_{i,i} = 0, f = 0, v_{i,j} + v_{j,i} = 2\lambda\sigma_{ij}, \quad (13)$$

где  $v_i$  – скорость течения, и дополняется краевыми условиями.

Рассмотрим установившиеся течения на примере осесимметричной деформации.

### 4. Осесимметричная деформация

Пусть в меридиональной плоскости течения, совпадающей с плоскостью  $z, r$ ,  $p$  и  $\tau$  – соответственно полусумма и полуразность главных напряжений,  $\psi$  – угол между осью  $r$  и первым главным направлением [11-13].

Тогда

$$\sigma_r = p + \tau \cos 2\psi, \quad \sigma_z = p - \tau \cos 2\psi, \quad \tau_{rz} = \tau \sin 2\psi \quad (14)$$

где  $\tau$  является функцией  $p, \sigma, \rho$ :

$$\tau = \sqrt{k^2(\sigma, \rho) - 3(\rho - \sigma)^2} \quad (15)$$

Система уравнений осесимметричной деформации имеет вид

$$\begin{aligned} & p_{,r} + (\tau_p p_{,r} + \tau_\sigma \sigma_{,r} + \tau_\rho p_{,r}) \cos 2\psi - 2\tau \sin 2\psi \psi_{,r} + \\ & + (\tau_p p_{,z} + \tau_\sigma \sigma_{,z} + \tau_\rho p_{,z}) \sin 2\psi + \\ & + 2\tau \cos 2\psi \psi_{,z} + \frac{1}{r} [3(p - \sigma) + \tau \cos 2\psi] = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & (\tau_p p_{,r} + \tau_\sigma \sigma_{,r} + \tau_\rho p_{,r}) \sin 2\psi - 2\tau \cos 2\psi \psi_{,r} + p_{,z} - \\ & - (\tau_p p_{,z} + \tau_\sigma \sigma_{,z} + \tau_\rho p_{,z}) \cos 2\psi + \\ & + 2\tau \sin 2\psi \psi_{,z} + \frac{\tau}{r} \sin 2\psi = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$u p_{,r} + w p_{,z} + p(u_{,r} + w_{,z} + \frac{u}{r}) = 0 \quad (18)$$

$$2\tau \sin 2\psi u_{,r} - \left( \tau \cos 2\psi + p - \sigma - \frac{2}{3} k' k \right) (u_{,z} + w_{,r}) = 0 \quad (19)$$

$$\left( \tau \cos 2\psi - p + \sigma + \frac{2}{3} k' k \right) (u_{,z} + w_{,r}) + 2\tau \sin 2\psi w_{,z} = 0, \quad (20)$$

$$\left( p - \sigma - \frac{1}{3} k' k \right) (u_{,z} + w_{,r}) - \frac{\tau}{r} u \sin 2\psi = 0. \quad (21)$$

Характеристические многообразия этой системы находим по общему правилу [14] из условия

$$\text{Det} \omega_{ij} = 0, \quad (22)$$

где  $\omega = \omega(r, z)$  – уравнение поверхности слабого разрыва, а элементы детерминанта шестого порядка даются выражениями:

