ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 19. Выпуск 1

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-124-137

Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость

Кузнецов Валентин Николаевич — доктор технических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и системного анализа, Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина.
e-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru
Матвеева Ольга Андреевна — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры алгебры и теории чисел, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского.
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Аннотация

Рассматривается класс рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, определяющих функции, регулярные в правой полуплоскости комплексной плоскости и допускающие аппроксимацию полиномами Дирихле в критической полосе. Показано, что условие регулярности на мнимой оси позволяет аналитически продолжить такие ряды как целые функции на комплексную плоскость.

В основе доказательсва этого факта лежат свойства аппроцксимационных полиномов Дирихле и идеи Римана-Шварца, заложенные в принципе симметрии аналитического продолжения функций комплексного переменного. Указан класс рядов Дирихле, для которых выполняется условие аналитичности на мнимой оси.

Нужно отметить, что полученный в работе результат имеет непосредственное отношение к решению известной проблемы обобщенных характеров, поставленной Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым в 1950м году.

Указанный в работе подход в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с числовыми характерами допускает обобщение на ряды Дирихле с характерами числовых полей. Это позвволяет получить аналитическое продолжение не используя функциональное уравнение L-функций Дирихле числовых полей на комплексную плоскость.

Отметим также, что изучаемому в работе классу рядов Дирихле принадлежат и ряды Дирихле, коэффициенты которых определяются неглавными обобщенными характерами. Можно показать, что для этих рядов выполняется условие аналитического продолжения. Еще в 1984 году В. Н. Кузнецов показал, что в случае аналитического продолжения таких рядов целым образом на комплексную плоскость с определенным порядком роста модуля, то будет иметь место гипотеза Н. Г. Чудакова о том, что обобщенный характер является характером Дирихле. Но окончательное решение проблемы обобщенных характеров, поставленной в 1950м году Ю. В. Линником и Н. Г. Чудаковым, будет приведено в следующих работах авторов.

Ключевые слова: аппроксимационные полиномы Дирихле, принцип симметрии Римана-Шварца, конформные отображения

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
В. Н. Кузнецов, О. А. Матвеева. Граничное поведение и задача аналитического продолжения одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, вып. 1, С. 124–137.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 19. No. 1

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-1-124-137

Boundary behavior and the problem of analytic continuation of a certain class of Dirichlet series with multiplicative coefficients as an integral functions on the complex plane

Kuznetsov Valentin Nikolaevich — doctor of technical sciences, professor, professor of the department of applied mathematics and systems analysis, Saratov State Technical University.
e-mail: KuznetsovVN@info.sgu.ru
Matveeva Olga Andreevna — candidate of physical and mathematical sciences, assistant of the department of computer algebra and number theory, Saratov State University.
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Abstract

The paper considers the class of Dirichlet series with multiplicative coefficients defining Functions regular in the right half-plane of the complex plane and admitting Approximation by Dirichlet polynomials in the critical strip. It is shown that the regularity condition on the imaginary axis allows one to analytically continue such series as entire functions on the complex plane.

The proof of this fact is based on the properties of approximation Dirichlet polynomials and the Riemann-Schwartz ideas, embedded in the symmetry principle of analytic continuation functions of a complex variable. The class of Dirichlet series for which Analyticity analysis on the imaginary axis.

It should be noted that the result obtained in the work has a direct relation to the solution of the well-known problem of generalized characters posed by Y. V. Linnik and N. G. Chudakov in the 1950s.

The approach indicated in the paper in the problem of analytic continuation of Dirichlet series with numerical properties admits a generalization to Dirichlet series with characters of numeric fields. This encourages credit continuation without using the functional equation of the Dirichlet L-functions of numeric fields on the complex plane.

We also note that the class of Dirichlet series studied in this paper belongs to the Dirichlet series whose coefficients are determined by non-principal generalized characters. It can be shown that for these series the condition of analytic continuation. As far back as 1984, V. N. Kuznetsov showed that in the case of an analytic continuation of such series in an integral way onto the complex plane determined by the order of growth of the module, then Chudakov's hypothesis that the generalized character is a Dirichlet character will take place. But the final solution of the problem of generalized characters, put in 1950 by Y. V. Linnik and N. G. Chudakov, will be given in the following papers of the authors.

Keywords: approximation Dirichlet polynomials, the Riemann-Schwarz symmetry principle, conformal mappings

Bibliography: 15 titles.

For citation:

V. N. Kuznetsov, O. A. Matveeva, 2018, "Boundary behavior and the problem of analytic continuation of a certain class of Dirichlet series with multiplicative coefficients as an integral functions on the complex plane", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 124–137.