$$\begin{aligned}
\omega_{11} &= 0, \omega_{12} = 0, \omega_{13} = u\omega_r + w\omega_z \\
\omega_{14} &= 0, \omega_{15} = \rho\omega_r, \omega_{16} = \rho\omega_z \\
\omega_{21} &= (1 + \tau_\rho \cos 2\psi)\omega_r + \tau_\rho \sin 2\psi\omega_z \\
\omega_{22} &= \tau_\sigma \cos 2\psi\omega_r + \tau_\sigma \sin 2\psi\omega_z \\
\omega_{23} &= \tau_\rho \cos 2\psi\omega_r + \tau_\rho \sin 2\psi\omega_z \\
\omega_{24} &= -2\tau \sin 2\psi\omega_r + 2\tau \cos 2\psi\omega_z \\
\omega_{25} &= 0, \omega_{26} = 0 \\
\omega_{31} &= \tau_\rho \sin 2\psi\omega_r + (1 - \tau_\rho \cos 2\psi)\omega_z \\
\omega_{32} &= \tau_\sigma \sin 2\psi\omega_r - \tau_\sigma \cos 2\psi\omega_z, \\
\omega_{33} &= \tau_\rho \sin 2\psi\omega_r - \tau_\rho \cos 2\psi\omega_z, \\
\omega_{34} &= \tau_\rho \cos 2\psi\omega_r + 2\tau \sin 2\psi\omega_z, \\
\omega_{35} &= 0, \omega_{36} = 0; \\
\omega_{41} &= 0, \omega_{42} = 0, \omega_{43} = 0, \omega_{44} = 0, \\
\omega_{45} &= 2\tau \sin 2\psi\omega_r - (\tau \cos 2\psi + p - \sigma - \frac{2}{3}k \cdot k) \omega_z, \\
\omega_{46} &= -(\tau \cos 2\psi + p - \sigma - \frac{2}{3}k \cdot k) \omega_r \\
\omega_{51} &= 0, \omega_{52} = 0, \omega_{53} = 0, \omega_{54} = 0, \\
\omega_{55} &= (\tau \cos 2\psi - p + \sigma + \frac{2}{3}k \cdot k) \omega_z, \\
\omega_{56} &= (\tau \cos 2\psi - p + \sigma + \frac{2}{3}k \cdot k) \omega_r + 2\tau \sin 2\psi\omega_z; \\
\omega_{61} &= 0, \omega_{62} = 0, \omega_{63} = 0, \omega_{64} = 0, \\
\omega_{65} &= (p - \sigma - \frac{1}{3}k \cdot k) \omega_z, \\
\omega_{66} &= (p - \sigma - \frac{1}{3}k \cdot k) \omega_r,
\end{aligned}$$

Внося значения элементов детерминанта в условие (22) и преобразуя последнее с помощью теоремы Лапласа, в конечном итоге приходим к выводу, что характеристиками системы уравнений осесимметричной деформации являются линии тока

$$\frac{dz}{dr} = \frac{w}{u} \quad (23)$$

и две пары семейств кривых

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\sin 2\psi \pm \sqrt{1 - \tau_p^2}}{\cos 2\psi + \tau_p} \quad (24)$$

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\sin 2\psi \pm \sqrt{1 - (\tau_p + \frac{2}{3}\tau_\sigma)^2}}{\cos 2\psi + \tau_p} \quad (25)$$

Характеристики (24) и (25) действительны при  $|k| \leq \sqrt{3}/2$  и  $|k| \geq \sqrt{3}$ , т.е. случай эллиптичности изображается на кривой  $T = k(\sigma, \rho)$  (рис. 3) внутренними точками дуг MP и NQ. Точки M, N, P, Q изображают случаи параболичности. Внутренние точки дуг PQ, MR, NS, а также точки R и S представляют область гиперболичности.

Кривые различных семейств пар (24) и (25) пересекаются под углами

$$\chi_1 = \arccos \tau_\rho, \chi_2 = \arccos \left( \tau_\rho + \frac{2}{3}\tau_\sigma \right) \quad (26)$$

которые делятся пополам первым главным направлением.

Вдали от оси симметрии деформация приближается к плоской, поэтому

$$p \rightarrow \sigma - \frac{1}{3}k \cdot k, \chi_2 \rightarrow \chi_1$$

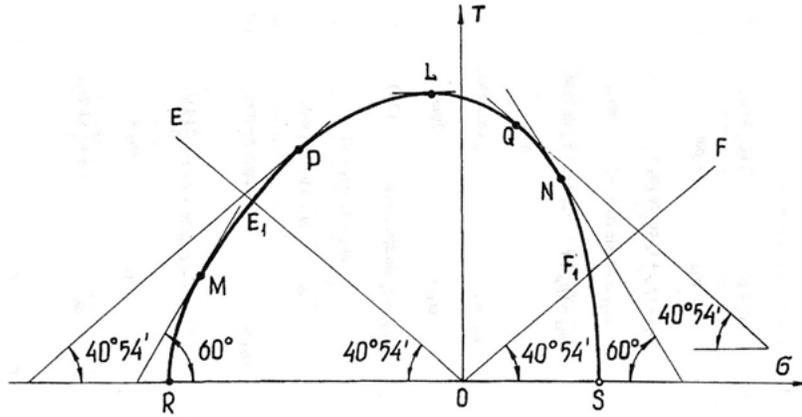


Рис. 3: Области гиперболичности, параболичности и эллиптичности полной системы уравнений для случая осесимметричной деформации

Пусть характеристические линии  $\zeta, \eta, \mu, \nu$  составляют с осью  $r$  соответственно углы  $\alpha_1 = \psi - \frac{1}{2}\chi_1, \beta_1 = \psi + \frac{1}{2}\chi_1, \alpha_2 = \psi - \frac{1}{2}\chi_2, \beta_2 = \psi + \frac{1}{2}\chi_2$ . Тогда уравнения (16)-(17) и (19)-(20), отнесенные к сеткам характеристик (24) и (25), примут вид

$$\cos \chi_1 p, \zeta + p, \eta + \tau_\sigma \sigma, \zeta + \tau_\rho \rho, \zeta + 2\tau \operatorname{ctg} \chi_1 \psi, \zeta + 2\tau \cos \epsilon \chi_1 \psi, \eta + \frac{1}{r} [3(p - \sigma) \cos \beta_1 + \tau \cos \alpha_1] = 0, \quad (27)$$

$$p, \zeta + \cos \chi_1 p, \eta + \tau_\sigma \sigma, \eta + \tau_\rho \rho, \eta - 2\tau \cos \epsilon \chi_1 \psi, \zeta + 2\tau \operatorname{ctg} \chi_1 \psi, \eta + \frac{1}{r} [3(p - \sigma) \cos \alpha_1 + \tau \cos \beta_1] = 0 \quad (28)$$

$$u, \mu \cos \alpha_2 - u, \nu \cos \beta_2 + w, \mu \sin \alpha_2 - w, \nu \sin \beta_2 = 0 \quad (29)$$

$$u, \mu \cos(k - \beta_2) - u, \nu \cos(k + \alpha_2) + w, \mu \sin(k - \beta_2) - w, \nu \sin(k - \beta_2) = 0 \quad (30)$$

где

$$k = \operatorname{arctg}(\sin 2\psi \sec \chi_2).$$

Формы записи соотношений (29) - (30) показывают, что для осесимметричной деформации уравнения относительно проекций вектора скорости на характеристические направления, аналогичны уравнениям для плоской деформации (15).

## 5. Заключение

Проведенные исследования основных уравнений теории пластичности дилатирующих сред свидетельствуют о том, что используемые условия текучести Д. Друккера и В. Прагера, Р. Грина с различной степенью точности описывают виды дилатансии (разрыхление и уплотнение). Приведенные исследования целым рядом авторов, показали, что необходимо построение замкнутых поверхностей текучести в пространстве напряжений. Для определения независимых параметров поверхности текучести можно использовать результаты экспериментов по одноосному растяжению, одноосному сжатию и чистому сдвигу образцов. Однако, для эффективного решения некоторых задач, необходимо дальнейшее уточнение математических моделей условий текучести. В этом случае при решении системы уравнений дилатирующих сред

условия текучести целесообразно представляется в виде отдельных областей: гиперболической, параболической и эллиптической.

Результаты исследования могут быть использованы при создании малопереходных и ресурсосберегающих процессов обработки конструкционных материалов в различных условиях и состояниях с использованием новых конструкционных смазок и покрытий [16-26] и в различных важнейших технологических приложениях [27-28].