1. Введение

В начале 80-х годов прошлого столетия В. Н. Кузнецов разработал основные положения так называемого метода редукции к степенным рядам, что позволило ему получить ряд новых результатов в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле. Так в работе [1] было показано, что ряды Дирихле с конечнозначными коэффициентами тогда и только тогда определяют целые функции с определенным порядком роста модуля, когда коэффициенты таких рядов являются периодическими, начиная с некоторого номера. В работе [2] показано, что ряд Дирихле, определяющий целую функцию, характеризуется определенными граничными свойствами соответствующего (с теми же коэффициентами, что и у ряда Дирихле) степенного ряда.

В последние годы авторы получили ряд новых результатов в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами. Эти результаты были получены на основании нового подхода, разработанного в работах О. А. Матвеевой (см. [3]-[6]), основанного на построении последовательности полиномов Дирихле, сходящихся в правой полуплоскости комплексной плоскости к функции, определенной рядом Дирихле, и переносе отдельных свойств таких полиномов на ряды Дирихле. Результаты относительно аналитического продолжения рядов Дирихле, полученные в этом направлении, опубликованы в работах [7]-[11].

В работе [7] было получено необходимое и достаточное условие аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами целым образом на комплексную плоскость, выраженное в терминах поведения чазаровских средних коэффициентов таких рядов.

В работе [8] изучалось граничное поведение функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}, s = \sigma + it, \tag{1}$$

где $h(n)$ конечнозначный числовой характер, имеющий ограниченную сумматорную функцию

$$S(x) = \sum_{n \leq x} h(n) = Q(s), \tag{2}$$

и для которого $h(p) \neq 0$ почти для всех простых p.

Было показано, что функция $f(s)$, определенная в этом случае рядом Дирихле (1), является непрерывной на мнимой оси.

В данной работе получено условие целостности ряда Дирихле (1), выраженное в терминах граничных свойств функции $f(s)$ на мнимой оси. Это условие получено на основании аналитических свойств аппроксимационных полиномов Дирихле, которые позволили при решении задачи аналитического продолжения воспользоваться идеями Римана — Шварца, лежащих в основе принципа симметрии при аналитическом продолжении функций комплексного переменного (см. примеры [12], [13])

2. Класс рядов Дирихле. Аппроксимационные полиномы, их свойства

В дальнейшем мы будем рассматривать класс рядов Дирихле (1), для которых выполняются следующие условия:

1. функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1), регулярно в полуплоскости $\sigma > 0$ и ограничена в полосе: $0 < \sigma < \infty, |t| \leq T$, константой, зависящей только от величины T;

2. степенной ряд
$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} h(n)x^n, \tag{3}$$
соответствующий ряду Дирихле (1), имеет предел в точке единица
$$\lim_{x\to 1-0} g(x) = \alpha_0$$

Как показано в работах ([7]-[11]) для таких рядов Дирихле существует последовательность полиномов Дирихле $Q_x(s)$, удовлетворяющих условиям:

1. В любой полосе: $0 < \sigma_0 \le \sigma < \infty, |t| \le T$, последовательность полиномов $Q_n(s)$, равномерно сходится к функции $f(s)$;

2. Пусть $\varepsilon_n \to 0$. Тогда для любого ε_{n_0} существует n_0, что при $n \ge n_0$ в полосе: $0 < \sigma_0 \le \sigma < \infty, |t| \le T$, выполняется неравенство
$$|t(s) - Q_n(s)| < C \cdot \varepsilon_{n_0},$$
где константа C не зависит от n и σ_0.

3. Для любой полосы $0 < \sigma_0 \le \sigma < \infty, |t| \le T$, существует n_0, что при $n \ge n_0$ нормы полиномов $Q_n(s)$ ограничены константой, зависящей только от величины T.

Полиномы Дирихле, удовлетворяющие перечисленным выше условиям получили название аппроксимационных полиномов для соответствующего ряда Дирихле.

Известно (см. [7]-[11]), что аппроксимационные полиномы Дирихле определяются не единственным способом. Поэтому каждый раз встает задача указать такие полиномы наиболее простого вида.

В работе [7] было показано, что в качестве аппроксимационных полиномов Дирихле для рядов Дирихле из указанного класса можно рассматривать полиномы вида
$$Q_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h(k)r_n^k}{k^s}, \tag{4}$$
где величина r_n удовлетворяет условию $0 < r_n < 1$ и своя для каждого полинома. При этом $r_n \to 1$ при $n \to \infty$.

В дальнейшем в качестве аппроксимационных полиномов будем рассматривать полиномы вида (4).

В работах авторов [7]-[11] рассматривались отдельные классы рядов Дирихле, допускающих аппроксимацию полиномов Дирихле. В этих работах изучались отдельные свойства аппроксимационных полиномов, которые позволяли решать ряд задач, связанных с аналитическими свойствами рядов Дирихле.

В данном случае мы исследуем те свойства полиномов $Q_n(s)$, которые связаны с задачей аналитического продолжения рядов Дирихле (1) целым образом на комплексную плоскость.

Остановимся на отдельных примерах рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами, принадлежащих рассматриваемому классу.