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Определяющие законы механики грунтов: Сб. статей / Под ред. В.Н. Николаевского. - М.: Мир, 1975. - 230 с.
2. Вялов С.С. Реологические основы механики грунтов. - М.: Высшая школа, 1978. - 448 с.
3. Виноградов Г.А., Каташинский В.П. Теория листовой прокатки металлических порошков и гранул. - М.: Metallurgia, 1979. - 224 с.
4. Перельман В.Е. Формование порошковых материалов. - М.: Metallurgia, 1979. - 232 с.
5. Макаров Э.С. К теории формования металлических порошков в условиях плоской деформации // Известия вузов, Машиностроение. - 1973. - № 10. - С. 158-162.
6. Павлов В.А., Кипарисов С.С., Щербина В.В. Обработка давлением порошков цветных металлов. - М.: Metallurgia, 1977. - 176 с.
7. Новые процессы деформации металлов и сплавов / А.П. Коликов, П.И. Полухин, А.В. Крупин и др. - М.: Высшая школа, 1986. - 352 с.
8. Порошковая металлургия и напыленные покрытия / Под ред. Б.С. Митина. - М.: Metallurgia, 1987. - 792 с.
9. Экономичные методы формообразования деталей / Под ред. К.Н. Богоявленского и В.В. Риса. - Л.: Лениздат, 1984. - 144 с.
10. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. - М.: Наука, 1969. - 420 с.
11. Макаров Э.С., Губанов А.В. Построение математических моделей процессов осесимметричной деформации дилатирующих сред // Математические методы в технике и технологиях. - Великий Новгород: изд. НГУ, 1999. - С. 127-128.
12. Журавлев Г.М., Чан Дык Хоан. Подход к решению задач пластического формоизменения деталей из дилатирующих материалов // Известия ТулГУ. Серия. Технические науки. Тула: Изд-во ТулГУ. 2011. - Вып. 6. часть 2 - С. 301-309.
13. Макаров Э.С., Толоконников Л. А. Вариант построения теории пластичности дилатирующей среды // Изв. АН СССР, Механика твердого тела. - 1979. - № 1. - С. 88-93.
14. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. - М., Л.: Гостехиздат, 1945. - 620 с.
15. Макаров Э.С. Теория пластичности дилатирующих сред: монография / Э.С. Макаров, А.Е. Гвоздев, Г.М. Журавлев; под. ред. А.Е. Гвоздева. - 2-е изд. перераб. и доп. - Тула: Издательство ТулГУ, 2015. - 337 с.