Пример 1. *Рассмотрим ряд Дирихле с конечнозначными мультипликативными коэффициентами*
$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s}$$

и соответствующий степенной ряд

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} h(n) x^k$$

Предположим, что существует конечный предел вида

$$\lim_{x \to 1-0} g(x) = \alpha_0,$$

и для величины наилучшего приближения $\varepsilon_n(g(x))$ *функции* $g(x)$ *на отрезке* $[0;1]$ *алгебраическими полиномами степени* n *выполняется оценка*

$$\varepsilon_k(g(x)) = O(\frac{1}{n^{\varepsilon}}), \text{где } \varepsilon > 0.$$

Тогда (см. например, [14]*) имеем*

$$|g(x) - \alpha_0| = O((1-x)^{\varepsilon}) \text{при } x \to 1-0.$$

Отсюда следует, что

$$|g(\bar{e}^{x}) - \alpha_0| = O(x^{\varepsilon}) \text{при } x \to 0+$$

Рассмотрим равенство, полученное из известной формулы Меллина

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{\infty} (g(e^{-x}) - \alpha_0) x^{s-1} dx + \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{\infty} \alpha_0 x^{s-1} dx, \sigma > 0,$$

Отсюда, в силу предыдущей оценки следует, что $f(s)$ *регулярна в полуплоскости* $\sigma > -\varepsilon$.

Тогда $f(s)$ *ограничена в каждой полосе:* $0 < \sigma_0 \le \sigma < \infty, |t| \le T$, *константой, зависящей только от величины* T, *и, как показано в* [8], *допускает в полуплоскости* $\sigma > 0$ *аппроксимацию полиномами Дирихле, удовлетворяющих указанным выше свойствам.*

Пример 2. *Пусть коэффициенты* $h(n)$ *ряда Дирихле определяются конечнозначным характером и удовлетворяют следующим условиям:*

1. *сумматорная функция ограничена, т. е.*

$$S(x) = \sum_{n \le x} h(n) = O(1);$$

2. *функция* $S^{(2)}(x) = \sum\limits_{n \le x} S(n)$ *имеет следующую асимптотику*

$$S^{(2)}(x) = \alpha x + O(1),$$

где α *может принимать и нулевое значение.*

В силу известной формулы

$$f(x) = S \cdot \int\limits_1^{\infty} \frac{S(k)}{k^{s+1}} dk, \sigma > 1,$$

и в силу 1 функция $f(s)$ *продолжена регулярным образом в полуплоскость* $\sigma > 0$.

В силу условия 2 в результате вычисления последнего интеграла по формуле интегрирования по частям $f(s)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\sigma > -1$.

Отсюда следует, что $f(s)$ ограничена в полосе: $0 < \sigma_0 \leq \sigma < \infty, |t| \leq T$ константой, зависящей только от T.

Покажем, что соответствующий степенной ряд

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} h(n)x^n$$

имеет конечный предел в точке $x = 1$.

Рассмотрим частичную сумму этого ряда $S_N(x)$ и применим к ней дважды преобразование Абеля. В итоге получаем

$$S_N(x) = S(N)x^N - S(N-1)x^{N-1}(1-x) + \sum_{n=1}^{N-2} S^2(n)x^{n-2}(1-x)^2 \tag{5}$$

В силу 2 имеем

$$\sum_{n=1}^{N-2} S^2(n)x^{n-1}(1-x^2) = (1-x^2)\sum_{n=1}^{N-2} \alpha n x^{n-2} + (1-x)^2 \sum_{n=1}^{N-2} \varphi(n)x^{n-2}, \tag{6}$$

где $\varphi(n)$ — ограниченная функция.

Далее, так как

$$\sum_{n=1}^{N-2} x^{n-2} \text{ стремится к } \frac{1}{x^{(1-x)}} \text{ при } N \to \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{N-2} n x^{n-2} \text{ стремится к } \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-x}\right)' \text{ при } N \to \infty,$$

то в силу (5) и (6) следует, что $g(x)$ имеет конечный предел в точке $x = 1$.

Пример 3. *В работе [8] авторами доказано, ряды Дирихле вида*

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{h(n)}{n^s},$$

где $h(n)$ — неглавный обобщенный характер, принадлежат рассматриваемому классу рядов Дирихле.

Остановимся на отдельных свойствах аппроксимационных полиномов Дирихле. В работе [10] были доказаны следующие утверждения относительно полиномов $Q_n(s)$ в полуплоскости $\sigma > 1$.

Лемма 1. *Для любой бесконечной последовательности аппроксимационных полиномов $\{Q_{n_k}(s)\}$ нормы этих полиномов не ограничены в совокупности единой константой в полосе: $1 < \sigma < 1 + \delta$, где $\delta > 0$.*

Замечание 1. *Утверждение леммы 1 было получено на основании того, что функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле (1) не ограничена в полосе: $1 < \sigma < 1 + \delta$.*

Лемма 2. *Для любого числа $w \neq 0$, существует n_0, что для всех $n \geq n_0$ имеет место равенство*

$$w = Q_n(s_n),$$

где s_n некоторая точка, лежащая в полосе: $1 < \sigma < 1 + \delta$.