16. Расчет деформационной повреждаемости в процессах обратного выдавливания металлических изделий / А.Е. Гвоздев, Г.М. Журавлев, А.Г. Колмаков, Д.А. Провоторов, Н.Н. Сергеев // *Технология металлов*. – 2016. – № 1. – С. 23-32.
17. Вариант расчета максимального упрочнения малоуглеродистых сталей в процессах пластической деформации / Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, Д.А. Провоторов // *Производство проката*. – 2016. – № 7. – С. 9-13.
18. Вытяжка с утонением анизотропного упрочняющего материала / Г.М. Журавлев, А.Е. Гвоздев, В.И. Золотухин, Д.А. Провоторов // *Производство проката*. – 2016. – № 4. – С. 5-10.
19. Синтез и триботехнические свойства композиционного покрытия с матрицей из полиимида (Р-ООО)ФТ и наполнителем из наночастиц дисульфида вольфрама при сухом трении скольжения / А.Д. Бреки, А.Л. Диденко, В.В. Кудрявцев, Е.С. Васильева, О.В. Толочко, А.Г. Колмаков, А.Е. Гвоздев, Д.А. Провоторов, Н.Е. Стариков, Ю.А. Фадин // *Материаловедение*. – 2016. – № 4. – С. 44-48.
20. Композиционные покрытия на основе полиимида А-ООО и наночастиц WS<sub>2</sub> с повышенными триботехническими характеристиками в условиях сухого трения скольжения / А.Д. Бреки, А.Л. Диденко, В.В. Кудрявцев, Е.С. Васильева, О.В. Толочко, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, Д.А. Провоторов, Н.Е. Стариков, Ю.А. Фадин, А.Г. Колмаков // *Материаловедение*. – 2016. – № 5. – С. 41-44.
21. Бреки А.Д. Использование обобщенного треугольника Паскаля для описания колебаний силы трения материалов / А.Д. Бреки, А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков // *Материаловедение*. – 2016. – № 11. – С. 3-8.
22. Распределение температур и структура в зоне термического влияния для стальных листов после лазерной резки / А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, И.В. Минаев, А.Г. Колмаков, И.В. Тихонова, А.Н. Сергеев, Д.А. Провоторов, Д.М. Хонелидзе, Д.В. Малий, И.В. Голышев // *Материаловедение*. – 2016. – № 9. – С. 3-7.
23. О фрикционном взаимодействии металлических материалов с учетом явления сверхпластичности / А.Д. Бреки, А.Е. Гвоздев, А.Г. Колмаков, Н.Е. Стариков, Д.А. Провоторов, Н.Н. Сергеев, Д.М. Хонелидзе // *Материаловедение*. – 2016. – № 8. – С. 21-25.
24. Maximum plastic strengthening in tool steels / G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, A.E. Cheglov, N.N. Sergeev, O.M. Gubanov // *Steel in Translation*. 2017. Vol. 47. № 6. P 399-411.
25. Сопряженные поля в упругих, пластических, сыпучих средах и металлических труднодеформируемых системах: монография / Э.С. Макаров, В.Э. Ульченкова, А.Е. Гвоздев, Н.Н. Сергеев, А.Н. Сергеев / под ред. А.Е. Гвоздева. Тула: Издательство ТулГУ, 2016. 526 с.
26. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Колмаков А.Г. Формирование механических свойств углеродистых сталей в процессах вытяжки с утонением // *Технология металлов*. 2015. № 11. С. 17 – 29.
27. Применение теории пластичности дилатирующих сред к процессам уплотнения порошков металлических систем / Э.С. Макаров, А.Е. Гвоздев, Г.М. Журавлев, А.Н. Сергеев, И.В. Минаев, А.Д. Бреки, А.Д. Малий // *Чебышевский сборник*. 2017. Т.18. Вып. 4. С. 1-17.
28. Гвоздев А.Е., Журавлев Г.М., Сапожников С.В. К теоретическому анализу процесса компактирования порошковых материалов прессованием // *Известия Тульского государственного университета. Науки о земле*. 2017. Вып. 4. С. 273-283.