Докажем два утверждения относительно нулей аппроксимационных полиномов $Q_n(s)$ вида (4) и их производных в полуплоскости $\sigma > 1$.

Лемма 3. *Для любого $\sigma_0 > 1$ существует n_0, что для всех s, лежащих в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$, и для любого $n \geq n_0$ для аппроксимационного полинома $Q_n(s)$ вида (4) имеет место оценка*

$$|Q_n(s)| > C,$$

где константа $C > 0$ зависит от σ_0.

Доказательство. Во-первых, отметим, что для функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле (1) имеет место тот факт, что для всех s, лежащих в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0 > 1$ имеет место оценка

$$|f(s)| > C_1, \text{ где } C_1 > 0. \tag{7}$$

Эта оценка доказывается, так же как и в случае L — функций Дирихле.

Далее, ряд Дирихле (1) абсолютно сходится в полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$. Следовательно, для $\varepsilon > 0$ существует n_1, что для $n \geq n_1$ и всех s, $\sigma \geq \sigma_0$, имеет место оценка

$$|f(s) - S_n(s)| < \varepsilon,$$

где $S_n(s)$ — частичная сумма этого ряда. Отсюда в силу (7) получаем

$$|S_n(s)| > C_2, \tag{8}$$

где C_2 зависит от σ_0

В силу интегрального представления Меллина при $\sigma \geq \sigma_0$ имеем

$$|S_n(s) - Q_n(s)| \leq \frac{1}{|\Gamma(s)|} \int_0^\infty \left| P_n(\bar{e}^x) - \hat{P}_n(\bar{e}^x) \right| x^{\sigma - 1} dx,$$

где

$$P_n(k) = \sum_{k=1}^n h(k) x^k, \ \hat{P}_n(k) = \sum_{k=1}^n h(k) r_n^k x^k, \ 0 < r_n < 1.$$

Как показано в [7] при $n \geq n_2$ имеет место оценка

$$\left|\left| P_n(x) - \hat{P}_n(x) \right|\right|_{c[0,1]} < \varepsilon.$$

Отсюда следует оценка вида

$$|S_n(s) - Q_n(s)| < C_3 \cdot \varepsilon,$$

что в силу (8) доказывает утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Для любого $\sigma_0 > 1$ существует n_0, что для любого $n \geq n_0$ производная $Q_n^{'}(s)$ аппроксимационного полинома $Q_n(s)$ вида (4) не равна нулю во всех точках полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$.*

Доказательство. В силу леммы 3 существует n_1, что для любого $n \geq n_1$ для всех точек полуплоскости $\sigma \geq \sigma_0$

$$|Q_n(s)| > C_1, \tag{9}$$

где константа C_1 зависит только от величины σ_0.

Рассмотрим $Q_n^{'}(s)$:

$$Q_n^{'}(s) = \sum_1^n \frac{h(k)r_n^k \ln k}{k^s}.$$

Запишем $Q_n(s)$ в виде

$$Q_n(s) = \sum_1^n \frac{h(k)r_n^k \ln k}{k^s} \cdot \frac{1}{\ln k}.$$

Применим к последней сумме формулу суммирования Абеля. В итоге получим оценку вида

$$\left|Q_n^{'}(s)\right| \leq \frac{1}{\ln n}\left|Q_n^{'}(s)\right| + \left|\int\limits_1^{n-1} S^*(n)(\frac{1}{\ln u})'\,du\right| \leq \frac{1}{\ln n}\left|Q_n^{'}(s)\right| + \frac{1}{\ln n}\max_{k\leq n}\left|S^*(k)\right|, \tag{10}$$

где

$$S^*(k) = \sum_{e\leq n} \frac{h(e)r_n^e \ln e}{e^s}.$$

В результате частичного суммирования имеем

$$|S^*(k)| \leq \ln k \left|\sum_{e\leq n} \frac{h(e)r_n^e}{e^s}\right| + \left|\int_1^k \frac{S(u)}{u}du\right|,$$

где

$$|S(u)| = \left|\sum_{m\leq u} \frac{h(m)r_n^m}{m^s}\right| < \sum_1^{\infty} \frac{1}{m^{\sigma_0}} < C_2$$

Отсюда получаем оценку

$$\max_{k\leq n}|S^*(k)| \leq \ln n,$$

которая в силу (10) дает следующую оценку для $Q_n(s)$:

$$|Q_n(s)| \leq \frac{1}{\ln n}\left(\left|Q_n^{'}(s)\right| + C_3\right),$$

где константа C_3 зависит от σ_0.