## REFERENCES

1. Nikolayevskiy V. N., 1975. *Opredelyayushchiye zakony mekhaniki gruntov [Defining laws of soil mechanics]: Collection of articles, Ed. by V.N. Nikolayevskiy.* Moscow: Mir, 230 P.
2. Vyalov S. S., 1978. *Reologicheskiye osnovy mekhaniki gruntov [Rheological basis of soil mechanics].* Moscow: Vysshaya shkola, 448 P.
3. Vinogradov G. A., Katashinskiy V.P., 1979. *Teoriya listovoy prokatki metallicheskih poroshkov i granul [The theory of sheet rolling of metal powders and granules].* Moscow: Metallurgiya, 224 P.
4. Perel'man V.E., 1979. *Formovaniye poroshkovykh materialov [Molding of powder materials].* Moscow: Metallurgiya - 232 P.
5. Makarov E.S., 1973. "K teorii formovaniya metallicheskih poroshkov v usloviyakh ploskoy deformatsii [On the theory of forming metallic powders under conditions of plane deformation]" *Izvestiya Vuzov, Mashinostroenie.* No. 10. P. 158-162.
6. Pavlov V.A., Kiparisov S.S., Shcherbina V.V., 1977. *Obrabotka davleniyem poroshkov tsvetnykh metallov [Pressure treatment of non-ferrous metal powders].* Moscow: Metallurgiya, 176 P.
7. Kolikov A.P., Polukhin P.I., Krupin A.V., 1986. *Novyye protsessy deformatsii metallov i splavov [New processes of deformation of metals and alloys]* Moscow: Vysshaya shkola, 352 P.
8. Mitin B.S., 1987. *Poroshkovaya metallurgiya i napylenkiye pokrytiya [Powder metallurgy and sprayed coatings]* Ed. by B.S. Mitin. Moscow: Metallurgiya, 792 p.
9. Bogoyavlenskiy K.N., Ris V.V., 1984. *Ekonomichnyye metody formoobrazovaniya detaley [Economical methods for detail formation]* Ed. by K.N. Bogoyavlenskiy and V. V. Ris. Leningrad: Lenizdat, 44 P.
10. Kachanov L.M., 1969. *Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of the plasticity theory].* Moscow: Nauka, 420 P.
11. Makarov E.S., Gubanov A.V., 1999. "Postroyeniye matematicheskikh modeley protsessov osesimmetrichnoy deformatsii dilatiruyushchikh sred [Construction of mathematical models of the axisymmetric deformation processes of dilating media]" *Matematicheskiye metody v tekhnike i tekhnologiyakh.* Veliky Novgorod: NSU Publishing house, P. 127-128.
12. Zhuravlev G.M., Chan Dyk Khoan, 2011. "Podkhod k resheniyu zadach plasticheskogo formoizmeneniya detaley iz dilatiruyushchikh materialov [Approach to the problem solution of plastic detail forming of dilatant materials]" *Izvestiya TulGU. Seriya. Tekhnicheskkiye nauki.* Tula: Publishing house of Tula State University. Issue. 6. Part 2. P. 301-309.
13. Makarov E.S., Tolokonnikov L. A., 1979. "Variant postroyeniya teorii plastichnosti dilatiruyushchey sredy [Variant of constructing the plasticity theory of dilatating medium]" *Izvestiya AN SSSR, Mekhanika tverdogo tela.* No. 1. P. 88-93.
14. Kurant R., Gilbert D., 1945. *Metody matematicheskoy fiziki [Methods of mathematical physics].* Moscow, Leningrad: Gostekhizdat, 620 p.
15. Makarov E.S., E.S. Makarov, A.E. Gvozdev, G.M. Zhuravlev, 2015. *Teoriya plastichnosti dilatiruyushchikh sred [The plasticity theory of dilatant media]: monograph ; Ed. by A.E. Gvozdev. -2nd ed., revis. and addit.* Tula: Publishing House of Tula State University, 337 P.