Отсюда следует оценка вида

$$\left|Q_n^{'}(s)\right| \geq \ln n\,|Q_n(s)| - C_3.$$

которая в силу (9) доказывает утверждение леммы 4.

Замечание 2. *В работе* [15], *гл XI, раздел 5, показано, что $\xi^{'}(s)$, где $\xi(s)$ — дзета функция Римана, имеет бесконечно много нулей, лежащих в полосе: $1 < \sigma < 1 + \delta$. Подобный результат следует ожидать и для функции $f(s)$, определенной рядом Дирихле* (1). *Но как будет видно из дальнейших рассуждений это свойство не позволяет воспользоваться идеями Римана-Шварца для задачи аналитического продолжения рядов Дирихле* (1). *Этим объясняется привлечение аппроксимационных полиномов $Q_n(s)$.*

Остановимся на одном следствии леммы 4. Рассмотрим последовательность областей D_k, ограниченных контурами Γ_k, состоящих из участков: $\Gamma_{k,1} : \sigma = \sigma_k$, $|t| \leq T_k$; $\Gamma_{k,2} : \sigma_k \leq \leq \sigma \leq \sigma_{k_1}$, $t = T_k$; $\Gamma_{k,3} : \sigma = \sigma_{k_1}$, $|t| \leq T_k$; $\Gamma_{k,4} : \sigma_k \leq \sigma \leq \sigma_{k_1}$, $t = -T_k$, где $\sigma_k \to 1$, $\sigma_{k_1} \to \infty$, $T_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Пусть $Q_{n_k}(s)$ — последовательность аппроксимационных полиномов Дирихле вида (4), производные которых $Q^{'}_{n_k}(s)$ удовлетворяют условиям леммы 4, т.е. $Q^{'}_{n_k}(s) \neq 0$ при $\sigma > \sigma_k$. В этом случае, как показано в [12], имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Отображение $W = Q_{n_k}(s)$ является однолистным комформным отображением области D_k на область $\hat{D}_k$. При этом контур Γ_k отображается в простой жордановый контур γ_k , который является границей области $\hat{D}_k$.*

3. Аппроксимационный подход в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами

В данном разделе для рядов Дирихле (1) получено условие на граничное поведение таких рядов, при котором ряды Дирихле определяют целые функции. В основе доказательства этого результата лежат свойства аппроксимации полиномов, позволившие воспользоваться идеями Римана — Шварца, заложенными в принципе симметрии аналитического продолжения функций комплексного переменного.

3.1. Об одном варианте реализации принципа симметрии в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле

Рассмотрим цепочку конформных отображений, связанных с аппроксимационными полиномами $Q_n(s)$.

В силу теоремы 2 полином $Q_{n_k}(s)$ конформно отображает область D_k на область $\hat{D}_k$

$$Q_{n_k}(s) : D_k \to \hat{D}_k. \tag{11}$$

Пусть $Q_{n_k}(s_k) = w_k$, где s_k точка, лежащая в окрестности центра области D_k.

По теореме Римана о существовании конформного отображения области на круг с центром в начале координат (см. [12], стр. 32) существует конформное отображение $\Psi_k(s)$:

$$\Psi_k(s) : \hat{D}_k \to D_{R_k} \tag{12}$$

где $\Psi_k(w_k) = 0$, $\Psi^{'}_k(W_k) > 0$, и где D_{R_k} — круг радиусом R_k, равного конформному радиусу области D_k относительно точки S_k.

Отображением (11) и (12) определяют конформное отображение Φ_k.

$$\Phi_k : D_k \to D_{R_k}, \tag{13}$$

где $\Phi_k(s_k) = 0$, $\Phi^{'}_k(s_k) = 1$.

Существование такого отображения следует из условия (11) и доказательства теоремы Римана о существовании конформного отображения (см. еще раз [12] стр. 32-35)

Отметим, что в [12] на стр. 55 показано, что $R_k > d_{s_k}$, где d_{s_k} — расстояние от точки S_k до границы области D_k. Таким образом, в нашем случае выполняется условие

$$R_k \to \infty, \text{при } k \to \infty \tag{14}$$

Обозначим через φ_k отображение круга D_{R_k} на круг D_{R_1}, т.е. $\varphi_k : D_{R_k} \to D_{R_1}$. Тогда, учитывая (11), (12), (13), получим конформное отображение

$$\Psi_k : D_k \to D_{R_1}, \tag{15}$$

где $\Psi_k(s_k) = 0, \Psi_k'(s_k) > 0$.

В силу теоремы о непрерывной зависимости отображающий функции от области (см. [13], т. 1. на стр. 432) последовательность конформных отображений (15) равномерно сходится на любом замкнутом ограниченном подмножестве полуплоскости $D : \sigma > 1$, к функции $\Psi(s)$, конформно отображающий эту полуплоскость на единичной круг.

$$\Psi : D \to D_{R_1}, \tag{16}$$

При этом граница полуплоскости соответствует граничным точкам единичного круга.

Пусть s_0 — внутренняя точка полуплоскости D и s_0^* симметричная ей относительно прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Точка полуплоскости $\sigma < 0$. Обозначим $u_0 = \Psi(s_0)$ и v_0 — симметричной ей относительно единичной окружности. В силу (14) пусть k_0 наименьшее число такое, что v_0 — внутренняя точка круга $D_{R_{k_0}}$.

Пусть далее

$$w_1 = \Psi_{k_0}^{-s}(v_0)$$

В силу леммы 2 существует полином $Q_{n_k}(s)$ и также S_{n_k} $(1 < \sigma_{n_k} < \delta)$, что

$$w_1 = Q_{n_k}(s_{n_k}), \tag{17}$$

Рассмотрим функцию $F(s^*)$, заданной в левой полуплоскости $(\sigma^* < 0)$ — следующим образом

$$F(s_0^*) = Q_{n_k}(1 - \overline{s}_{n_k}), \tag{18}$$

где $Q_{n_k}(s_{n_k})$ определено по формуле (17), и где $\overline{s}_{n_k}$ — точка, сопряженная точке s_{n_k}.

Отметим, что сдвиг на единицу значения $Q_{n_k}(s_{n_k})$ в равенстве (18) определяется тем, что мы строим функцию, симметричную функции $f(s)$ не относительно $\sigma = 0$, а относительно $\sigma = \frac{1}{2}$.

Отметим так же, что в формуле (17) полином $Q_{n_k}(s)$ и точка s_{n_k} определяются не однозначно, но значение $F(s_0^*)$ не зависит от их выбора. Ниже будут рассматриваться различные способы выбора $Q_{n_k}(s)$ и s_{n_k}.

Функция $F(s^*)$, заданная по формуле (18), определена и регулярна в любой точке полуплоскости $\sigma < 0$. Она определена в точке S^*, для которой, согласно (11) $s \neq s_k$. Но в тоже время в качестве S_k можно взять другую точку, лежащую в окружности центра области D_k.

Регулярность функции $F(s^*)$ следует из регулярности отображения (18).

Ниже будут получены условия на граничное поведение ряда Дирихле (1), при котором функция $F(s^*)$, заданная по формуле (18), определяет аналитическое продолжение ряда Дирихле целым образом на конечную плоскость.

3.2. Граничное поведение функции $f(s)$ и условия аналитического продолжения ряда Дирихле (1) целым образом на комплексную плоскость

Изучим поведение функции $F(s^*)$ при подходе к мнимой оси. Рассмотрим точку s_0, лежащую на оси $\sigma = 1$ и некоторую последовательность точек $s_m \to s_0$, а также последовательность $s_m^* \to s_0^*$. Пусть соответственно $v_m \to v_0$, $v_m^* \to v_0$ и пусть точки $w_{m,1}$ определяются числами v_m^*, т.е.

$$w_{m,1} = Q_{n_m}(s_{n_m}). \tag{19}$$

Так как $w_{m,1} \to w_0$, где $w_0 = f(s_0)$, то существует последовательность $s_{m,1} \to s_0$, что

$$w_{m,1} = f(s_{m,1}) \tag{20}$$

и

$$w_{m,1} = Q_{n_m}(s_{m,1}) + \varepsilon_{n_m}, \tag{21}$$

где $\varepsilon_{n_m} \to 0$ при $n_m \to \infty$.

Предположим, что функция $f(s)$ регулярна на мнимой оси. Тогда в силу (20) и определения функции $F(s^*)$ при $m \geq m_0$ выполняется равенство

$$F(s^*_{m,1}) = f(1 - \bar{s}_{m_n}) = f(s^*_{m,1})$$

Таким образом функция $F(s^*)$ и $f(s)$ совпадают на бесконечном множестве точек, определяемых последовательностями $s_m \to s_0$, лежащих в окрестности точки s_0^* (фактически, в некотором секторе этой окрестности). Следовательно в левой части этой окрестности

$$F(s^*) = f(s^*),$$

т. е. $F(s^*)$ определяет аналитическое продолжение функции $f(s)$.

Предположим теперь, что последовательность многочленов $Q_{n_m}(s)$ сходится равномерно в некоторой окрестности точки s_0^*. Тогда в силу (21)

$$F(s^*_{m,1}) = Q_{n_m}(1 - \bar{s}_{m,1}) + \varepsilon_{mn}.$$

Отсюда при $m > m_0$, где $n_m \to \infty$, имеют место равенства

$$F(s^*_{m,1}) = \hat{f}(s^*_{m,1}), \tag{22}$$

где $\hat{f}(s)$ — предел последовательности полиномов $Q_{n_m}(s)$ в окрестности точки s_0^*.