16. A.E. Gvozdev, G.M. Zhuravlev, A.G. Kolmakov, D.A. Provotorov, N.N. Sergeev, 2016. "Расчет деформационной повреждаемости в процессах обратного выдавливания металлических изделий [Deformation damageability calculation in the processes of reverse extrusion of metal products]" *Tekhnologiya metallov*. No. 1. P. 23-32.
17. G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, N.N. Sergeev, D.A. Provotorov, 2016. "Variant rascheta maksimal'nogo uprochneniya malouglerodistykh staley v protsessakh plasticheskoy deformatsii [Variant of calculating the maximum hardening of low-carbon steels in plastic deformation processes]" *Proizvodstvo prokata*. No. 7. P. 9-13.
18. G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, V.I. Zolotukhin, D.A. Provotorov, 2016. "Vytyazhka s utoneniyem anizotropnogo uprochnyayushchego materiala [Extraction with thinning of anisotropic reinforcing material]" *Proizvodstvo prokata*. 2016. No. 4. P. 5-10.
19. A.D. Breki, A.L. Didenko, V.V. Kudryavtsev, E.S. Vasilyeva, O.V. Tolochko, A.G. Kolmakov, A.E. Gvozdev, D.A. Provotorov, N.E. Starikov, Yu.A. Fadin, 2016 "Sintez i tribotekhnicheskiye svoystva kompozitsionnogo pokrytiya s matritsey iz poliimida (R-OOO)FT i napolnitelem iz nanochastits disul'fida vol'frama pri sukhom trenii skol'zheniya [Synthesis and tribotechnical properties of a composite coating with a matrix of polyimide (P-OOO)FT and a filler made of nanoparticles of tungsten disulfide with dry sliding friction]" *Materialovedeniye*. No. 4. P. 44-48.
20. A.D. Breki, A.L. Didenko, V.V. Kudryavtsev, E.S. Vasilyeva, O.V. Tolochko, A.E. Gvozdev, N.N. Sergeev, D.A. Provotorov, N.E. Starikov, Yu.A. Fadin, A.G. Kolmakov, 2016. "Kompozitsionnyye pokrytiya na osnove poliimida A-OOO i nanochastits WS<sub>2</sub> s povyshennymi tribotekhnicheskimi kharakteristikami v usloviyakh sukhogo treniya skol'zheniya [Composite coatings based on polyimide A-OOO and nanoparticles WS<sub>2</sub> with increased tribotechnical characteristics under conditions of dry sliding friction]" *Materialovedeniye*. No. 5. P. 41-44.
21. A.D. Breki, A.E. Gvozdev, A.G. Kolmakov, 2016. "Ispol'zovaniye obobshchennogo treugol'nika Paskalya dlya opisaniya kolebaniy sily treniya materialov [Use of the generalized Pascal triangle for describing the oscillations of frictional force of materials]" *Materialovedeniye*. No. 11. P. 3-8.
22. A.E. Gvozdev, N.N. Sergeev, I.V. Minaev, A.G. Kolmakov, I.V. Tikhonova, A.N. Sergeev, D.A. Provotorov, D.M. Khonilidze, D.V. Maliy, I.V. Golyshev, 2016 "Raspredeleniye temperatur i struktura v zone termicheskogo vliyaniya dlya stal'nykh listov posle lazernoy rezki [Temperature distribution and structure in the heat-affected zone for steel sheets after laser cutting]" *Materialovedeniye*. No. 9. P. 3-7.
23. A.D. Breki, A.E. Gvozdev, A.G. Kolmakov, N.E. Starikov, D.A. Provotorov, N.N. Sergeev, D.M. Khonilidze, 2016. "O friktsionnom vzaimodeystvii metallicheskiykh materialov s uchetom yavleniya sverkhplastichnosti [On frictional interaction of metallic materials taking into account the superplasticity phenomenon]" *Materialovedeniye*. No. 8. P. 21-25.
24. G.M. Zhuravlev, A.E. Gvozdev, A.E. Cheglov, N.N. Sergeev, O.M. Gubanov, 2017. "Maximum plastic strengthening in tool steels" *Steel in Translation*. Vol. 47. № 6. P 399-411.
25. E.S. Makarov, V.E. Ulchenkova, A.E. Gvozdev, N.N. Sergeev, A.N. Sergeev, 2016. *Sopryazhennyye polya v uprugikh, plasticheskikh, sypuchikh sredakh i metallicheskiykh trudnodeformiruyemykh sistemakh [Coupled fields in elastic, plastic, bulk media and metallic hard-deformed systems]: monograph ed. by A.E. Gvozdev*. Tula: Publishing House of Tula State University. 526 P.

26. Gvozdev A.Ye., Zhuravlev G.M., Kolmakov A.G., 2015. "Formirovaniye mekhanicheskikh svoystv uglerodistykh staley v protsessakh vytyazhki s utoneniyem [Formation of carbon steels mechanical properties in drawing processes with thinning]" *Tekhnologiya metallov*. No. 11. P. 17 - 29.
27. E.S. Makarov, A.E. Gvozdev, G.M. Zhuravlev, A.N. Sergeev, I.V. Minayev, A.D. Breki, A.D. Maliy, 2017. "Primeneniye teorii plastichnosti dilatiruyushchikh sred k protsessam uplotneniya poroshkov metallicheskih sistem [Application of the plasticity theory of dilatation media to the processes of metallic systems powders compaction]" *Chebyshevskiy sbornik*. Vol.18. Issue 4. P. 268-284.
28. Gvozdev A.Ye., Zhuravlev G.M., Sapozhnikov S.V., 2017. "K teoreticheskomu analizu protsessa kompaktirovaniya poroshkovykh materialov pressovaniyem [To the theoretical analysis of the process of compacting powdered materials by pressing]" *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Nauki o zemle*. Issue 4. P. 273-283.