Так как в правой части окрестности точки s_0^* имеет место равенство

$$f(s) = \hat{f}(s),$$

где $f(s)$ — функция, определяется рядом Дирихле (1), то $\hat{f}(s)$ — аналитическое продолжение функции $f(s)$ в окрестности точки S_0^*. Следовательно, в силу (18), функции $F(s^*)$ определяет аналитическое продолжение ряда Дирихле (1) целым образом на комплексную плоскость.

Таким образом, имеют место следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть функция $f(s)$, определенная рядом Дирихле* (1) *является регулярной на мнимой оси. Тогда ряд Дирихле* (1) *аналитически продолжим целым образом на комплексную плоскость.*

Теорема 3. *Пусть для любой точки мнимой оси существует последовательность аппроксимационных полиномов $Q_{n_k}(s)$, равномерно сходящихся в некоторой окрестности этой точки. Тогда ряд Дирихле* (1) *аналитически продолжим целым образом на комплексную плоскость.*

4. Примеры рядов Дирихле (1), определяющих целые функции

Рассмотрим класс рядов Дирихле (1), коэффициенты которых удовлетворяют условиям:

1. $S(x) = O(1)$, где $S(x) = \sum\limits_{n \le x} h(n)$;
2. $S^2(x) = \alpha x + O(1)$, где $S^2(x) = \sum\limits_{n \le x} S(n)$, и где α — некоторое число, которое может принимать и нулевое значение.

В разделе 2 показано, что такие ряды Дирихле определяют функции, регулярные на мнимой оси. В силу теоремы 3 такие ряды определяют целые функции.

Заметим, что в работе [7] показано, что коэффициенты таких рядов удовлетворяют условиям:

1. $S(x) = O(1)$;
2. для любого натурального m существует алгебраический полином $T_{m-1}(x)$ степени $m-1$ такой, что

$$S^{(m)}(x) = T_{m-1}(x) + O(1) \tag{23}$$

где $S^{(1)}(x) = \sum\limits_{n \le x} h(n)$, $S^{(m)}(x) = \sum\limits_{n \le x} S^{(m-1)}(n)$, $m \ge 2$ и где контакты, входящие в символ «O» не зависит от x.

Таким образом, в данном случае имеет место

Теорема 4. *Пусть $h(n)$ — конечнозначный числовой характер, удовлетворяющий условиям:*

1. $S(x) = O(1)$;

2. $S^{(2)} = \sum\limits_{n \le x} S(n) = \alpha x + O(1)$, где α может ровняться нулю.

Тогда для любого $m \ge 2$ существует полином $T_{m-1}(x)$ степени $m-1$, что для чезаровских средних $S^{(m)}(x)$ значений характера $h(n)$ выполняют равенства (23).

Далее, рассмотрим ряд Дирихле (1), для которого соответствующий степенной ряд

$$g(x) = \sum_{1}^{\infty} h(n)x^n \tag{24}$$

определяет функцию непрерывную на отрезке [0;1] и для величины $E_n(g(x))$ наилучшие приближения функции $g(x)$ на отрезке [0;1] алгебраическими полиномами степени n имеют место оценки вида

$$E_n(g(x)) = O(\frac{1}{n^{\epsilon}}), \text{где } \epsilon > 0. \tag{25}$$

В разделе 2 данной работы показано, что функция $f(s)$, определенная таким рядом Дирихле, является регулярной на мнимой оси. В силу теоремы 3 ряд Дирихле аналитически продолжен на комплексную плоскость как целая функция. Но в этом случае в работе [2], показано, что функция $g(x)$ (24) имеет в точке $x = 1$ конечное произведение вида.

$$\lim_{x \to 1-0} g^{(n)}(x) = \alpha_n, n = 0, 1, 2 \dots . \tag{26}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 5. *Пусть $h(n)$ — конечнозначный числовой характер, для которого степенной ряд* (20) *определяет функцию $g(x)$, непрерывную на отрезке [0,1], и для величин $\varepsilon_n(g(x))$ наилучшего приближения алгебраическими полиномами этой функции на отрезке [0;1] имеет место оценки* (25)*. Тогда функция $g(x)$ имеет в точке $x = 1$ конечные производные любого порядка вида* (26)*.*

Отметим, что теорема 3 утверждает, что, если ряд Дирихле (1) продолжается регулярным образом в полуплоскость $\sigma > -\varepsilon_0$, то он продолжается регулярным образом на комплексную плоскость, т. е. условие мультипликативности коэффициентов играет важную роль в задаче аналитического продолжения рядов Дирихле.

Приведенные выше примеры рядов Дирихле указывают на то, что условие мультипликативности коэффициентов играет важную роль и в подобных вопросах теоремы степенных рядов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов В. Н. Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 198. Т. 36, № 6. С. 805–812.

2. Кузнецов. В. Н. Об аналитическом продолжении одного класса рядов Дирихле // Вычислительные методы и программирование: межвуз. сб. науч. трудов. Саратов: Изд-во СГУ, 1987. С. 17—23.

3. Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы и поведение L-функций Дирихле в критической полосе // Известия Сарат. ун-та. Сер.: Математика. Механика. Информатика. Саратов: Изд-во СГУ, 2013. Вып. 4, ч. 2. С. 80 – 84.

4. Матвеева О. А. О нулях полиномов Дирихле, аппроксимирующих в критической полосе L-функции Дирихле // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, № 2. С. 117–121.

5. Матвеева. О. А. Аналитические свойства определенных классов рядов Дирихле и некоторые задачи теории L-функций Дирихле: дис. … канд. физ.-мат. наук. Ульяновск, 2014. 110 с.

6. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Некоторые задачи, связанные с распределением нулей целых функций, определенных рядами Дирихле с конечнозначными коэффициентами // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, № 2. С. 54 – 60.

7. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. К задаче аналитического продолжения рядов Дирихле с конечнозначными коэффициентами как целых функций на комплексную плоскость // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 4. С. 285 – 295.

8. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 3. С. 115 – 124.

9. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. О граничном поведении одного класса рядов Дирихле // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 2. С. 162 – 169.

10. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Аппроксимационный подход в некоторых задачах теории рядов Дирихле с мультипликативными коэффициентами // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 4. С. 124 – 131.

11. Кузнецов В. Н., Матвеева О. А. Аппроксимационные полиномы Дирихле и некоторые свойства L-функций Дирихле // Чебышевский сборник. 2017. Т. 18, № 4. С. 296 – 304.

12. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. В 2 т. М.: Наука, 1967. Т. 2. 624 с.

13. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.

14. Даугавет И. К. Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.

15. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: Иностр. лит., 1953. 407 с.

REFERENCES

1. Kuznetsov, V. N. 1984, “Analog teoremy Sjoge dlja odnogo klassa rjadov Dirihle“, *Mat. zametki*, vol. 38, iss. 6, pp. 805 – 813.

2. Kuznetsov, V. N. 1987, “On the analytic extension of a class of Dirichlet series“ *Vychislitel’nye metody i programmirovanie: Mezhvuz. sb. nauch. tr.*, vol. 1, pp. 13–23

3. Matveeva, O. A. 2013, “Approksimacionnye polinomy i povedenie L-funkcij Dirihle v kriticheskoj polose“, *Izvestija Sarat. un-ta. Matematika, Mehanika. Informatika*, iss. 4, vol. 2, pp. 80 – 84.

4. Matveeva, O. A. 2013, “On the zeros of Dirichlet polynomials that approximate Dirichlet L-functions in the critical band “ *Chebyshevskij sbornik*, vol. 14, issue 2, pp. 117–121

5. Matveeva, O. A. 2014, “Analiticheskie svojstva opredelennyh klassov rjadov Dirihle i nekotorye zadachi teorii L-funkcij Dirihle“, *Ulyanovsk: Thesis for the academic degree of the Ph.D.*, pp. 110.

6. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2011, “Nekotorye zadachi, svyazannye s raspredeleniem nulej celyh funkcij, opredelennyh ryadami Dirihle s konechnoznachnymi koehfficientami“ *CHebyshevskij sbornik* , vol. 12, iss. 2, pp. 54 — 60.

7. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2017, “K zadache analiticheskogo prodolzheniya ryadov Dirihle s konechnoznachnymi koehfficientami kak celyh funkcij na kompleksnuyu ploskost’“ *Chebyshevskij sbornik*, iss. 4, vol. 18, pp. 285 – 295.

8. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2016, “O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle s mul’tiplikativnymi kojefficientami“, *Chebyshevskij sbornik*, iss. 4, vol. 17, pp. 115 – 124.

9. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2016, “O granichnom povedenii odnogo klassa rjadov Dirihle“, *Chebyshevskij sbornik*, iss. 2, vol. 17, pp. 162 – 169.

10. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2016, “Approksimacionnyj podhod v nekotoryh zadachah teorii rjadov Dirihle s mul’tiplikativnymi kojefficientami “, *Chebyshevskij sbornik*, iss. 4, vol. 17, pp. 124 – 131.

11. Kuznetsov, V. N., Matveeva, O. A. 2017, “Approximation Dirichlet polynomials and some properties of Dirichlet L-functions“ *Chebyshevskij sbornik*, iss. 4, vol. 18, pp. 296 - 304.

12. Markushevich, A. I. 1968, “Theory of analitical functions“ *Nauka, Moscow*, vol. 2, pp. 624.

13. Gurvic, A., Nurant, R. 1968, “Teoriya funkcij“ *Nauka, Moscow*, pp. 646.

14. Daugavet, I. K. 1977, “Vvedenie v teoriyu priblizheniya funkcij“ *Leningrad, Izd-vo LGU* pp. 184.

15. Titchmarsh, E. K. 1953, “Teorija dzeta-funkcii Rimana“ *Moscow, I. L.*, pp. 407.